

Р. А. Абдикаримов<sup>1</sup>, Б. А. Худаяров<sup>2</sup>

**ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ГИБКИХ ПЛАСТИН  
ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ**

<sup>1</sup>Ташкентский финансовый институт,

ул. Кичик халка йули, 7, 100084, Ташкент, Узбекистан; e-mail: rabdikarimov@mail.ru

<sup>2</sup>Ташкентский институт ирригации и мелиорации,

ул. Кари-Ниязова, 39, 100000, Ташкент, Узбекистан; e-mail: bakht-flpo@yandex.ru

**Abstract.** A problem of dynamical stability of viscoelastic plates of variable stiffness is considered. The motion equations relative to deflections have the form of partial integro-differential equations. By use of Bubnov – Galerkin method, based on the monomial and polynomial approximations, the problem is reduced to studying the ordinary integro-differential equations with time as independent variable. A solution of these equations is found numerically basing on exception of singularity in the kernel. An algorithm of numerical solution is described. A row of new mechanical effects is revealed.

**Key words:** viscoelasticity, integro-differential equation, dynamical stability, variable stiffness.

**Введение.**

Современная техника, строительство и другие области промышленности используют все более сложные конструкции, обеспечение прочности, надежности и высокой экономичности которых имеет большое значение. Оптимальное проектирование таких конструкций невозможно без создания математических моделей, позволяющих учитывать максимально возможное количество факторов, влияющих на их работоспособность. При этом достигается значительное снижение веса, улучшение геометрических и механических характеристик строительных сооружений и технических конструкций.

Проблемам расчета тонкостенных элементов конструкций переменной жесткости в упругой и вязкоупругой постановках посвящены многочисленные работы, в которых рассмотрены различные вопросы, относящихся к изучению их поведения при действии статических и динамических нагрузок, включая учет влияния упругого основания и изучение проблем устойчивости. В частности, в работах [8, 11, 12] исследуются статические и динамические деформации изотропных и анизотропных упругих оболочек с использованием классической и уточненной теорий. Исследованиям устойчивости и колебаний прямоугольных пластин переменной толщины в упругой постановке посвящены работы [6, 7, 9, 10, 13, 14, 18, 19]. Аналогичные задачи в вязкоупругой постановке рассматриваются в [15 – 17]. Однако быстрые темпы технического прогресса обуславливают необходимость решения еще более сложных задач. В последнее время изменение конструкции машин и сооружений идет по двум путям: снижения их веса за счет создания равнопрочных элементов и замены во многих случаях сборных конструкций монолитными. Так, в авиа- и ракетостроении конструкторы стремятся уменьшить относительную толщину крыльев и рулевых поверхностей, выполняя их в виде пластин переменной жесткости.

Обычно при математическом моделировании технических конструкций форма конструкции принимается заданной и неизменной. Однако, в последние годы все большее значение приобретает поиск наилучшей конфигурации, особенно исследованиям колебаний тонкостенных конструкций переменной жесткости из композиционных материалов. Эти задачи требуют новых методов математического и компьютерного моделирования.

Математические модели большинства задач наследственной теории вязкоупругости приводят к необходимости численного решения краевых задач для систем интегродифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими краевыми и начальными условиями. Нелинейность моделируемых процессов приводит и к нелинейности краевых задач, описывающих эти процессы. Традиционные методы и алгоритмы численной реализации при этом оказываются малоприменимыми. Поэтому разработка и развитие математических моделей, совершенствование численных методов и алгоритмов решения задач теории наследственной теории вязкоупругости, возникающих при математическом моделировании объектов и явлений – важные и актуальные задачи фундаментальной науки.

Актуальным является также решение конкретных, практически важных классов задач, среди которых отметим задачи математического моделирования и расчета вязкоупругих тонкостенных конструкций переменной жесткости. Решению этих проблем посвящена настоящая работа.

### 1. Постановка задачи и метод решения.

Рассмотрим задачу об устойчивости прямоугольной вязкоупругой пластинки переменной толщины, изготовленной из однородного изотропного материала. Пластина со сторонами  $a$  и  $b$  подвергается динамическому сжатию вдоль стороны  $a$  силой  $P(t) = v \cdot t$  ( $v$  – скорость нагружения) при условии, что пластинка имеет начальные прогибы.

