

А. Я. Григоренко¹, И. А. Лоза²

**ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГО ШАРА
ИЗ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО
МАТЕРИАЛА ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СПОСОБЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ**

*¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com*

*²Национальный транспортный университет,
ул. Омеляновича-Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: dukeigor@i.ua*

Abstract. A problem of the axisymmetric forced vibrations of the hollow sphere made of functionally graded piezoceramic material which is polarized in the radial direction is solved based on spatial theory electroelasticity. The properties of the material are changing continuously along a radial coordinate according to the power law. The forced vibrations are excited through the application of the variable electrostatic potential over the surface of the sphere. The cases of continuous and cutting electrodes are considered. After separation of variables and representation of the components of the vector electrical and mechanical displacements, the electrostatic potential, and the stress tensor in terms of spherical functions, the initially three-dimensional problem is reduced to a boundary problem for the ordinary differential equations. This problem is solved by a stable discrete-orthogonalization technique. The results of the numerical solving the problem are shown. In particular, the comparative analysis of the distribution of electrical and mechanical parameters in the first modes of the forced aeroelastic vibrations for the cases of homogeneous and inhomogeneous materials. The influence of the character of loading the variable electrostatic potential over the surface of the sphere on the distribution of the characteristic of the sphere forced vibrations is also studied.

Key words: 3D electroelasticity, nonhomogeneity piezoelectric sphere, FGPM, axisymmetric force vibration, different electric excitation.

Введение.

Активные пьезоэлектрические трансформаторы сферической формы широко используются в различных современных акустоэлектрических устройствах, например, при создании различных гидроакустических приборов [2, 3, 11]. Таким образом, как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения, изучение колебательных процессов в пьезокерамических телах сферической формы является актуальной проблемой электроупругости.

Впервые свободные радиальные колебания однородной изотропной сферы изучено в [31]. Общую пространственную задачу о колебаниях сферы рассмотрено в [23], где построены решения аналогичной задачи в сферических координатах и предложена классификация форм колебаний. Свободные и вынужденные колебания толстостенных сферических оболочек, а также поверхностные волны Рэлея на сферической поверхности были впервые изучены в работах [10, 24, 26] на основании метода сферических векторов. Неосесимметричные колебания сплошного шара были рассмотрены в [29], а для полого – в [30]. Вышеотмеченные исследования проводились для случая однородного изотропного материала шара. Анизотропия существенно усложняет задачу. Исследование собственных колебаний однородной трансверсально-изотропной сферы выполнено в работе [32]. Еще одним фактором, который усложняет построения решения задач о колебаниях тел сферической формы, является неоднородность мате-

риала сферы. В случае слоистой структуры материала возникает необходимость в удовлетворении не только граничных условий на поверхностях, ограничивающих тело, но и на поверхностях раздела слоев. Это приводит к увеличению количества уравнений разрешающей системы [9, 15 – 17]. Еще одним из факторов, которые усложняют исследования, является наличие физических полей, связанных с полем механических перемещений и напряжений [7, 8, 12, 13, 18]. Отметим исследования свободных осесимметричных колебаний однородной сферы из пьезокерамических материалов, проведенные с помощью применения различных аналитических подходов [5, 27, 28].

В настоящее время все более широкое применение имеют так называемые функционально-градиентные пьезоэлектрические материалы, сочетающие преимущества биморфов и лишенные проблемной зоны – поверхности соединения материалов с различными коэффициентами температурного расширения. Попытка учесть непрерывно изменяющиеся свойства материала приводит к тому, что модули материала являются не константами, а функциями по одной из координат [1, 4, 6 – 8, 12, 18, 19, 22 и др.]. Это является серьезной проблемой для применения многих численных методов. Для решения указанной задачи получил развитие предложенный авторами численно-аналитический подход, основанный на применении метода дискретной ортогонализации, который ранее был эффективно применен при исследовании широкого класса задач теории упругости, теории оболочек и электроупругости [14 – 17, 20 – 22, 33].

Исследование свободных колебаний однородной и непрерывно-неоднородной полый сферы с применением указанного подхода было проведено в [22, 33]. Вопрос о напряженно-деформированном состоянии полый сферы, изготовленной из функционально-градиентного пьезокерамического материала, на основе трехмерной теории электроупругости рассмотрен в [7]. В данном сообщении решается задача о вынужденных колебаниях пьезокерамического полого шара, материал которого поляризован в радиальном направлении и является непрерывно-неоднородным на основе трехмерной теории электроупругости.

1. Постановка задачи и основные соотношения.

1.1. Уравнения движения. Пусть тело, ограниченное со всех сторон кусочно-гладкой поверхностью, характеризуется сплошным замкнутым полем тензора \mathbf{T} напряжений, который является дифференцируемой функцией точки поля и кусочно-непрерывной на граничной поверхности. Будем считать вектор \mathbf{u} смещений любой точки тела функцией времени и трех пространственных координат этой точки. Примем, что ρ – плотность материала, $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ и дивергенция тензора напряжений $\nabla \cdot \mathbf{T}$ являются непрерывными функциями внутри объема тела. Рассматриваем случай отсутствия массовых сил.

Если векторный элемент граничной поверхности \mathbf{s} , направленный наружу от ограничиваемого этой поверхностью объема V тела, обозначить через $d\mathbf{s}$, то вектор внешней элементарной силы, приложенный к данному элементу поверхности, представится в виде скалярного произведения $d\mathbf{s} \cdot \mathbf{T}$. Обозначая элемент объема через dV , составим на основе принципа Даламбера такое уравнение:

$$\int_{\mathbf{s}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{T} - \int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = 0. \quad (1)$$

Применяя к первому интегралу формулу Остроградского, получаем

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) dV = 0. \quad (2)$$

Так как это равенство должно выполняться для любой части тела, получаем следующую зависимость:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3)$$

В координатном представлении уравнение (3) распадается на три уравнения следующего вида:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}T^{ij})}{\partial x^i} + T^{kj}\Gamma_{ki}^j = \rho \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} \quad (j = 1; 2; 3). \quad (4)$$

Здесь введены обозначения: $\sqrt{g} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – некопланарные, неортогональные масштабные векторы, модули которых, вообще говоря, отличны от единицы; Γ_{ki}^j – символы Кристоффеля. Все компоненты тензорных и векторных величин здесь отнесены к основной метрике координатной системы. Если их представить в единичной системе измерений, то получим такие уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(T^{ij} \sqrt{\frac{g}{g_{ii} g_{jj}}} \right) + \sum_{k,i} \frac{T^{ki} \Gamma_{ki}^j}{\sqrt{g_{kk} g_{ii}}} = \frac{\rho}{\sqrt{g_{jj}}} \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} \quad (j = 1; 2; 3). \quad (5)$$

Здесь $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ – компоненты метрического тензора, знаками сумм указывается, по каким значением индексов должно выполняться суммирование. Для случая ортогональной сферической системы координат (r, θ, φ) , уравнения (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \rho \omega^2 u_r &= 0; \\ \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{3T_{r\theta} + (T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \rho \omega^2 u_\theta &= 0; \\ \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{3T_{r\varphi} + 2T_{\theta\varphi} \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \rho \omega^2 u_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

