

О. Н. Панасюк

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ  
НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОИСТЫХ  
КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: panasiuk.o@meta.ua*

**Abstract.** The propagation of waves in a layered composite material is studied for the case of sliding layers. A dispersion equations are obtained for quasi-longitudinal and quasi-transverse waves. These equations are solved numerically for cases of the full contact of layers and the sliding contact of layers. The corresponding dispersion curves are shown. The effect of boundary conditions on parameters of waves is studied.

**Key words:** layered composite material, not full contact, quasi-longitudinal and quasi-transverse waves, phase velocity.

**Введение.**

Распространению волн в композитных и неоднородных материалах посвящены многие публикации в периодических изданиях [12, 14, 15 и др.]. Особый интерес представляют волны в композитных материалах с начальными напряжениями [7, 10, 11, 13, 17, 18, 20 и др.]; анализ таких результатов дан в обзорных статьях [1, 4, 9, 19] и монографии [22]. Отметим температурные эффекты [13], эффекты, связанные с отражением [20], фильтрацией и фокусировкой [12] волн в слоистых средах.

Распространение плоских волн в слоистом композитном материале с начальными напряжениями периодической структуры рассмотрено в работах [3, 7 и др.], где все результаты получены для полного контакта слоев. В статье [17] проведены аналогичные исследования при полном проскальзывании слоев. Поскольку эти результаты получены для двух крайних случаев контакта между слоями, то представляет интерес их сравнение для оценки результатов при других видах контакта. Указанное сравнение результатов, с целью двухсторонних оценок для исследуемых величин, предложено в [6, 16].

Отметим, что применительно к распространению волн в слоистом композите такое сравнение отсутствует в классической теории (без начальных напряжений). В работе [8] рассмотрено распространение волн в среде с периодически расположенными твердыми слоями (полный контакт), а также твердыми и жидкими слоями (проскальзывание). При анализе дисперсионных уравнений автор ограничился длинноволновым приближением. Результаты этих исследований также приведены в монографии [2].

В статье [21] проведено численное решение дисперсионных уравнений для квазипоперечной и квазипродольной волн при чередовании твердых слоев. Результаты расчетов, которые также включены в монографию [6], представлены для низших мод при различных отношениях модулей сдвига.

В данной работе в рамках классической теории упругости рассмотрено распространение волн при проскальзывании слоев, а также проведен анализ скоростей распространения волн для различных граничных условий.

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим слоистую среду, состоящую из двух изотропных слоев; слои имеют периодическую структуру и толщины  $h^{(1)}$  и  $h^{(2)}$ , соответственно. Все величины, относящиеся к каждому из слоев, отметим сверху индексом в скобках. Примем, что на границе раздела слоев осуществляется полное проскальзывание. Заметим, что в такой среде не могут распространяться сдвиговые волны по нормали к слоям.

Поскольку распространение продольных волн перпендикулярно слоям не отличается от случая полного контакта [8], то исследуем распространение волн параллельно слоям вдоль оси  $x$ , поляризованных в плоскости  $xz$  (рис. 1). Отметим, что сдвиговые волны, поляризованные в плоскости  $xy$ , при проскальзывании распространяются независимо в каждом из слоев. Этот случай сводится к распространению волн Лява в пластинке (в каждом из слоев) [2].

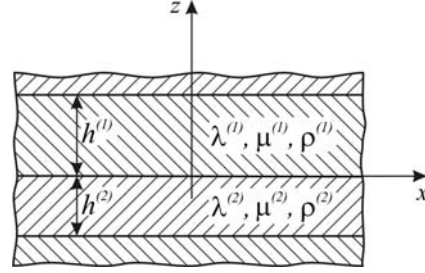


Рис. 1

### 2. Представление общего решения задачи.

Разложим полное смещение  $U^{(j)}$  (здесь и ниже  $j=1,2$ ) частиц среды в каждом из слоев на безвихревую  $u^{(j)}$  и соленоидальную  $v^{(j)}$  части. Тогда для гармонической волны частоты  $\omega$  векторы перемещений  $u^{(j)}$  и  $v^{(j)}$  и их компоненты удовлетворяют уравнениям вида [8]

$$\frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial z^2} + k_l^{(j)2} u^{(j)} = 0; \quad \frac{\partial u_z^{(j)}}{\partial x} = \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial z}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial z^2} + k_t^{(j)2} v^{(j)} = 0; \quad \frac{\partial v_x^{(j)}}{\partial x} = \frac{\partial v_z^{(j)}}{\partial z},$$