При принятых предположениях, с учетом сжимающей силы  $P(t)(\partial^2 w / \partial x^2)$  и начального прогиба, математическая модель этой задачи относительно поперечного прогиба  $w = w(x, y, t)$  и перемещений  $u = u(x, y, t)$ ;  $v = v(x, y, t)$  описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\begin{aligned}
(1 - \Gamma^*) \left\{ h \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\
\left. + \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + \\
+ p_x - \frac{(1 - \mu^2) \rho h}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
(1 - \Gamma^*) \left\{ h \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\
\left. + \frac{\partial h}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + \\
+ p_y - \frac{(1 - \mu^2) \rho h}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\
(1 - \Gamma^*) h^3 \left( \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial y^4} \right) + 3(1 - \Gamma^*) \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \times \\
\times \left( \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} \right) + 6(1 - \Gamma^*) h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x \partial y^2} \right) +
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& +6(1-\Gamma^*)h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial^3(w-w_0)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3(w-w_0)}{\partial x^2 \partial y} \right) + 3(1-\Gamma^*) \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \times \\
& \times \left( \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} \right) + 6(1-\mu)(1-\Gamma^*) \left[ 2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y} - \\
& -12 \frac{\partial w}{\partial x} (1-\Gamma^*) \left\{ h \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \\
& -12 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (1-\Gamma^*) h \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \\
& -12 \frac{\partial w}{\partial y} (1-\Gamma^*) \left\{ h \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial h}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \\
& -12 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (1-\Gamma^*) h \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \\
& -12(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1-\Gamma^*) h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
& + \frac{12(1-\mu^2)\rho h}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{12(1-\mu^2)}{E} q.
\end{aligned}$$

Представим функции  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $w(x, y, t)$  и  $w_0(x, y)$  в виде разложения по функциям  $\phi_{nm}(x, y)$ ,  $\varphi_{nm}(x, y)$ ,  $\psi_{nm}(x, y)$ , удовлетворяющим соответствующим граничным условиям,

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \phi_{nm}(x, y); \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y); \\
w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y); \quad w_0(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{0nm} \psi_{nm}(x, y), \quad (2)
\end{aligned}$$

где  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$ ,  $w_{nm} = w_{nm}(t)$  – неизвестные функции времени;  $\phi_{nm}(x, y)$ ,  $\varphi_{nm}(x, y)$ ,  $\psi_{nm}(x, y)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$  – координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи.

Подставляя (2) в систему (1) и применяя метод Бубнова – Галеркина, при этом введя безразмерные величины

$$\frac{u}{h_0}; \frac{v}{h_0}; \frac{w}{h_0}; \frac{w_0}{h_0}; \frac{x}{a}; \frac{y}{b}; \frac{h}{h_0}; \lambda = \frac{a}{b}; \delta = \frac{b}{h_0};$$

$$t^* = \frac{P}{P_{kp}} = \frac{\nu t}{P_{kp}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{kp}^*}; \quad P^* = \frac{P}{E} \left( \frac{b}{h_0} \right)^2; \quad \bar{q} = \frac{q}{E} \left( \frac{b}{h_0} \right)^4; \quad S = P_{kp}^* \left( \frac{\pi c E h_0^3}{\nu b^4} \right)^2;$$

$$P_{kp}^* = \frac{P_{kp}}{E(b/h_0)^2} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)}; \quad \Gamma(t) = \frac{\sqrt{S}}{\omega}$$

и сохраняя прежние обозначения, для определения неизвестных  $w_{nm} = w_{nm}(t)$ ,  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$  получаем следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{k \ln m} \ddot{u}_{nm} - \eta_1 (1 - \Gamma^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (d_{1k \ln m} u_{nm} + \lambda e_{1k \ln m} v_{nm}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\delta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M g_{1k \ln mij} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \right\} = 0; \\ & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{k \ln m} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 (1 - \Gamma^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \frac{1}{\lambda} d_{2k \ln m} u_{nm} + e_{2k \ln m} v_{nm} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\delta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M g_{2k \ln mij} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \right\} = 0; \quad (3) \\ & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{k \ln m} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M p_{k \ln m}^* w_{nm} t^* + \eta_3 (1 - \Gamma^*) \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M f_{3k \ln m} (w_{nm} - w_{0nm}) - \\ & \quad - \eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} (1 - \Gamma^*) (d_{4k \ln mij} u_{ij} + e_{4k \ln mij} v_{ij}) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M g_{k \ln mijrs} w_{nm} (1 - \Gamma^*) (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) \right\} = 12 \eta_3 (1 - \mu^2) \lambda^4 q_{kl} \\ & (u_{nm}(0) = u_{0nm}; \quad \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}; \quad v_{nm}(0) = v_{0nm}; \quad \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}; \\ & \quad w_{nm}(0) = w_{0nm}; \quad \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm}), \end{aligned}$$

где  $c = \sqrt{E/\rho}$  – скорость звука в материале пластинки;  $P_{kp} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)} E(h/b)^2$  –

статическая критическая нагрузка;  $\omega = \sqrt{\pi^2 E h^2 P_{kp}^* / (\rho b^4)}$  – частота основного тона