1.2. Уравнения Максвелла для пьезоэлектрического вещества. Все процессы в сплошной среде, относящиеся к макроскопической электродинамике, описываются уравнениями Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} – векторы напряженности электрического и магнитного поля соответственно; \mathbf{j} – вектор тока проводимости; ρ_e, ε_0, c – постоянные значения плотности электрического заряда, диэлектрической проницаемости и скорости света в вакууме. Эти уравнения впервые сформулированы Дж. К. Максвеллом и являются обобщением накопившихся к тому времени экспериментальных данных. Первое уравнение выражает закон Гаусса. Физический смысл уравнения – поток вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через замкнутую поверхность пропорционален электрическому заряду ρ_e внутри нее. Закон Гаусса справедлив как в динамических, так и статических полях, поскольку не содержит производных по времени. Второй уравнение – это закон Фарадея. Его физический смысл – интеграл от вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} по замкнутому контуру пропорционален скорости изменения потока вектора напряженности магнитного поля \mathbf{B} сквозь этот контур. Третье уравнение свидетельствует о том, что пьезоэлектрическое вещество не содержит магнитных зарядов (в отличие от электрических). В четвертое уравнение Максвелл кроме известного закона Ампера $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \varepsilon_0$ (для постоянного магнитного поля) добавил еще $\partial \mathbf{E} / \partial t$ так называемый ток смещения, правильность чего было впоследствии под-

тверждена экспериментальными данными. Физический смысл этого уравнения: интеграл от вектора напряженности магнитного поля \mathbf{B} по замкнутому контуру пропорционален электрическому току в этом контуре, а также скорости изменения потока вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через этот контур. Второе и четвертое уравнения отражают тот факт, что в случае динамического поля электрическое и магнитное поля связаны друг с другом. Однако скорость изменения полей должна быть очень высокой – сравнимой со скоростью света. В случае акустических движений, скорости значительно ниже и электрическое и магнитное поля существуют отдельно. Рассмотрим электрическое поле, поскольку в пьезоэлектрическом материале именно оно связано с полем механическим. Кроме того, в пьезоэлектрическом материале отсутствуют свободные электрические заряды, таким образом, для пьезоэлектрического материала имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (8)$$

Для слабых электрических полей вектор электрической индукции \mathbf{D} пропорционален вектору напряженности электрического поля \mathbf{E} – $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, где ε – диэлектрическая проницаемость пьезоэлектрической среды. Второе из уравнений (8) указывает на то, что электрическое поле потенциально. Окончательно будем иметь:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0; \mathbf{E} = -\nabla \Phi, \quad (9)$$

где Φ – электростатический потенциал.

Записывая эти выражения в координатной форме, получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = g^{ij} \frac{\partial D_i}{\partial x^j} = 0; \quad E^i = -e^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \quad (10)$$

Для случая сферической системы координат (r, ϑ, φ) , уравнения (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2}{r} D_r + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} D_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} &= 0; \\ E_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (11)$$

1.3. Соотношения Коши. В случае малых деформаций

$$2\mathbf{S} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla. \quad (12)$$

Здесь \mathbf{S} – тензор упругих деформаций. В координатной форме:

$$2S_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - u_k \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_n \Gamma_{ji}^n. \quad (13)$$

Для случая сферической системы координат (r, θ, φ) , уравнения (12) принимают вид

$$\begin{aligned} S_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r + u_\theta \cot \theta \right); \quad S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \\ 2S_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right); \quad 2S_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right); \\ 2S_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot \theta \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь S_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для радиально поляризованной пьезокерамической среды в сферической системе координат (r, θ, φ) запишем в виде [3, 7]

$$\begin{aligned}
T_{\theta\theta} &= c_{11}(r)S_{\theta\theta} + c_{12}(r)S_{\varphi\varphi} + c_{13}(r)S_{rr} - e_{31}(r)E_r; \\
T_{\varphi\varphi} &= c_{12}(r)S_{\theta\theta} + c_{11}(r)S_{\varphi\varphi} + c_{13}(r)S_{rr} - e_{31}(r)E_r; \\
T_{rr} &= c_{13}(r)S_{\theta\theta} + c_{13}(r)S_{\varphi\varphi} + c_{33}(r)S_{rr} - e_{33}(r)E_r; \quad T_{r\theta} = 2c_{44}(r)S_{r\theta} - e_{15}(r)E_\theta; \\
T_{r\varphi} &= 2c_{44}(r)S_{r\varphi} - e_{15}(r)E_\varphi; \quad T_{\theta\varphi} = 2c_{66}(r)S_{\theta\varphi}; \quad D_\theta = 2e_{15}(r)S_{r\theta} + \varepsilon_{11}(r)E_\theta; \\
D_\varphi &= 2e_{15}(r)S_{r\varphi} + \varepsilon_{11}(r)E_\varphi; \quad D_r = e_{31}(r)S_{\theta\theta} + e_{31}(r)S_{\varphi\varphi} + e_{33}(r)S_{rr} + \varepsilon_{33}(r)E_r,
\end{aligned} \tag{15}$$

где c_{ij} – упругие модули при постоянной электрической напряженности; e_{ij} – пьезомодули; ε_{ij} – диэлектрические модули при постоянной деформации. В отличие от однородного материала, указанные выше компоненты физических свойств материала являются функциями радиальной координаты. Рассмотрим материал, состоящий из двух компонент – стали и пьезокерамики. Тогда характеристики материала изменяются следующим образом по толщине:

$$P(r) = (P_m - P_p)V(r) + P_p, \tag{16}$$

где $V(z)$ выражает объёмную долю керамики и определяется формулой:

$$V(r) = \left(\frac{r - R_0}{2h} + \frac{1}{2} \right)^n. \tag{17}$$

2. Метод решения задачи.

Как известно, система дифференциальных уравнений в частных производных, которая описывает задачу о неосесимметричных колебаниях шара, может быть сведена к двум независимым подсистемам, которые описывают колебания первого и второго классов. Причем колебания первого класса суть чисто упругие колебания, в отличие от колебаний второго класса, которые являются связанными электроупругими. Кроме того, система уравнений, которая описывает колебания второго класса, полностью совпадает с системой уравнений, которые описывает осесимметричные электроупругие колебания пьезокерамического шара. Запишем эти уравнения. Для этого в уравнениях (6), (11), (14) и (15) положим $\partial u_r / \partial \varphi = \partial u_\theta / \partial \varphi = \partial \Phi / \partial \varphi = 0$; $u_\varphi = 0$;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \rho \omega^2 u_r &= 0; \\
\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3T_{r\theta} + (T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cot \theta}{r} + \rho \omega^2 u_\theta &= 0; \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_r}{\partial \theta} + \frac{2D_r + D_\theta \cot \theta}{r} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \\
S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} (u_r + u_\theta \cot \theta); \quad 2S_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right);
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
T_{\theta\theta} &= c_{11}S_{\theta\theta} + c_{12}S_{\varphi\varphi} + c_{13}S_{rr} - e_{31}E_r; & T_{\varphi\varphi} &= c_{12}S_{\theta\theta} + c_{11}S_{\varphi\varphi} + c_{13}S_{rr} - e_{31}E_r; \\
T_{rr} &= c_{13}S_{\theta\theta} + c_{13}S_{\varphi\varphi} + c_{33}S_{rr} - e_{33}E_r; & T_{r\theta} &= 2c_{44}S_{r\theta} - e_{15}E_\theta; & D_\theta &= 2e_{15}S_{r\theta} + \varepsilon_{11}E_\theta; \\
D_r &= e_{31}S_{\theta\theta} + e_{31}S_{\varphi\varphi} + e_{33}S_{rr} + \varepsilon_{33}E_r.
\end{aligned}$$

Для получения однозначного решения систему (18) необходимо дополнить граничными условиями на боковых поверхностях шара (при $r = \text{const}$)

$$\begin{aligned}
T_{rr}|_{r=R_-} &= f_1(\theta); & T_{r\theta}|_{r=R_-} &= f_2(\theta); & \Phi|_{r=R_-} &= f_3(\theta); \\
T_{rr}|_{r=R_+} &= f_4(\theta); & T_{r\theta}|_{r=R_+} &= f_5(\theta); & \Phi|_{r=R_+} &= f_6(\theta).
\end{aligned} \tag{19}$$