где  $k_l^{(j)} = \omega / c_l^{(j)}$ ;  $k_t^{(j)} = \omega / c_t^{(j)}$ ;  $c_l^{(j)} = \sqrt{(\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}) / \rho^{(j)}}$ ;  $c_t^{(j)} = \sqrt{\mu^{(j)} / \rho^{(j)}}$ ;  $\lambda^{(j)}$  и  $\mu^{(j)}$  – упругие постоянные Ламе, а  $\rho^{(j)}$  – плотность материала компонентов.

Общее решение запишем через частные решения, а именно – четное и нечетное решения относительно средин слоев. Решение уравнений (1) для первого компонента имеет вид [8]

$$u_x^{(1)} = P^{(1)}(z) \exp(-ikx); \quad u_z^{(1)} = -(P^{(1)'}(z) / ik) \exp(-ikx); \quad (2)$$

$$v_x^{(1)} = (Q^{(1)'}(z) / ik) \exp(-ikx); \quad v_z^{(1)} = Q^{(1)}(z) \exp(-ikx),$$

где  $k = \omega / c$  – волновое число;  $c$  – фазовая скорость волн в композитном материале, а также

$$P^{(1)}(z) = A^{(1)} \cos \alpha^{(1)}(z - h^{(1)} / 2) + B^{(1)} \sin \alpha^{(1)}(z - h^{(1)} / 2); \quad \alpha^{(1)2} = k_l^{(1)2} - k^2; \quad (3)$$

$$Q^{(1)}(z) = C^{(1)} \cos \beta^{(1)}(z - h^{(1)} / 2) + D^{(1)} \sin \beta^{(1)}(z - h^{(1)} / 2); \quad \beta^{(1)2} = k_t^{(1)2} - k^2.$$

Аналогично представим решение для второго компонента

$$u_x^{(2)} = P^{(2)}(z) \exp(-ikx); \quad u_z^{(2)} = (-P^{(2)'}(z) / ik) \exp(-ikx); \quad (4)$$

$$v_x^{(2)} = (Q^{(2)})' / ik \exp(-ikx); \quad v_z^{(2)} = Q^{(2)}(z) \exp(-ikx)$$

$$(P^{(2)}(z) = A^{(2)} \cos \alpha^{(2)}(z + h^{(2)} / 2) + B^{(2)} \sin \alpha^{(2)}(z + h^{(2)} / 2); \quad \alpha^{(2)2} = k_l^{(2)2} - k^2; \quad (5)$$

$$Q^{(2)}(z) = C^{(2)} \cos \beta^{(2)}(z + h^{(2)} / 2) + D^{(2)} \sin \beta^{(2)}(z + h^{(2)} / 2); \quad \beta^{(2)2} = k_l^{(2)2} - k^2).$$

Для компонентов тензора напряжений имеем следующие выражения [8]:

$$\sigma_{xz}^{(j)} = 2\mu^{(j)} \left( P^{(j)'} + \frac{k^2 - \beta^{(j)2}}{2ik} Q^{(j)} \right) \exp(-ikx); \quad (6)$$

$$\sigma_{zz}^{(j)} = \left( \frac{\lambda^{(j)} k_l^{(j)2} + 2\mu^{(j)} \alpha^{(j)2}}{ik} P^{(j)} + 2\mu^{(j)} Q^{(j)'} \right) \exp(-ikx).$$

На границах раздела слоев (при  $x=0$ , рис. 1) для  $U_z^{(j)} = u_z^{(j)} + v_z^{(j)}$ ,  $\sigma_{xz}^{(j)}$  и  $\sigma_{zz}^{(j)}$  в случае полного проскальзывания должны выполняться следующие условия контакта:

$$U_z^{(1)}(0) = U_z^{(2)}(0); \quad \sigma_{zz}^{(1)}(0) = \sigma_{zz}^{(2)}(0); \quad \sigma_{xz}^{(1)}(0) = 0; \quad \sigma_{xz}^{(2)}(0) = 0, \quad (7)$$

а также условия периодичности

$$U_z^{(1)}(h^{(1)}) = U_z^{(2)}(-h^{(2)}); \quad \sigma_{zz}^{(1)}(h^{(1)}) = \sigma_{zz}^{(2)}(-h^{(2)}); \quad (8)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)}(h^{(1)}) = 0; \quad \sigma_{xz}^{(2)}(-h^{(2)}) = 0.$$

Подставляя выражения для перемещений (2), (4) и напряжений (6) в условия контакта (7) и периодичности (8), получаем систему восьми уравнений относительно постоянных  $A^{(1)}, B^{(1)}, \dots, D^{(2)}$ , которые распадаются на две группы, характеризующие соответствующие виды волн.