колебаний;  $p_{k \ln m}^* = \int_0^1 \int_0^1 h \psi_{nm,xx}'' \psi_{kl} dx dy$ ;  $\eta_1 = 3\delta^2 / \pi^4 \lambda^2$ ;  $\eta_2 = \frac{3\delta^2}{\pi^4}$ ;  $\eta_3 = \frac{1}{4\pi^4 \lambda^4}$ ;

$$a_{k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 h \phi_{nm} \phi_{kl} dx dy; \quad b_{k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 h \varphi_{nm} \varphi_{kl} dx dy; \quad c_{k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 h \psi_{nm} \psi_{kl} dx dy;$$

$$d_{1k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \left( h \phi_{nm,xx}'' + h'_x \phi'_{nm,x} + \lambda^2 h \frac{1-\mu}{2} \phi_{nm,yy}'' + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 h'_y \phi'_{nm,y} \right) \phi_{kl} dx dy;$$

$$\begin{aligned}
e_{1k \ln m} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1+\mu}{2} h \varphi''_{nm,xy} + \mu h'_x \varphi'_{nm,y} + \frac{1-\mu}{2} h'_y \varphi'_{nm,x} \right) \phi_{kl} dx dy; \\
g_{1k \ln mij} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{\lambda} h \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,xx} + \frac{\lambda(1+\mu)}{2} h \psi'_{nm,y} \psi''_{ij,xy} + \frac{1-\mu}{2} \lambda h \psi'_{nm,x} \psi''_{ij,yy} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\lambda} h'_x \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,x} + \frac{\mu\lambda}{2} h'_x \psi'_{nm,y} \psi'_{ij,y} + \frac{1-\mu}{2} \lambda h'_y \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,y} \right) \phi_{kl} dx dy; \\
d_{2k \ln m} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1+\mu}{2} h \varphi''_{nm,xy} + \frac{1-\mu}{2} h'_x \varphi'_{nm,y} + \mu h'_y \varphi'_{nm,x} \right) \varphi_{kl} dx dy; \\
e_{2k \ln m} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1-\mu}{2\lambda^2} h \phi''_{nm,xx} + h \varphi''_{nm,yy} + \frac{1-\mu}{2} \frac{1}{\lambda^2} h'_x \varphi'_{nm,x} + h'_y \varphi'_{nm,y} \right) \varphi_{kl} dx dy; \\
g_{2k \ln mij} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( h \psi'_{nm,y} \psi''_{ij,yy} + \frac{1+\mu}{2\lambda^2} h \psi'_{nm,x} \psi''_{ij,xy} + \frac{1-\mu}{2\lambda^2} h \psi'_{nm,y} \psi''_{ij,xx} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\mu}{2\lambda^2} h'_x \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,y} + \frac{1}{2} h'_y \psi'_{nm,y} \psi'_{ij,y} + \frac{\mu}{2\lambda^2} h'_y \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,x} \right) \varphi_{kl} dx dy; \\
f_{3k \ln m} &= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ h^3 (\psi''_{nm,xxx} + 2\lambda^2 \psi''_{nm,xyy} + \lambda^4 \psi''_{nm,yyy}) + \right. \\
&\quad + 3[2h(h'_x)^2 + h^2 h''_{xx}] (\psi''_{nm,xx} + \lambda^2 \mu \psi''_{nm,yy}) + 6h^2 h'_x (\psi'''_{nm,xxx} + \lambda^2 \psi'''_{nm,xyy}) + \\
&\quad + 6h^2 h'_y (\lambda^4 \psi'''_{nm,yyy} + \lambda^2 \psi'''_{nm,xyy}) + 3[2h(h'_y)^2 + h^2 h''_{yy}] (\lambda^4 \psi''_{nm,yy} + \lambda^2 \mu \psi''_{nm,xx}) + \\
&\quad \left. + 6(1-\mu)\lambda^2 [2hh'_x h'_y + h^2 h''_{xy}] \psi''_{nm,xy} \right\} \psi_{kl} dx dy; \\
d_{4k \ln mij} &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \lambda \delta h \psi'_{nm,x} \phi''_{ij,xx} + \frac{1-\mu}{2} \lambda^3 \delta h \psi'_{nm,x} \phi''_{ij,yy} + \lambda \delta h'_x \psi'_{nm,x} \phi'_{ij,x} + \right. \\
&\quad + \frac{1-\mu}{2} h'_y \lambda^3 \delta \psi'_{nm,x} \phi'_{ij,y} + \lambda \delta h \psi''_{nm,xx} \phi'_{ij,x} + \frac{1+\mu}{2} \lambda^3 \delta h \psi'_{nm,y} \phi''_{ij,xy} + \lambda^3 \delta \mu h'_y \psi'_{nm,y} \phi'_{ij,x} + \\
&\quad \left. + \frac{1-\mu}{2} \lambda^3 \delta h'_x \psi'_{nm,y} \phi'_{ij,y} + \lambda^3 \delta \mu h \psi''_{nm,yy} \phi'_{ij,x} + (1-\mu)\lambda^3 \delta h \psi''_{nm,xy} \phi'_{ij,y} \right\} \psi_{kl} dx dy; \\
e_{4k \ln mij} &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1+\mu}{2} \lambda^2 \delta h \psi'_{nm,x} \varphi''_{ij,xy} + \lambda^2 \delta \mu h'_x \psi'_{nm,x} \varphi'_{ij,y} + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 \delta h'_y \psi'_{nm,x} \varphi'_{ij,x} + \right. \\
&\quad + \lambda^2 \delta \mu h \psi''_{nm,xx} \varphi'_{ij,y} + \lambda^4 \delta h \psi'_{nm,y} \varphi''_{ij,yy} + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 \delta h \psi'_{nm,y} \varphi''_{ij,xx} + \lambda^4 \delta h'_y \psi'_{nm,y} \varphi'_{ij,y} + \\
&\quad \left. + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 \delta h'_x \psi'_{nm,y} \varphi'_{ij,x} + \lambda^4 \delta h \psi''_{nm,yy} \varphi'_{ij,y} + (1-\mu)\lambda^2 \delta h \psi''_{nm,xy} \varphi'_{ij,x} \right\} \psi_{kl} dx dy;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{klmijrs} = & 12 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ h \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,x} \psi''_{rs,xx} + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 h \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,x} \psi''_{rs,yy} + \right. \\
& + \frac{1+\mu}{2} \lambda^2 h \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,y} \psi''_{rs,xy} + \frac{1}{2} h'_x \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,x} \psi'_{rs,x} + \frac{\lambda^2 \mu}{2} h'_x \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,y} \psi'_{rs,y} + \\
& + \frac{1-\mu}{2} h'_y \lambda^2 \psi'_{nm,x} \psi'_{ij,x} \psi'_{rs,y} + \frac{1}{2} h \psi''_{nm,xx} \psi'_{ij,x} \psi'_{rs,x} + \frac{\lambda^2 \mu}{2} h \psi''_{nm,xx} \psi'_{ij,y} \psi'_{rs,y} + \\
& + \lambda^4 h \psi'_{nm,y} \psi''_{ij,yy} \psi'_{rs,y} + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 h \psi'_{nm,y} \psi''_{ij,xx} \psi'_{rs,y} + \frac{1+\mu}{2} \lambda^2 h \psi'_{nm,y} \psi''_{ij,xy} \psi'_{rs,x} + \\
& + \frac{\lambda^4}{2} h'_y \psi'_{nm,y} \psi'_{ij,y} \psi'_{rs,y} + \frac{\lambda^2 \mu}{2} h'_y \psi'_{nm,y} \psi'_{ij,x} \psi'_{rs,x} + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 h'_x \psi'_{nm,y} \psi'_{ij,x} \psi'_{rs,y} + \\
& + \frac{\lambda^4}{2} h \psi''_{nm,yy} \psi'_{ij,y} \psi'_{rs,y} + \frac{\lambda^2 \mu}{2} h \psi''_{nm,yy} \psi'_{ij,x} \psi'_{rs,x} + \\
& \left. + (1-\mu) \lambda^2 h \psi''_{nm,xy} \psi'_{ij,y} \psi'_{rs,y} \right\} \psi_{kl} dx dy; \quad q_{kl} = q \int_0^1 \int_0^1 \psi_{kl} dx dy.
\end{aligned}$$