Разрешающий вектор выбираем смешанного типа:

$$\mathbf{R} = \{T_{rr}, T_{r\theta}, \Phi, u_r, u_\theta, D_r\}^T. \tag{20}$$

Решая систему (18) относительно разрешающего вектора, после ряда преобразований получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} T_{rr} \\ T_{r\theta} \\ \Phi \\ u_r \\ u_\theta \\ D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r}(\beta-1) & -\frac{1}{r}\Delta_\theta & 0 & -(2\frac{\delta_1}{r^2} + \rho\omega^2) & -\frac{\delta_1}{r^2}\Delta_\theta & 2\frac{\gamma}{r} \\ -\frac{\beta}{r} & -\frac{3}{r} & 0 & -\frac{\delta_1}{r^2} & -\left(\frac{\delta_2\Delta_\theta^2 + 2c_{66}}{r^2} + \rho\omega^2\right) & -\frac{\gamma}{r} \\ \frac{e_{33}}{\alpha} & 0 & 0 & -2\frac{\gamma}{r} & -\frac{\gamma}{r}\Delta_\theta & -\frac{c_{33}}{\alpha} \\ \frac{e_{33}}{\alpha} & 0 & 0 & -2\frac{\beta}{r} & -\frac{\beta}{r}\Delta_\theta & \frac{e_{33}}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{c_{44}} & -\frac{e_{15}\Delta_\theta}{rc_{44}} & -\frac{\Delta_\theta}{r} & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{e_{15}}{rc_{44}}\Delta_\theta & \frac{\delta_3}{r^2c_{44}}\Delta_\theta & 0 & 0 & -\frac{2}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{rr} \\ T_{r\theta} \\ \Phi \\ u_r \\ u_\theta \\ D_r \end{bmatrix}.$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta_\theta^* &= \frac{\partial^*}{\partial \theta} + * \text{ctg } \theta; & \Delta_\theta^2 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta_\theta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg } \theta \frac{\partial^*}{\partial \theta} - * \text{csc}^2 \theta; \\
\alpha &= c_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2; & \gamma &= (c_{13}e_{33} - c_{33}e_{31})/\alpha; & \beta &= (c_{13}\varepsilon_{33} + e_{33}e_{13})/\alpha; \\
\delta_1 &= 2(c_{13}\beta + e_{31}\gamma) - (c_{11} + c_{12}); & \delta_2 &= \delta_1/2 - c_{66}; & \delta_3 &= c_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2.
\end{aligned}$$

Учитывая замкнутость оболочки в направлении координаты θ , представим решение в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned}
T_{rr}(r, \theta) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} T_{rr}^k(r) P_k(\cos \theta); & T_{r\theta}(r, \theta) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} T_{r\theta}^k(r) \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta}; \\
\Phi(r, \theta) &= R \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^k(r) P_k(\cos \theta); & u_r(r, \theta) &= R \sum_{k=0}^{\infty} u_r^k(r) P_k(\cos \theta); \\
u_\theta(r, \theta) &= R \sum_{k=0}^{\infty} u_\theta^k(r) \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta}; & D_r(r, \theta) &= \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} D_r^k(r) P_k(\cos \theta).
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $\lambda = 10^{10} \text{ N/m}^2$, $R = (R_+ + R_-)/2$ – среднее значение радиуса шара, в дальнейшем индекс k в разрешающих функциях опускаем. С учетом представления (21) краевую задачу (18) в частных производных можно свести к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях

$$\frac{d\mathbf{R}}{dr} = \mathbf{A}\mathbf{R} \quad (22)$$

с граничными условиями:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{R}(R_-) = \mathbf{C}_1, \mathbf{B}_2\mathbf{R}(R_+) = \mathbf{C}_2. \quad (23)$$

Матрица \mathbf{A} имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{r}(1-\beta) & \frac{k(k+1)}{r} & 0 & -(2\frac{\delta_1}{r^2} + \rho\omega^2) & \frac{\delta_1 k(k+1)}{r^2} & \frac{2\gamma}{r} \\ -\frac{\beta}{r} & -\frac{3}{r} & 0 & \frac{\delta_1}{r^2} & -\left(\frac{2c_{66} + \delta_2 k(k+1)}{r^2} + \rho\omega^2\right) & -\frac{\gamma}{r} \\ \frac{e_{33}}{\alpha} & 0 & 0 & -2\frac{\gamma}{r} & \frac{\gamma k(k+1)}{r} & -\frac{c_{33}}{\alpha} \\ \frac{\varepsilon_{33}}{\alpha} & 0 & 0 & -2\frac{\beta}{r} & \frac{\beta k(k+1)}{r} & \frac{e_{33}}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{c_{44}} & -\frac{e_{15}}{rc_{44}} & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{e_{15}k(k+1)}{rc_{44}} & -\frac{\delta_3 k(k+1)}{r^2 c_{44}} & 0 & 0 & -\frac{2}{r} \end{vmatrix},$$

матрицы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 имеют вид

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а матрицы \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2

$$\mathbf{C}_1 = \begin{vmatrix} f_1(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3(\theta) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C}_2 = \begin{vmatrix} f_4(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_5(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_6(\theta) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и введены безразмерные величины: $\Omega = \omega l^* \sqrt{\rho^* / c^*}$; $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} / c^*$; $\tilde{e}_{ij} = e_{ij} / \sqrt{\varepsilon_0 c^*}$; $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} / \varepsilon_0$; c^* , ρ^* , l^* – величины, имеющие размерности упругих модулей, плотности и длины, соответственно; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Краевая задача (22), (23) интегрировалась устойчивым методом дискретной ортогонализации.

3. Численное решение задачи.

3.1. Случай неразрезных электродов. В качестве примера рассмотрим полый шар из пьезоэлектрического градиентного материала, состоящий из двух фаз пьезокерамики PZT 4 и стали ($E = 21 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,28$). Обезразмеривающие величины равны: $c^* = 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\rho^* = 1 \text{ T/m}^3$; $l^* = 1 \text{ м}$. Внутренний радиус шара R_- равен 3 см., внешний R_+ – 5 см.

Рассмотрим сначала случай однородного материала. Функции $f_i(\theta)$ выбирались следующим образом:

$$f_1(\theta) = f_4(\theta) = 0; \quad f_2(\theta) = f_5(\theta) = 0; \quad f_3(\theta) = +V_0, \quad f_6(\theta) = -V_0. \quad (24)$$

В этом случае возбуждаются электроупругие радиальные колебания

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} + T_{r\theta} \cot \theta}{r} + \rho \omega^2 u_r = 0; \quad T_{rr}|_{r=R_-, R_+} = 0. \quad (25)$$

Электрические уравнения учитываются опосредованно с помощью уравнений:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + 2 \frac{D_r}{r} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) = 0 \rightarrow r^2 D_r = D_0 = \text{const} \rightarrow D_r = \frac{D_0}{r^2}; \quad \Phi|_{r=R_-, R_+} = \pm V_0. \quad (26)$$

Решение системы (25) давно известно, оно может быть выражено через функции Бесселя. Учитывая, что при радиальных колебаниях компоненты тензора деформаций связаны со смещением ($u_r \equiv u$) следующим образом:

$$S_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad S_{\theta\theta} = S_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad (27)$$

а также, учитывая решение (28) для D_r и поставив выражения для соответствующих компонент тензора напряжений в уравнение (26), получаем уравнение для гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \left[\frac{\rho \omega^2}{c_{33}} r^2 - 2 \frac{c_{11} + c_{12} - c_{13}}{c_{33}} \right] \frac{u}{r^2} = - \frac{2e_{31} D_0}{c_{33} r^2}. \quad (28)$$

После введения новой искомой функции

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{k_1 r}} R(k_1 r), \quad (29)$$

уравнение (29) сводится к неоднородному уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + [k^2 r^2 - \nu^2] \frac{w}{r^2} = - \frac{2e_{31} D_0}{c_{33} r^2}, \quad (30)$$

где $k = \omega / c_r = \omega \sqrt{\rho / c_{33}}$; $\nu^2 = 2(c_{11} + c_{12} - c_{13}) / c_{33}$; c_r – скорость звука в направлении оси поляризации.