**1. Квазипоперечная волна** ( $A^{(1)} = D^{(1)} = A^{(2)} = D^{(2)} = 0$ ). Для такой волны продольные смещения антисимметричны относительно средин слоев, а поперечные – симметричны. В этом случае условия контакта (7) и периодичности (8) совпадают; тогда для определения постоянных  $B^{(1)}, C^{(1)}, B^{(2)}$  и  $C^{(2)}$  получим уравнения

$$B^{(1)} \alpha^{(1)} \cos \frac{\alpha^{(1)} h^{(1)}}{2} - C^{(1)} ik \cos \frac{\beta^{(1)} h^{(1)}}{2} - B^{(2)} \alpha^{(2)} \cos \frac{\alpha^{(2)} h^{(2)}}{2} + C^{(2)} ik \cos \frac{\beta^{(2)} h^{(2)}}{2} = 0;$$

$$B^{(1)} (\lambda^{(1)} k_l^{(1)2} + 2\mu^{(1)} \alpha^{(1)2}) \sin \frac{\alpha^{(1)} h^{(1)}}{2} - C^{(1)} 2ik \mu^{(1)} \beta^{(1)} \sin \frac{\beta^{(1)} h^{(1)}}{2} +$$

$$+ B^{(2)} (\lambda^{(2)} k_l^{(2)2} + 2\mu^{(2)} \alpha^{(2)2}) \sin \frac{\alpha^{(2)} h^{(2)}}{2} - C^{(2)} 2ik \mu^{(2)} \beta^{(2)} \sin \frac{\beta^{(2)} h^{(2)}}{2} = 0;$$

$$B^{(1)} 2ik \alpha^{(1)} \cos \frac{\alpha^{(1)} h^{(1)}}{2} + C^{(1)} (k^2 - \beta^{(1)2}) \cos \frac{\beta^{(1)} h^{(1)}}{2} = 0;$$

$$B^{(2)} 2ik\alpha^{(2)} \cos \frac{\alpha^{(2)}h^{(2)}}{2} + C^{(2)}(k^2 - \beta^{(2)^2}) \cos \frac{\beta^{(2)}h^{(2)}}{2} = 0.$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, получаем дисперсионное уравнение, определяющее волновое число  $k$ , а следовательно, и скорость распространения волны  $c = \omega/k$  при произвольных значениях параметров слоев, т.е.

$$\begin{aligned} & \alpha^{(2)}\mu^{(1)}k_i^{(2)^2} \left(2k^2 - k_i^{(1)^2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha^{(1)}h^{(1)}}{2} + \alpha^{(1)}\mu^{(2)}k_i^{(1)^2} \left(2k^2 - k_i^{(2)^2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha^{(2)}h^{(2)}}{2} + \\ & + 4k^2\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \left( \beta^{(1)}\mu^{(1)}k_i^{(2)^2} \operatorname{tg} \frac{\beta^{(1)}h^{(1)}}{2} + \beta^{(2)}\mu^{(2)}k_i^{(1)^2} \operatorname{tg} \frac{\beta^{(2)}h^{(2)}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

**2. Квазипродольная волна** ( $B^{(1)} = C^{(1)} = B^{(2)} = C^{(2)} = 0$ ). В этом случае, как видно из (3) и (5), продольные смещения симметричны относительно средин слоев, а поперечные – антисимметричны. Поэтому, если усреднить перемещения по периоду структуры, то волна такого типа будет продольной. По аналогии с предыдущим случаем, получаем для данной волны дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & \left( \alpha^{(2)}\mu^{(1)}k_i^{(2)^2} \left(2k^2 - k_i^{(1)^2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha^{(2)}h^{(2)}}{2} + \alpha^{(1)}\mu^{(2)}k_i^{(1)^2} \left(2k^2 - k_i^{(2)^2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha^{(1)}h^{(1)}}{2} \right) \times \\ & \times \operatorname{tg} \frac{\beta^{(1)}h^{(1)}}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta^{(2)}h^{(2)}}{2} + 4k^2\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \operatorname{tg} \frac{\alpha^{(1)}h^{(1)}}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha^{(2)}h^{(2)}}{2} \times \\ & \times \left( \beta^{(1)}\mu^{(1)}k_i^{(2)^2} \operatorname{tg} \frac{\beta^{(2)}h^{(2)}}{2} + \beta^{(2)}\mu^{(2)}k_i^{(1)^2} \operatorname{tg} \frac{\beta^{(1)}h^{(1)}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что фазовые скорости распространения поперечной и продольной волн для произвольных значений параметров слоев определяются при численном решении, соответственно, уравнений (9) и (10).