## 2. Численные результаты.

В общем случае граничные условия могут быть произвольными. Ниже рассмотрим граничные условия – шарнирное опирание по контуру:

$$\begin{aligned}
w|_{x=0,1} = 0; \quad v|_{x=0,1} = 0; \quad N_x|_{x=0,1} = 0; \quad M_x|_{x=0,1} = 0; \\
w|_{y=0,1} = 0, \quad u|_{y=0,1} = 0, \quad N_y|_{y=0,1} = 0, \quad M_y|_{y=0,1} = 0.
\end{aligned}$$

В этом случае в разложении метода Бубнова – Галеркина (2) аппроксимирующие функции прогиба и перемещений выбираем в виде

$$\begin{aligned}
\phi_{nm}(x, y) = \cos n \pi x \sin m \pi y, \quad \varphi_{nm}(x, y) = \sin n \pi x \cos m \pi y, \\
\psi_{nm}(x, y) = \sin n \pi x \sin m \pi y.
\end{aligned}$$

Интегрирование уравнений (3), полученных на основе одночленной и многочленной аппроксимаций прогиба с учетом различных факторов, выполнено с помощью численного метода, основанного на исключении особенности в ядре [1]. Этот метод был распространен на неразрешенные относительно старших производных системы интегродифференциальных уравнений [5]. Здесь, аналогично [3], в качестве критерия, определяющего критическое время, а также и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине пластины. Для определения динамической критической нагрузки воспользуемся понятием динамического коэффициента  $K_d$ , равного отношению динамической «критической» нагрузки к верхней статической.