Решением однородного уравнения является:

$$u = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_\nu(kr), \quad (31)$$

где $\nu = \sqrt{\nu^2 + (1/4)}$; $Z_\nu = C_1 J_\nu + C_2 N_\nu$ (C_1, C_2 – константы).

Константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$\left(\alpha \frac{du}{dr} + 2\beta \frac{u}{r} = \frac{e_{33} D_0}{r^2} \right) \Big|_{r=R_-, R_+}. \quad (32)$$

Подставляя решение (31) в граничные условия (32), получим значения для C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{e_{33} D_0}{R_-^2 R_+^2} \frac{R_+^2 a_{22} - R_-^2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}; \quad C_2 = \frac{e_{33} D_0}{R_-^2 R_+^2} \frac{R_+^2 a_{11} - R_-^2 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left(2\beta - \frac{\alpha k}{2} + \alpha k\nu\right) J_\nu(kR_-) - \alpha k R_- J_{\nu+1}(kR_-); \\
 a_{12} &= \left(2\beta - \frac{\alpha k}{2} + \alpha k\nu\right) N_\nu(kR_-) - \alpha k R_- N_{\nu+1}(kR_-); \\
 a_{21} &= \left(2\beta - \frac{\alpha k}{2} + \alpha k\nu\right) J_\nu(kR_+) - \alpha k R_+ J_{\nu+1}(kR_+); \\
 a_{22} &= \left(2\beta - \frac{\alpha k}{2} + \alpha k\nu\right) N_\nu(kR_+) - \alpha k R_+ N_{\nu+1}(kR_+).
 \end{aligned}$$

Частоты собственных колебаний получаются из условия равенства нулю определителя

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (34)$$

На внешних поверхностях задается электростатический потенциал, поэтому выразим электростатический потенциал через электрическую индукцию с учетом (28)

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}} \frac{du}{dr} + \frac{2e_{13}}{\varepsilon_{33}} \frac{u}{r} - \frac{D_0}{\varepsilon_{33}r^2}. \quad (35)$$

С учетом (36) вместо уравнения (30) получим следующее выражение:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + [k_1^2 r^2 - \nu_1^2] \frac{u}{r^2} = -\frac{2e_{31}D_0}{\alpha r^3}. \quad (36)$$

Здесь $k_1 = \omega / k_{33}^2 = \omega \sqrt{\rho \varepsilon_{33} / \alpha}$; $k_{33}^2 = c_{33} + (e_{33}^2 / \varepsilon_{33})$ – статический коэффициент электромеханической связи; $\nu_1^2 = \frac{2}{\alpha} [(c_{11} + c_{12}) \varepsilon_{33} + 2e_{33}^2 - \beta \alpha]$. Как видим, когда $(e_{ij} = 0)$ $k = k_1$ и $\nu = \nu_1$. Решением однородного уравнения является

$$u_0 = A_1 j_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) + A_2 y_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r), \quad (37)$$

где $n+0,5 = \sqrt{\nu_1^2 + (1/4)}$, $j_{n+0,5}(k_1 r)$, $y_{n+0,5}(k_1 r)$ – сферические функции Бесселя первого и второго рода, а A_1, A_2 – константы. Частное решение неоднородного уравнения (36) определяется методом неопределенных множителей Лагранжа. Однако замкнутое решение в специальных функциях весьма сложно для количественного анализа и на сегодняшний день является неисследованным. К тому же для случая функционально градиентного материала получить аналитическое решение невозможно. В уравнениях (30) и (36) величины k, k_1 и ν, ν_1 не являются более постоянными величинами, а есть функции от радиальной координаты r и поэтому уравнения (30) и (36) уже не будут являться уравнениями Бесселя. Для определения собственных частот и амплитуд колебаний воспользуемся предложенным в данной работе методом.

Значения первых четырех безразмерных частот, получаемых из уравнения (34) равны 0,4685; 2,0465; 4,5559; 6,7269.

Как это не покажется странным, значения частот звуковых колебаний в плоском слое оказываются очень близкими к полученным значениям (кроме первой частоты). Эти частоты получаются из следующих формул:

$$U(2n) = \pi n \sqrt{\frac{1}{\rho_i} \left(c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}} \right)} = 0; 3,95; 7,901; \dots n = 0, 1, 2 \dots; \quad (38)$$

$$U(2n+1) = \lambda_n \sqrt{\frac{1}{\rho_i} \left(c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}} \right)} = 1,995; 6,729; \dots \quad (39)$$

Здесь λ_n ненулевые корни трансцендентного уравнения

$$\lambda \cos \lambda + \frac{e_{33}^2}{\sqrt{c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}}}} \sin \lambda = 0. \quad (40)$$

Распределение радиальных перемещений по толщине показано на рис. 1. Отметим рост числа корней функции перемещений с ростом номера оборота.

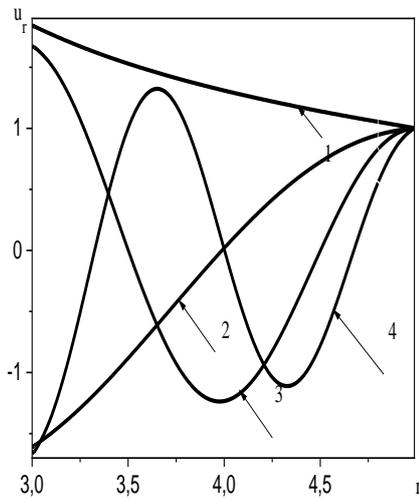


Рис. 1

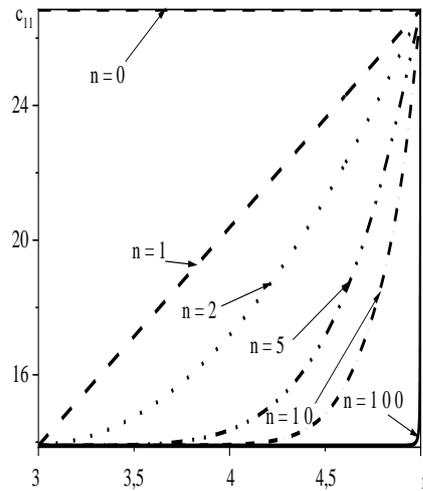


Рис. 2

Рассмотрим колебания полого шара с такими же геометрическими характеристиками из функционально градиентного пьезокерамического материала. Выражение (16) представляет собой общую формулу для физико-химических характеристик материала; P_p , P_m – соответствующие характеристики керамики и металла. Показатель степени объёмной доли керамики в формуле (17) может изменяться в пределах $0 \leq n < 1000$. При этом, если $n = 0$, то структура является полностью металлической, если же $n = \infty$, то – пьезокерамической (рис. 2).

В случае радиальных колебаний индекс полинома Лежандра равен нулю ($k = 0$). Учитывая также, что $P_0(\cos \theta) \equiv 1 = \text{const}$, тогда из формул (21) следует, что $T_{r\theta}(r, \theta) = u_\theta(r, \theta) \equiv 0$.