### 3. Числовые результаты и их анализ.

Как отмечено выше, в [8], в частности, получены дисперсионные уравнения для квазипродольных и квазипоперечных волн при полном контакте слоев. В статье [21] проведено их численное решение, где результаты представлены только для нулевых мод при различных отношениях модулей сдвига.

Отметим, что автором настоящей статьи проведено численное решение указанных дисперсионных уравнений из работы [8], а также аналогичных им уравнений (9) и (10), полученных в данной работе при проскальзывании слоев. Результаты расчетов представлены в виде зависимости безразмерной скорости распространения волн  $c/c_i^{(2)}$  от приведенной частоты  $\bar{h} = k_i^{(2)}h^{(2)}$  для первых пяти мод (0–4).

Решение всех волновых уравнений проведено при одних и тех же параметрах. Принято, что материал первого слоя – сталь 09Г2С, а второго – оргстекло. Их упругие постоянные даны в [3]. Отношение слоев принято следующим:  $h^{(2)}/h^{(1)} = 1$ .

Поскольку полный контакт – это наиболее жесткое соединение, а полное проскальзывание – наиболее мягкое соединение между слоями, то из соображений физического характера, следует, что результаты исследований при всех остальных граничных условиях должны находиться между результатами для этих крайних случаев.

Таким образом, если сопоставить соответствующие дисперсионные кривые при идеальном контакте и проскальзывании, то можно определить область решений дисперсионного уравнения, полученного при различных условиях контакта между слоями.

На рис. 2 – 6 представлены результаты сравнения первых пяти мод для поперечных волн. Сплошные линии соответствуют полному контакту, а штриховые – проскальзыванию.