Результаты вычислений при различных физических и геометрических параметрах, полученных с помощью компьютера, приведены в таблице и представлены в виде графиков, приведенных на рис. 1 – 8. Зависимость изменения толщины имеет следующий вид:  $h = 1 - \alpha^* x$ . При этом, в расчетах использованы слабосингулярные ядра Колтунова – Ржаницына [4]

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} \cdot t^{\alpha-1}; \quad A > 0; \quad \beta > 0; \quad 0 < \alpha < 1.$$

За исключением случаев, отмеченных отдельно, в качестве исходных данных при вычислениях приняты следующие:  $A = 0,05$ ;  $\alpha = 0,25$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $\delta = 25$ ;  $S = 1$ ;  $w_0 = 0,0001$ ;  $q = 0$ ;  $\lambda = 1$ ;  $\alpha^* = 0,5$ .

Как показывают исследования (таблица), при малых значениях параметра начальных неправильностей  $w_{0nm}$ , скорости нагружения  $S$  и внешней нагрузки  $q$ , результаты, полученные в линейной ( $L$ ) и нелинейной постановках ( $H$ ) почти совпадают и, следовательно, в этих случаях задачи можно рассматривать в линейной постановке. Однако, по мере увеличения значений начальных неправильностей ( $w_{0nm} \geq 10^{-1}$ ) результаты начинают существенно отличаться друг от друга и отличие достигает в некоторых случаях 30 – 40%. Таким образом, в зависимости от физико-механических свойств материала пластины и ее геометрических параметров, данную задачу следует рассматривать в соответствующей постановке.

$A$	$\alpha$	$\beta$	$q$	$\lambda$	$w_{0nm}$	$S$	$\alpha^*$	$K_d$	
								$L$	$H$
0,0	0,25	0,05	0	1	$10^{-4}$	1	0,5	4,98	5,07
0,05	0,25	0,05	0	1	$10^{-4}$	1	0,5	4,76	4,83
0,10	0,25	0,05	0	1	$10^{-4}$	1	0,5	4,58	4,64
0,05	0,1	0,05	0	1	$10^{-4}$	1	0,5	4,42	4,46
0,05	0,25	0,1	0	1	$10^{-4}$	1	0,5	4,76	4,83
0,05	0,25	0,5	0	1	$10^{-4}$	1	0,5	4,76	4,83
0,05	0,25	0,05	1	1	$10^{-4}$	1	0,5	3,67	3,75
0,05	0,25	0,05	2	1	$10^{-4}$	1	0,5	3,21	3,32
0,05	0,25	0,05	3	1	$10^{-4}$	1	0,5	2,93	3,05
0,05	0,25	0,05	0	2	$10^{-4}$	1	0,5	4,78	4,86
0,05	0,25	0,05	0	1	$10^{-2}$	1	0,5	3,22	4,22
0,05	0,25	0,05	0	1	$10^{-1}$	1	0,5	1,98	3,18
0,05	0,25	0,05	0	1	$10^{-4}$	0,1	0,5	9,21	9,25
0,05	0,25	0,05	0	1	$10^{-4}$	10	0,5	3,4	3,44
0,05	0,25	0,05	0	1	$10^{-4}$	1	0	4,66	4,73
0,05	0,25	0,05	0	1	$10^{-4}$	1	0,8	6,17	6,23

Во всех рассмотренных случаях исследована сходимость метода Бубнова – Галеркина. При этом в (2) определены те значения  $N$  и  $M$ , при которых раньше всего начинается бурный рост прогибов.

На рис. 1 показан график зависимости прогиба от времени при коэффициенте вязкости  $A = 0; 0,05; 0,1$ . Принято, что поперечная нагрузка отсутствует, т.е.  $q = 0$ . По оси абсцисс отложен безразмерный параметр  $t^*$ , равный отношению переменной величины сжимающей силы к статической нагрузке, а по оси ординат – безразмерная стрела прогиба  $w_{nm}$ . При этих значениях параметра  $A$  коэффициент динамичности  $K_d$ , соответственно, равен 5,07; 4,83; 4,64. Полученные результаты свидетельствуют, что учет вязкоупругих свойств материала пластинки приводит к уменьшению критической нагрузки.

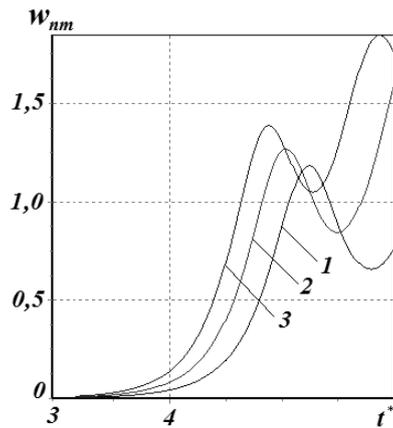


Рис. 1

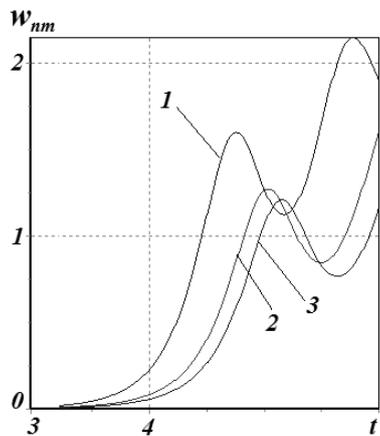


Рис. 2

с результатами упругой задачи, а при использовании ядра Колтунова – Ржаницына их различия оказываются весьма существенными и составляют более чем 40%. Анализ исследования показывает, что результаты вязкоупругой задачи с использованием экспоненциального ядра, обычно применяемого в качестве ядра релаксации, не являются новыми, так как они совпадают с решениями упругой задачи. Следовательно, при рассмотрении динамических задач вязкоупругости возникает необходимость выбрать