На рис. 3 и 4 показано распределение по толщине безразмерных амплитуд радиальных колебаний для первой собственной частоты. Сплошными линиями на рис. 3 показаны амплитуды радиальных напряжений T_{rr} , штриховыми – радиальных перемещений u_r . Толстыми линиями выделены амплитуды для случая однородного материала – пьезокерамики PZT4. Сплошными линиями на рис. 4 показаны амплитуды электростатического потенциала Φ , штриховыми – нормального к поверхности компонента электрической индукции D_r . Толстыми линиями также выделены амплитуды для случая однородного материала – пьезокерамики PZT4.

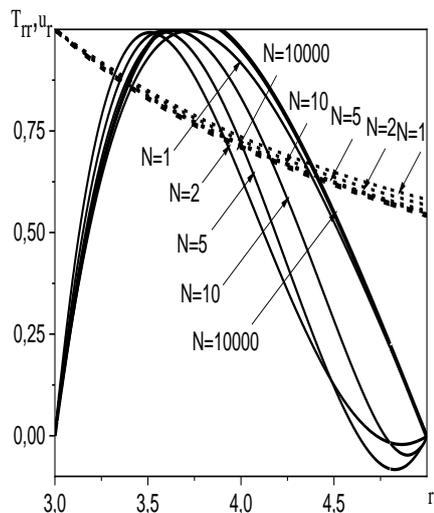


Рис. 3

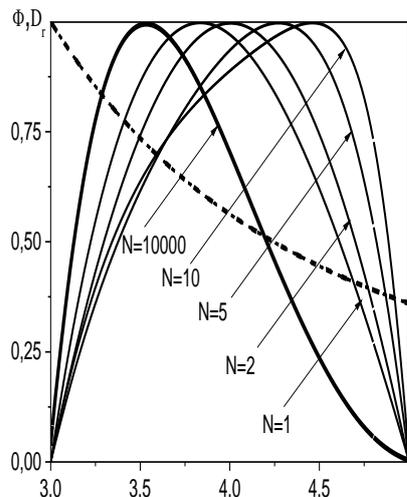


Рис. 4

Как видно из приведенных рисунков неоднородность материала больше влияет на электростатический потенциал и радиальные напряжения.

На рис. 5 и 6 представлено распределение по толщине безразмерных амплитуд радиальных колебаний для второй собственной частоты.

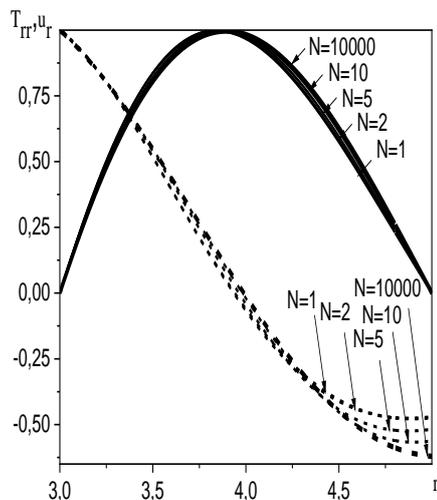


Рис. 5

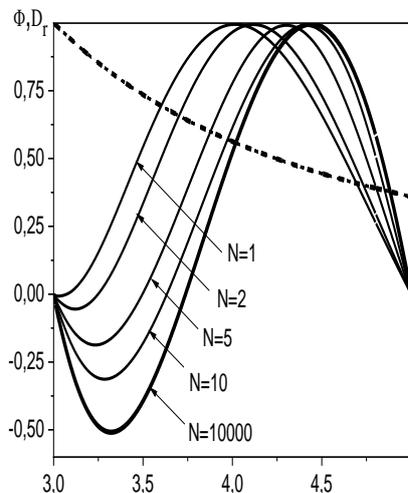


Рис. 6

В этом случае неоднородность материала больше влияет на электростатический потенциал и радиальные перемещения.

На рис. 7 и 8 представлено распределение по толщине безразмерных амплитуд радиальных колебаний для третьей собственной частоты.

В этом случае неоднородность материала больше влияет как на электростатический потенциал, так и радиальные напряжения, и перемещения. На рис. 9 и 10 представлено распределение по толщине безразмерных амплитуд радиальных колебаний для четвертой собственной частоты.

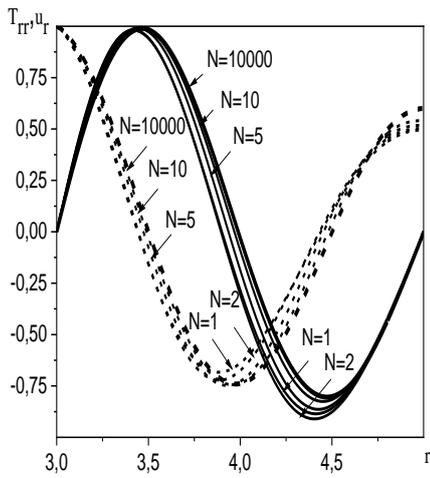


Рис. 7

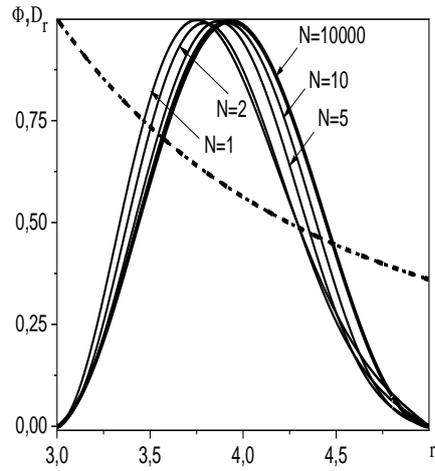


Рис. 8

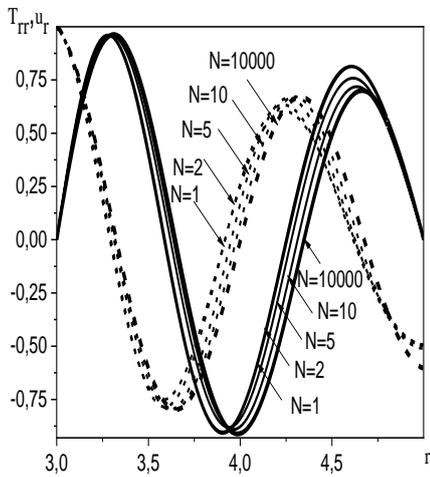


Рис. 9

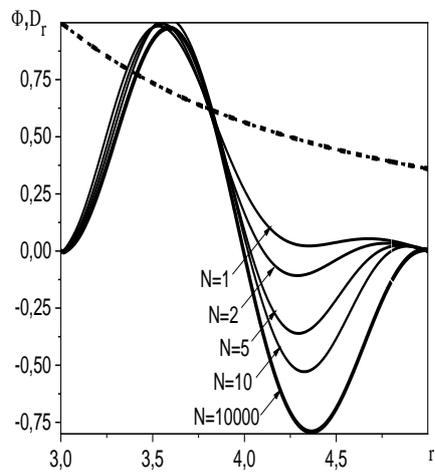


Рис. 10

В этом случае неоднородность материала больше влияет на электростатический потенциал. На рис. 11 и 12 представлено распределение по толщине безразмерных амплитуд радиальных колебаний для пятой собственной частоты.