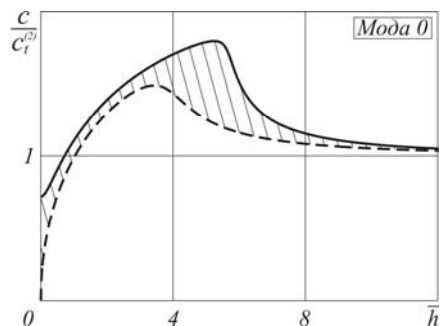


Рис. 2

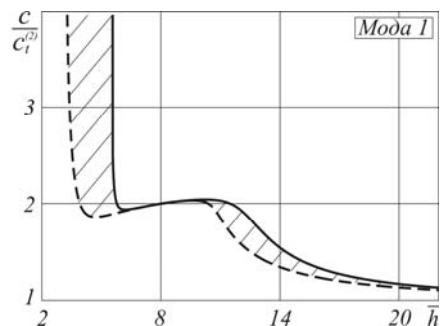


Рис. 3

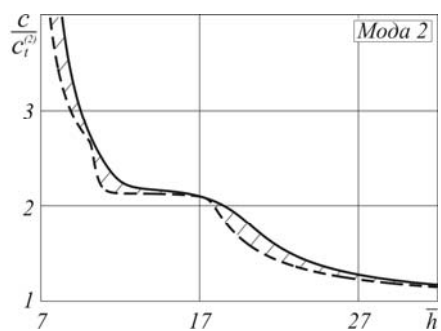


Рис. 4

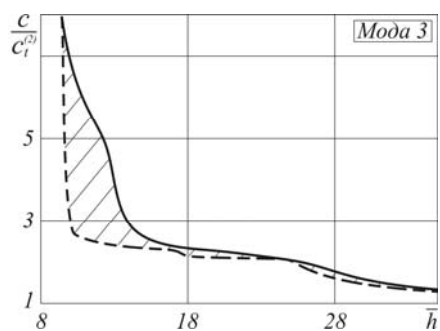


Рис. 5

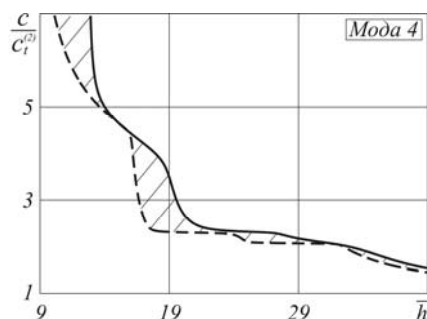


Рис. 6

На рис. 7 – 12 показано сопоставление соответствующих дисперсионных кривых для первых пяти мод квазипродольных волн.

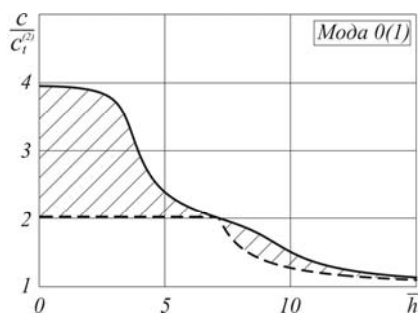


Рис. 7

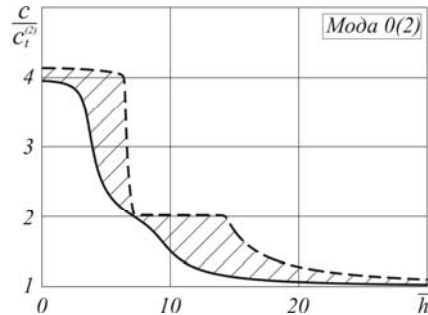


Рис. 8

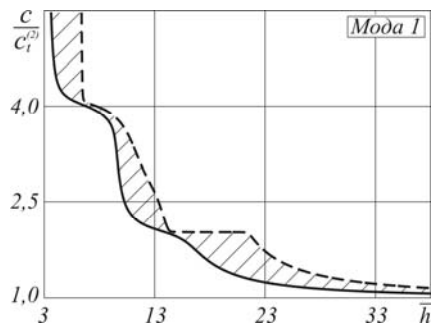


Рис. 9

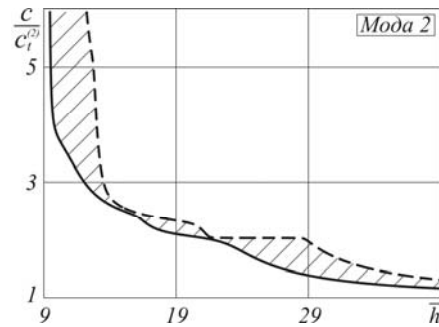


Рис. 10

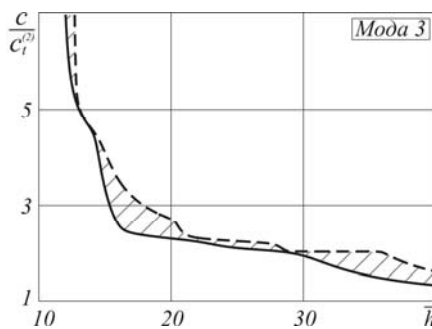


Рис. 11

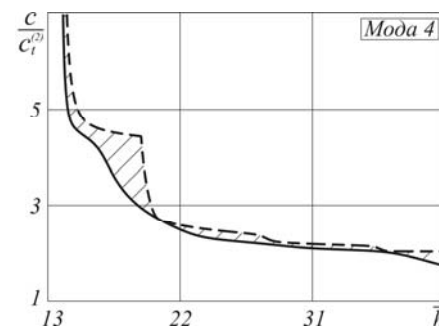


Рис. 12

Отметим, что для квазипродольной волны при проскальзывании слоев существует две нулевые моды, для которых на рис. 7, 8 дано сравнение с нулевой модой при полном контакте слоев.

#### Выводы.

На основе анализа полученных результатов, можно сформулировать следующие закономерности:

- 1) в широком диапазоне частот отличие результатов для полного контакта и проскальзывания незначительное;
- 2) в достаточно узких областях (вблизи частот зарождения волн) наблюдается существенное отличие между результатами.