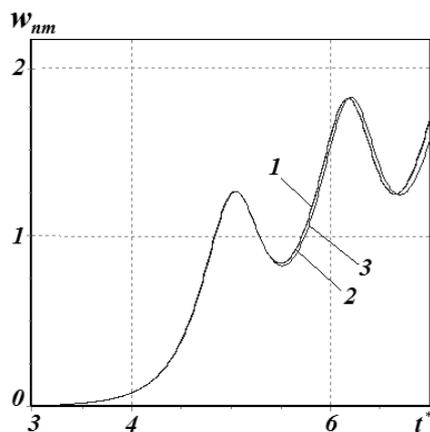


Рис. 3

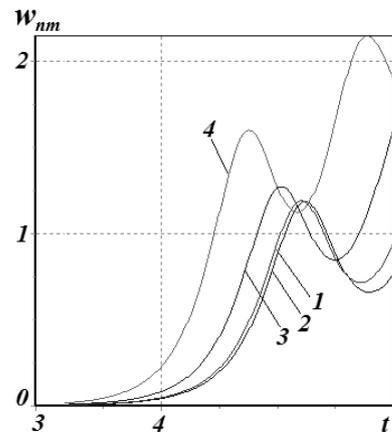


Рис. 4

Исследовано динамическое поведение вязкоупругой пластины при различных значениях реологического параметра  $\alpha$  (рис. 2). Изменение прогиба от времени показано при  $\lambda = 0,1(1)$ ;  $0,25(2)$ ;  $0,5(3)$ . Коэффициенты динамичности в рассмотренных случаях оказываются равными, соответственно, 4,46; 4,83 и 4,97.

Видно, что увеличение значения реологического параметра  $\alpha$  приводит к увеличению критической нагрузки и времени. Эти результаты показывают, что реологический параметр  $\alpha$  играет более существенную роль по сравнению с другими реологическими параметрами  $A$  и  $\beta$ .

Дальнейшие расчеты показали, что изменение третьего реологического параметра вязкости  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) не оказывает существенного влияния на изменение критического времени и критической нагрузки. На рис. 3 показано зависимость прогиба от времени при  $\beta = 0,05(1)$ ;  $0,1(2)$ ;  $0,5(3)$ .

Для более подробного изучения поведения вязкоупругой пластины при различных ядрах релаксации, воспользуемся результатами исследования деформирования пластины, приведенными на рис. 4, где дана зависимость прогиба от времени для различных ядер релаксации: 1 –  $\Gamma(t) = 0$  (упругий); 2 – экспоненциальное ядро; 3, 4 – ядро Колтунова – Ржаницына (3 –  $\alpha = 0,25$ ; 4 –  $\alpha = 0,05$ ). Видно, что результаты для вязкоупругой задачи, полученные с использованием экспоненциального ядра релаксации, почти совпадают

в качестве ядер релаксации ядра типа Колтунова – Ржаницына, описывающие процессы, происходящие в вязкоупругих конструкциях не только в начальной стадии, но и в последующие моменты времени.

Исследовано влияние параметра изменения толщины пластинки  $\alpha^*$  на динамическую устойчивость. На рис. 5 приведены графики для  $\alpha^* = 0(1); 0,4(2); 0,8(3)$ , где дана зависимость прогиба от времени. При этих значениях  $\alpha^*$  коэффициент динамичности  $K_D$  составляет, соответственно, 4,73; 4,83; 6,23. Напомним, что увеличение параметра  $\alpha^*$  влечет за собой уменьшение толщины пластинки. Вычисления произведены при равных объемах пластин постоянной и переменной толщин. Из графиков видно, что с уменьшением толщины значение коэффициента  $K_D$  увеличивается.