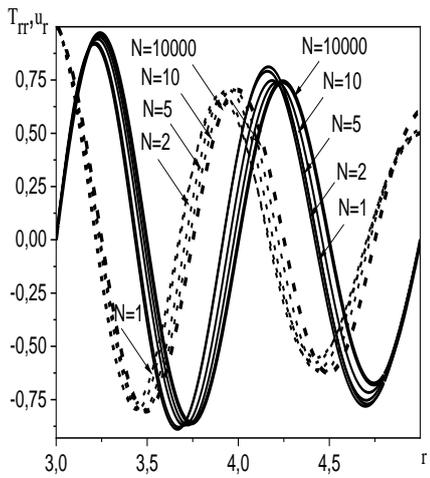


Рис. 11

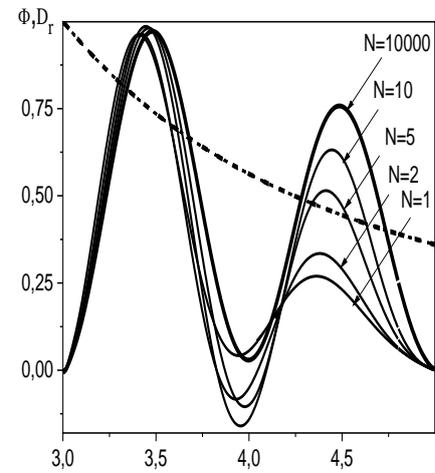


Рис. 12

В этом случае неоднородность материала больше всего влияет на электростатический потенциал. Можно также отметить рост числа нулей функций амплитуд с ростом номера обертона.

3.2. Случай разрезных электродов. Рассмотрим случай, когда поверхности шара покрыты электродами, разрезанными по линии $\theta = \pi/2$. К электродам подводится гармонический потенциал $V_0 e^{i\omega t}$ со сдвигом фаз между верхней и нижней полусферами равный $\theta = \pi/2$. При этом функции Φ^+ и Φ^- принимают следующие значения:

при $0 < \theta < \pi/2$

$$\Phi^+ = -V_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j P_j(\cos \theta); \quad \Phi^- = +V_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j P_j(\cos \theta);$$

при $0 < \theta < \pi/2$

$$\Phi^+ = +V_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j P_j(\cos \theta); \quad \Phi^- = -V_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j P_j(\cos \theta); \quad (41)$$

при $\theta = \pi/2$

$$\Phi^+ = \Phi^- = 0,$$

где α_j – коэффициенты разложения ступенчатой функции Хэвисайда по полиномам Лежандра

$$\alpha_j = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 H(y) P_j(y) dy. \quad (42)$$

Здесь

$$y = \cos \theta; \quad H(y) = \begin{cases} -1 & -1 < y < 0 \\ 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & y = 0 \end{cases}.$$

Анализ формулы (42) показывает, что коэффициенты с четными значениями индекса полинома Лежандра равны нулю. Таким образом, в рядах (41) суммирование ведется по нечетным значениям индекса полинома Лежандра.

Однако, как известно из численного анализа, при разложении разрывной функции в ряд Фурье (можем рассматривать ряд по полиномам Лежандра как обобщенный ряд Фурье) в точках разрыва возникают так называемые «колебания Гиббса». Проиллюстрируем данную ситуацию на примере удержания первых девяти членов ряда (рис. 13).

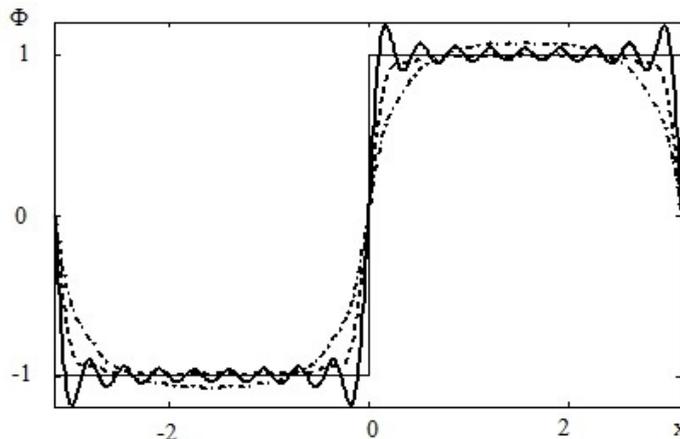


Рис. 13

Толстой сплошной линией на рисунке показано значения функции Φ при удержании первых девяти членов ряда (41). Исправить ситуацию можно с помощью метода Фейера (штрихпунктирная линия) либо с помощью множителей Ланцоша (штриховая линия) [25]. Очевидно, что использование множителей Ланцоша предпочтительней, так как получаемое при этом значение Φ быстрее выходит на решение.

Для случая, когда материал шара однородный, полученное решение сравнивалось с результатами, полученными методом разложения решения компонент разрешающего вектора в степенные ряды по радиальной координате [27]. Частоты приведены в таблице.

№ частоты	Значение собственной частоты, полученное в данной работе	Значение собственной частоты, полученное в работе [27]
1	0,4768	0,4770
2	0,7200	0,720
3	0,9325	0,932
4	1,2249	1,225
5	1,4418	1,442

Рассмотрим колебания полого шара из функционально градиентного пьезокерамического материала. На рис. 14, 15 и 16 показано распределение по толщине безразмерных амплитуд осесимметричных колебаний для первой собственной частоты ($k = 3$).

Сплошными линиями на рис. 14 показаны амплитуды радиальных перемещений u_r , штриховыми – меридиональных перемещений u_θ . Толстыми линиями выделены амплитуды для случая однородного материала – пьезокерамики PZT4. Сплошными линиями на рис. 15 показаны амплитуды нормального напряжения T_{rr} , штриховыми – тангенциального напряжения $T_{r\theta}$. Сплошными линиями на рис. 16 показаны амплитуды электростатического потенциала Φ , штриховыми – нормальной к поверхности компоненты электрической индукции D_r .

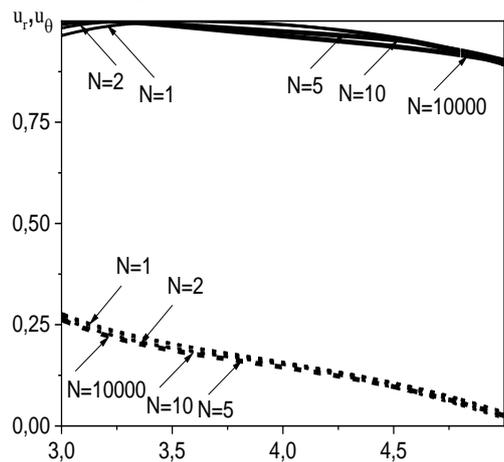


Рис. 14

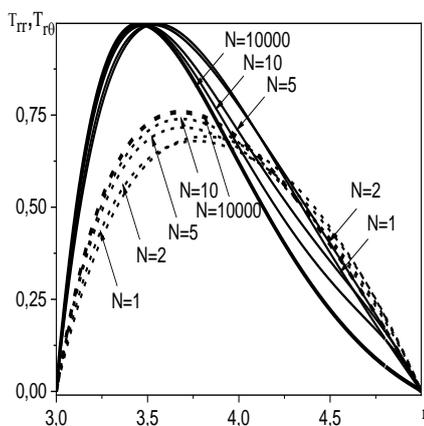


Рис. 15

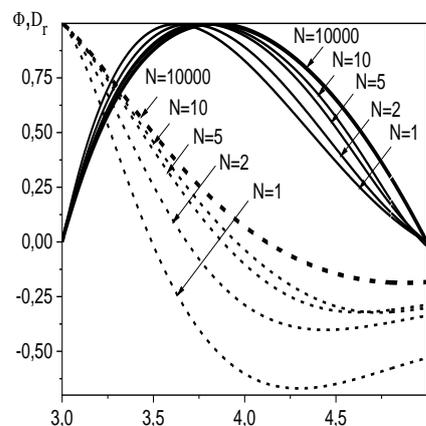


Рис. 16

Как видно из приведенных рисунков неоднородность материала в большей степени влияет на электрическую индукцию, электростатический потенциал и напряжения и в меньшей степени на перемещения.