Эти закономерности также подтверждаются соображениями физического характера, так как волны при зарождении имеют бесконечные скорости, а частоты зарождения волн при полном контакте и проскальзывании являются различными. Поскольку такого рода анализ в литературе отсутствует, то обнаруженные закономерности можно рассматривать как новый механический эффект.

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено поширення квазіпоперечних та квазіпоздовжніх хвиль вздовж шарів композитного матеріалу. Композит складається з двох шарів, що чергуються, між якими реалізується повне проковзування. Отримано дисперсійні рівняння для вказаних хвиль та проведено числове дослідження одержаних хвильових рівнянь, а також аналогічних дисперсійних рівнянь, отриманих для повного контакту шарів. Результати досліджень представлено у вигляді залежностей безрозмірної швидкості поширення хвиль від приведеної частоти. Для кожного типу хвиль проведено зіставлення відповідних дисперсійних кривих (мод), які отримано при проковзуванні та при повному контакті. На основі такого порівняння проведено аналіз швидкостей поширення хвиль у шаруватих середовищах при різних граничних умовах.

1. Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Жук А.П. Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 4. – С. 3 – 23.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: «А.С.К.», 2004. – 672 с.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 1. – С. 35 – 78.
5. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2-х т. – К.: Наук. думка, 1986 (Т. 1 – 374 с., Т. 2 – 536 с.).
6. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
7. Ле Минь Кхань. Распространение волн вдоль слоев в слоистых сжимаемых материалах с начальными деформациями // Прикл. механика. – 1977. – 13, № 9. – С. 21 – 26.
8. Рытов С.М. Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. журнал. – 1956. – 2, № 1 (68). – С. 71 – 83.
9. Akbarov S.D. Recent Investigations on Dynamic Problems for an Elastic Body with Initial (Residual) Stresses (Review) // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 12. – P. 1305 – 1324.
10. Akbarov S.D., Guliev M.S., Kerpeler T. Propagation of axisymmetric waves in an initially twisted circular compound bimaterial cylinder with a soft inner and a stiff outer constituents // Mech. Comp. Mater. – 2011. – 46, N 6. – P. 627 – 638.
11. Bigoni D., Gei M., Movchan A.B. Dynamics of a prestressed stiff layer on an elastic half space: filtering and band gap characteristics of periodic structural models derived from long-wave asymptotics // J. Mech. Physics Solids. – 2008. – 56. – P. 2494 – 2520.
12. Brun M., Guenneau S., Movchan A.B., Bigoni D. Dynamics of structural interfaces: Filtering and focussing effects for elastic waves // J. Mech. Physics Solids. – 2010. – 58. – P. 1212 – 1224.
13. Gei M., Bigoni D., Franceschini G. Thermoelastic small-amplitude wave propagation in nonlinear elastic multilayers // Math. and Mech. of Solids. – 2004. – 9. – P. 555 – 568.
14. Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M. Diffraction of a Plane Discontinuous Wave in Layered Anisotropic Elastic Media // Mech. Comp. Mater. – 2003. – 39, № 1. – P. 27 – 36.
15. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Zayets Yu.A. Shielding of Elastic Nonstationary Waves by Interfaces // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 4. – P. 414 – 422.
16. Guz A.N., Rushitsky J.J. Short Introduction to Mechanics of Nano-composites. – Rosemead: Scien. and Academic Publishers. – 2013. – 280 p.
17. Panasjuk O.N. Propagation of Quasishear Waves in Prestressed Materials with Unbonded Layers // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 3. – P. 276 – 282.
18. Rogerson G.A., Sandiford K. J. Flexural waves in incompressible prestressed elastic composites // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1997. – 50, N 4. – P. 597.
19. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Application of Weakly Anisotropic Models of a Continuous Medium for Solving the Problems of Wave Dynamics // Appl. Mech. Rev. – 2000. – 53, N 3. – P. 37 – 86.
20. Sharma M.D. Effect of initial stress on reflection at the free surface of anisotropic elastic medium // J. Earth Syst. Sci. – 2007. – 116, N 6 – P. 537 – 551.
21. Sun C.T., Achenbach J.D., Herrmann G. Time-harmonic waves in a stratified medium propagating in the direction of the layering // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1968. – 35, N. 2. – P. 408 – 411.
22. *Waves in Nonlinear Pre-Stressed Materials* / M. Destrade and G. Saccomandi (Eds.) – New York: Springer, 2007. – 287 p.

Поступила 27.01.2012

Утверждена в печать 03.12.2013