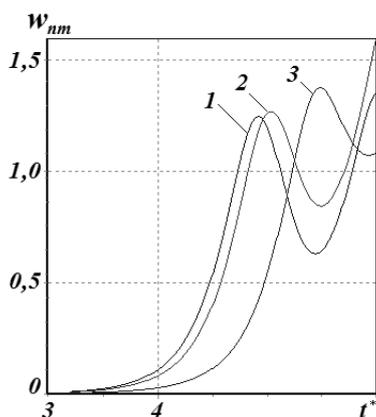


Рис. 5

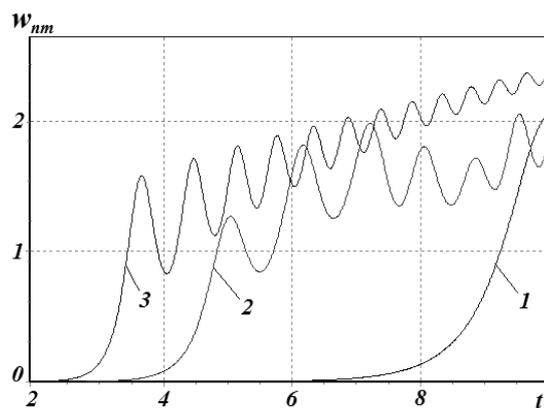


Рис. 6

Рис. 6 отражает зависимость стрелы прогиба и времени при различных значениях параметра скорости нагружения  $S$ . Зависимость прогиба от времени при  $S = 0,1(1); 1(2); 10(3)$ . При этих значениях  $S$  коэффициенты  $K_D$ , соответственно, равны 9,25; 4,83; 3,44. Отметим, что параметр  $S$  обратно пропорционален  $v^2$ . Как и следовало ожидать, аналогично упругому случаю [3], увеличение значения скорости нагружения  $v$  и в вязкоупругом случае приводит к увеличению коэффициента критической нагрузки и времени. Однако, следует отметить, что в вязкоупругом случае бурный рост прогибов происходит в более раннее время, чем в упругом.

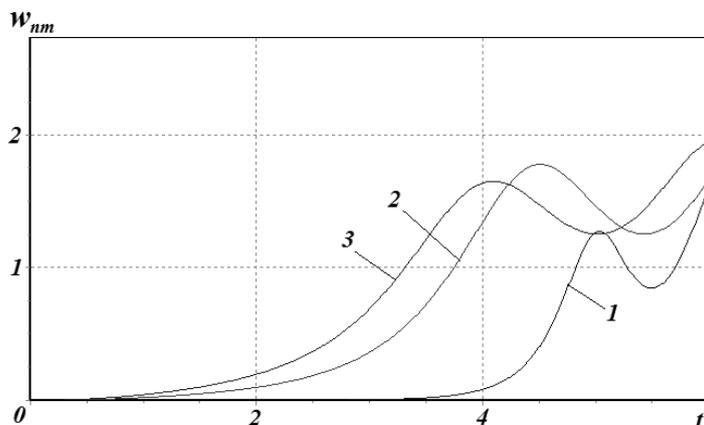


Рис. 7

Рис. 7 отражает зависимость между стрелой прогиба и временем при различных значениях внешней статической нагрузки  $q = 0(1); 1(2); 2(3)$ . При этих значениях  $q$  коэффициенты  $K_D$ , соответственно, равны: 4,83; 3,75; 3,32. Как и следовало ожидать, аналогично упругому случаю [3], увеличение значения  $q$  и в вязкоупругом случае приводит к уменьшению коэффициента критической нагрузки и времени. При  $S = 1, q = 1$  «критическое» число полуволн  $N$  оказалось равным 1, в то время как при  $q = 0$  было  $N = 2$ .

Проведено также сравнение результатов, полученных при решении задач: линейной (кривая 1) и нелинейной (кривая 2) постановках [2] (рис. 8).

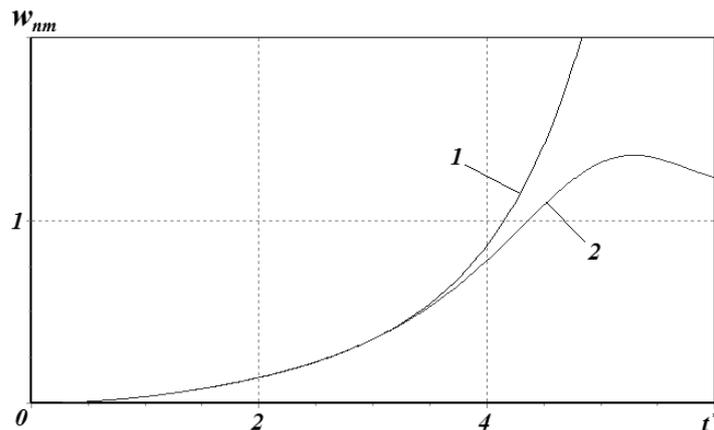


Рис. 8

Данные расчетов показали, что результаты, в основном, зависят от трех параметров (начальных неправильностей, скорости нагружения и дополнительной статической нагрузки). Получено, что в диапазоне изменения параметра начальных неправильностей ( $10^{-4} \leq w_{0nm} \leq 10^{-2}$ ) в обычных пределах изменения параметров  $S$  и  $q$ , результаты почти совпадают. Однако, по мере увеличения параметра начальных неправильностей ( $w_{0nm} \geq 10^{-1}$ ) результаты решений линейной и нелинейной задач начинают отличаться друг от друга. Коэффициенты динамичности  $K_D$ , полученные по этим теориям, соответственно, равны 4,16 и 4,37.