На рис. 17, 18 и 19 показано распределение по толщине безразмерных амплитуд осесимметричных колебаний для второй собственной частоты ($k = 1$).

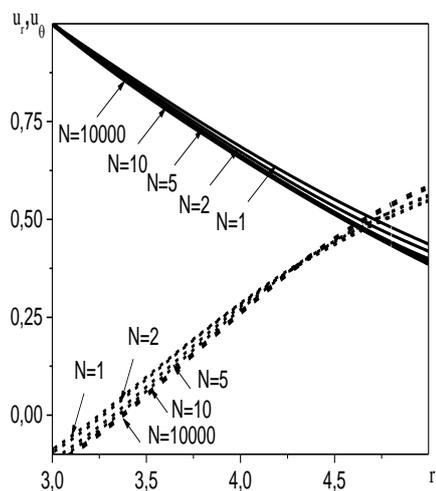


Рис. 17

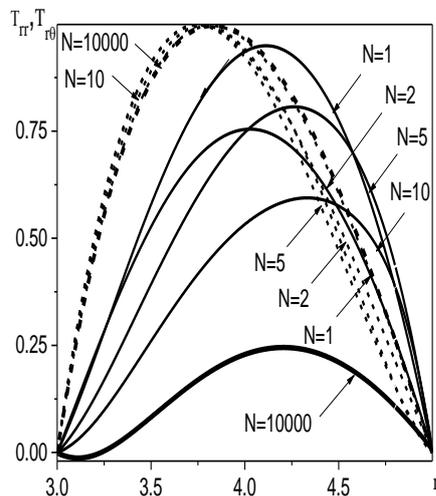


Рис. 18

Как видно из приведенных рисунков неоднородность материала в большей степени влияет на радиальные напряжения и электростатический потенциал.

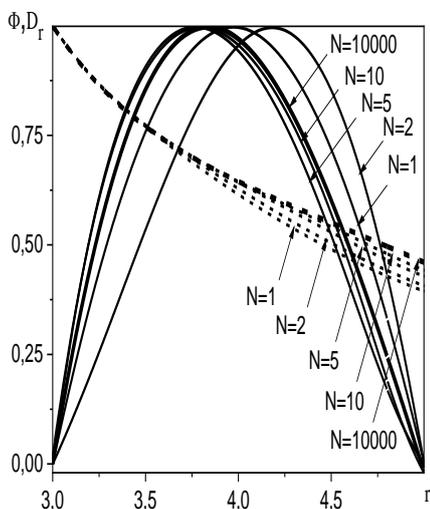


Рис. 19

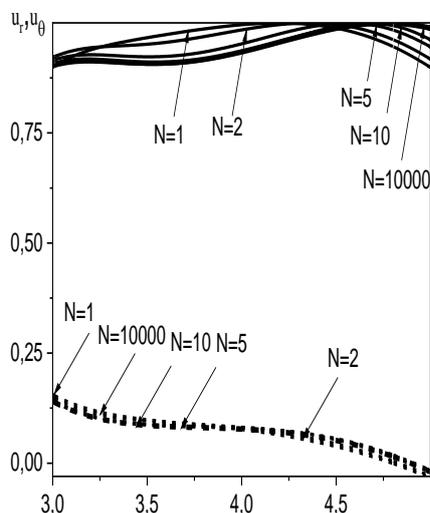
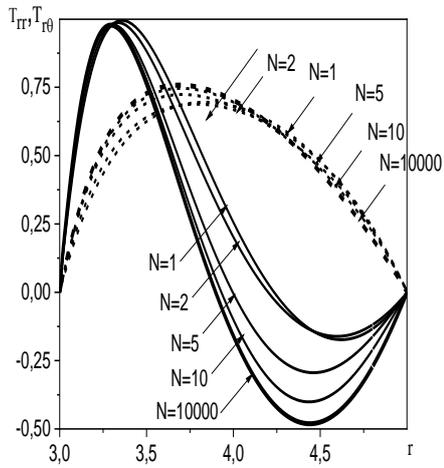


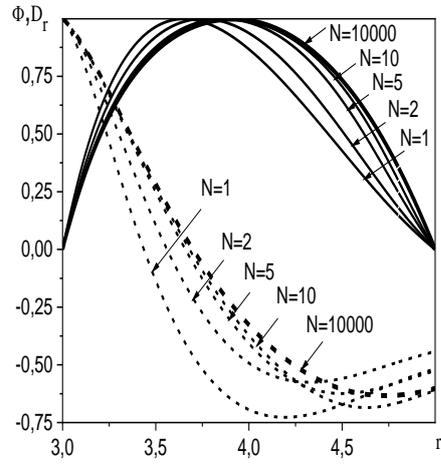
Рис. 20

На рис. 20, 21 и 22 показано распределение по толщине безразмерных амплитуд осесимметричных колебаний для третьей собственной частоты ($k = 5$).

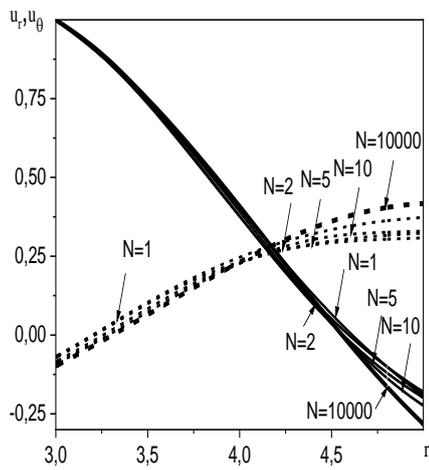
Как видно из приведенных рисунков неоднородность материала в большей степени влияет на электрическую индукцию, электростатический потенциал и радиальные напряжения.



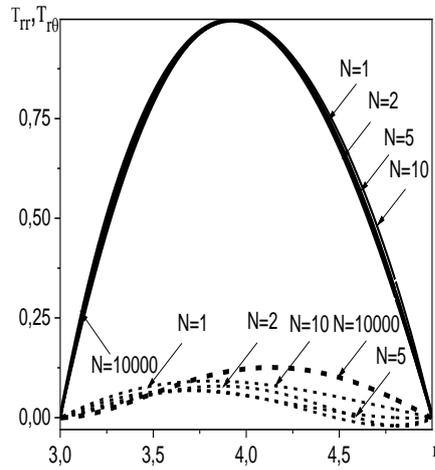
Puc. 21



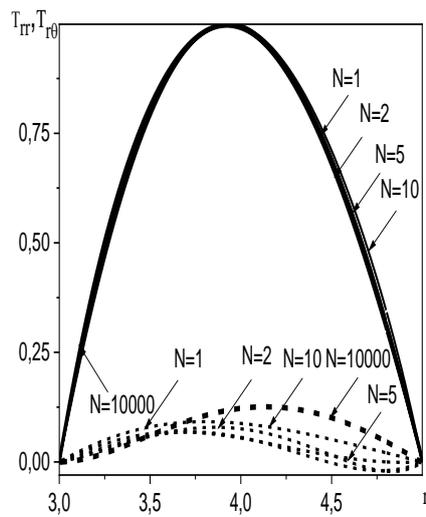
Puc. 22



Puc. 23



Puc. 24



Puc. 25

На рис. 23, 24 и 25 показано распределение по толщине безразмерных амплитуд осесимметричных колебаний для четвертой собственной частоты ($k = 3$).

Как видно из приведенных рисунков неоднородность материала в большей степени влияет на электрическую индукцию, электростатический потенциал и радиальные напряжения.

Заключение.

Проведен анализ влияния неоднородной структуры пьезокерамического шара на распределение электрических и упругих характеристик при различных способах электрического возбуждения с помощью разрезных и неразрезных электродов на основе трехмерной теории электроупругости. Численное решение поставленных задач проводилось с помощью эффективного численного метода дискретной ортогонализации. Показано, как усиливается влияние неоднородной структуры материала на поведение электроупругих характеристик при возбуждении колебаний на нескольких первых собственных частотах при указанных случаях электрического возбуждения. Также был проведен сравнительный анализ влияния электрического способа возбуждения колебаний пьезокерамического шара на поведение электрических характеристик – электрическую индукцию и электростатический потенциал и механических характеристик – перемещений и напряжений.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено осесиметричні вимушені коливання порожнистої кулі з функціонально-градієнтного п'єзоелектричного матеріалу, поляризованого у радіальному напрямі на основі просторової теорії електропружності. Властивості матеріалу неперервно змінюються у радіальному напрямі за степеневим законом. Вимушені коливання збуджуються за допомогою змінного електростатичного потенціалу на поверхні кулі. Розглянуто випадки суцільних та розрізних електродів. Після розділення змінних та представлення компонентів векторів переміщення та електричної індукції, електростатичного потенціалу та компонент тензора напружень сферичними функціями, початково тривимірна задача зводиться до граничної задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Ця задача розв'язується з використанням ефективного чисельного методу дискретної ортогоналізації. Наведені результати чисельного аналізу отриманої задачі. Зокрема, проведено порівняльний аналіз розподілу механічних та електричних параметрів на перших модах вимушених електропружних коливань у випадку однорідного та неоднорідного п'єзокерамічного матеріалу. Також досліджено вплив характеру навантаження змінного електростатичного потенціалу на поверхні кулі на розподіл характеристик її вимушених коливань.

1. *Bailey T., Hubbard E.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // *J. Guid. Control. Dyn.* – 1985. – **8**, N 5. – P. 605 – 611.
2. *Baz A., Poh S.* Performance on an Active Control System with Piezoelectric Actuators // *J. Sound. Vib.* – 1988. – **126**, N 2. – P. 327 – 343.
3. *Berlincourt D.* Piezoelectric Crystals and Ceramics. In: *Mattiati, O.E.* (ed.). *Ultrasonic Transducer Materials.* – New York: Plenum Press, 1971. – **2**. – P. 62 – 124.
4. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // *ASME Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **60**. – P. 195 – 216.
5. *Boriseiko V.A., Grinchenko V.T., Ulitko A.F.* Relations of Electroelasticity for Piezoceramic Shells of Revolution // *Sov. Appl. Mech.* – 1971. – **12**, N 2. – P. 126 – 131.
6. *Chen W.Q., Din H.J.* On free vibrations of a functionally graded piezoelectric rectangular plate // *Acta Mech.* – 2002. – **153**. – P. 207 – 216.
7. *Chen W.Q., Lu Y., Ye J.R., Ca J.B.* 3D Electroelastic Fields in a Functionally Graded Piezoceramic Hollow Sphere Under Mechanical and Electric Loading // *Arch. Appl. Mech.* – 2002. – **72**. – P. 39 – 51.
8. *Chen W.Q., Wang L.Z., Lu Y.* Free Vibrations of Functionally Graded Piezoceramic Hollow Spheres with Radial Polarization // *J. Sound Vib.* – 2002. – **251**, N 1. – P. 103 – 114.
9. *Chen W.T.* On Some Problems in Spherically Isotropic Elastic Materials // *J. Appl. Mech.* – 1966. – **33**, N 3. – P. 347 – 355.

10. Chree C. On the Longitudinal Vibrations of Aeolotropic Bars with One Axis of Material Symmetry // *Q. J. Math.* – 1890. – **24**. – P. 340 – 358.
11. Crawly E.F., de Luis J. Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures // *AIAA J.* – 1987. – **25**, N 4 – P. 1373 – 1385.
12. Dai H.L., Fu Y.M., Yang J.H. Electromagnetoelastic Behaviors of Functionally Graded Piezoelectric Solid Cylinder and Sphere // *Acta Mech. Sinica.* – 2007. – **23**. – P. 55 – 63.
13. Dai H.L., Wang X. Transient Wave Propagation in Piezoelectric Hollow Spheres Subjected to Thermal Shock and Electric Excitation // *Struct. Eng. Mech.* – 2005 – **19**, N 4. – P. 441 – 457.
14. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Numerical determination of the natural frequencies and modes of the vibrations of thick-walled cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 1. – P. 75 – 84.
15. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. General Theory and Applications of Classical Theory. – **I**. – Berlin: Springer, 2016. – 116 p.
16. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory. – **IIA**. – Berlin: Springer, 2016. – 42 p.
17. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory. – **IIIB**. – Berlin: Springer, 2016. – 108p.
18. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Loza I.A. Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of a Hollow Sphere Made of Functionally Gradient Piezoelectric Material // *Continuum Mech. Thermodyn.* – 2014. – **26**. – P. 771 – 78.
19. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Loza I.A. Nonaxisymmetric Vibrations of Radially Polarized Hollow Cylinders Made of Functionally Gradient Piezoelectric Materials // *Continuum Mech. Thermodyn.* – 2012. – **24**, N 4 – 6. – P. 515 – 524.
20. Grigorenko A., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S. Numerical Solution of Stress-Strain State in Hollow Cylinder by means of Spline Approximation // *J. Math. Sci.* – 2012. – **180**, N 2. – P. 135 – 145.
21. Grigorenko A.Ya., Pankratiev S.A., Yaremchenko S.N. Influence of Orthotropy on the Stress-Strain State of Quadrangular Plates of Different Shapes // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 2. – P. 199 – 210.
22. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P., Yaremchenko S.N. Analysis of the Axisymmetric Stress-Strain State of a Continuously Inhomogeneous Hollow Sphere // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 5. – P. 577 – 583.
23. Jaerisch P. Über die Elastischen Schwingungen einer Isotropen Kugel // *J. Math. (Crelle)*. – 1880. – **88**. – P. 131 – 145.
24. Lamb H. On the Vibration of an Elastic Sphere // *Proc. Lond. Math. Soc.* – 1882. – **13**. – P. 189 – 212.
25. Lanczos C. *Applied Analysis*. – New York: Prentice Hall, Ink, 1956. – 524 p.
26. Love A.E. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. – New York: Cambridge University Press, 1952. – 643p.
27. Loza I.A., Shul'ga N.A. Axisymmetric Vibrations of a Hollow Piezoceramic Sphere with Radial Polarization // *Int. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 2. – C. 113 – 117.
28. Loza I.A., Shul'ga N.A. Forced Axisymmetric Vibrations of a Hollow Piezoceramic Sphere with an Electrical Method of Excitation // *Int. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 6. – P. 818 – 821.
29. Morse F.M., Feshbach G. *Methods of Theoretical Physics*. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 997 p.
30. Poisson S.D. Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps elastique // *L'Académie Royale des Sciences*. – 1829. – **VIII**. – P. 357 – 570.
31. Sato Y., Usami T. Basic study on the oscillation on a homogeneous elastic sphere // *Geophys. Mag. Tokyo*. – 1962. – **31**. – P. 15 – 62.
32. Shul'ga N.A. Electroelastic Oscillations of a Piezoceramic Sphere with Radial Polarization // *Int. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 5. – P. 97 – 500.
33. Shul'ga N.A., Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Free Non-Axisymmetric Oscillations of a Thick-Walled Nonhomogeneous Transversally Isotropic Hollow Sphere // *Int. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 5. – P. 439 – 444.

Поступила 22.03.2019

Утверждена в печать 09.07.2020