#### Выводы.

При исследовании задачи о динамической устойчивости вязкоупругих пластин переменной жесткости выявлен ряд новых механических эффектов:

1) установлено, что учет вязкоупругих свойств материала тонкостенных элементов конструкций переменной жесткости приводит к уменьшению значения динамически сжимающей силы на 30 – 60%;

2) установлено, что учет нелинейных эффектов при решении задач нелинейных колебаний и динамической устойчивости вязкоупругих элементов несущих конструкций пластин переменной жесткости приводит к увеличению критической нагрузки на 15 – 20%. Этот эффект особенно ярко проявляется для тонких элементов конструкций.

РЕЗЮМЕ. Досліджено динамічну стійкість в'язкопружних пластин змінної жорсткості. Рівняння руху відносно прогинів описано інтегро-диференціальними рівняннями (ІДР) в часткових похідних. З використанням методу Бубнова – Гальоркіна, що базується на одно- і багаточленній апроксимації прогинів, задачу зведено до розв'язання системи звичайних ІДР, де незалежно змінною є час. Розв'язки ІДР визначаються чисельним методом при виключенні особливостей в ядрі. На основі цього методу описано алгоритм чисельного розв'язку задачі. Виявлено ряд нових механічних ефектів.

1. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсуфов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикл. математика и механика. – 1987. – **51**, № 5. – С. 867 – 871.
2. Верлань А.Ф., Абдикаримов Р.А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование. – 2010. – **32**, № 2. – С. 3 – 14.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
4. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высш. школа, 1976. – 276 с.
5. Эшматов Х., Абдикаримов Р.А., Бобоназаров Ш.П. Колебания и устойчивость вязкоупругой трубы с протекающей через нее жидкостью при различных граничных условиях // Проблемы механики. – Ташкент, 1995. – № 1. – С. 20 – 24.
6. Bahmyari E., Rahbar-Ranji A. Free vibration analysis of orthotropic plates with variable thickness resting on non-uniform elastic foundation by element free Galerkin method // J. of Mech. Science and Technology. – 2012. – **26**, N 9. – P. 2685 – 2694.
7. Civalek O. Fundamental Frequency of Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates with Linearly Varying Thickness by Discrete Singular Convolution Method // Appl. Math. Modelling. – 2009. – **33**. – P. 3825 – 3835.
8. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
9. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural-Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 10. – P.1161 – 1169.
10. Grigorenko A.Ya., Tregubenko T.V. Numerical and experimental analysis of natural vibrations of rectangular plates with variable thickness // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 2. – P. 268 – 270.
11. Grigorenko A.Ya., Vovkodav O.V., Yaremchenko S.N. Stress-Strain State of Nonthin Spherical Shells of Variable Thickness under Localized Loads // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 3. – P. 315 – 321.
12. Grigorenko A.Ya., Vovkodav O.V., Yaremchenko S.N. Stress-Strain State of Nonthin Orthotropic Spherical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 1. – P. 80 – 93.
13. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Spline-Based Investigation of Natural Vibrations of Orthotropic Rectangular Plates of Variable Thickness within Classical and Refined Theories // J. of Mech. of Materials and Structures. – 2008. – **3**, N5. – P. 929 – 952.
14. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress – Strain Analysis of Rectangular Plates with a Variable Thickness and Constant Weight // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 2. – P. 167 – 173.
15. Gupta A.K., Khanna A. Free Vibration of Clamped Visco-Elastic Rectangular Plate Having Bi-Direction Exponentially Thickness Variations // J. of Theor. and Appl. Mech. – 2009. – **47**, N 2. – P. 457 – 471.
16. Gupta A. K., Agarwal N., Gupta D.V., Kumar S., Sharma P.. Study of Non-Homogeneity on Free Vibration of Orthotropic Visco-Elastic Rectangular Plate of Parabolic Varying Thickness // Adv. Studies Theor. Phys. – 2010. – **4**, N 10. – P.467 – 486.
17. Khanna A., Ashish Kumar Sharma. Mechanical Vibration of Visco-elastic Plate with Thickness Variation // Int. J. of Appl. Math. Research. – 2012. – **1**, N 2. – P. 150 – 158.
18. Luong N.T.H., Tri T.H. Influence of variable thickness on stability of rectangular plate under compression // Mechanics Research Communications. – 2005. – **32**, N 2. – P. 139 – 146.
19. Semnani Sh.J., Attarnejad R., Firouzjaei R.K. Free vibration analysis of variable thickness thin plates by two-dimensional differential transform method // Acta Mechanica. – 2013. – **224**, N 8. – P. 1643 – 1658.

Поступила 10.10.2011

Утверждена в печать 03.12.2013