УДК 517.5

Д.Н. Бушев

ИЗОМЕТРИЧНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ С РАЗНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: критерий оптимальности, дельтаподобное ядро, изометричность, пространства сверток, аппроксимативные характеристики.

Введение

С задачей аппроксимации довольно часто встречаются исследователи и инженеры в различных областях науки и техники. Она используется как при выполнении математических расчетов и математического моделирования, так и при проектировании коммуникационного оборудования, систем технического зрения, высококачественного звуковоспроизводящего оборудования, а также анализирующих систем медицинского оборудования.

Примером необходимости проведения процедур приближения могут служить расчеты, при которых используются специальные математические функции. На практике они часто заменяются приближенными аналитическими соотношениями, так как большинство из них аналитически сложные и неудобные для дальнейших расчетов. Все это приводит к необходимости разработки критерия оптимальности. В данной работе рассматриваются примеры равенств основных аппроксимативных характеристик в изометрических пространствах, которые наглядно демонстрируют необходимость критерия оптимальности.

Примеры равенств основных аппроксимативных характеристик в изометрических пространствах

Пусть φ — изометрическое и линейное отображение линейного нормированного пространства X на линейное нормированное пространство Y. Тогда расстояние между произвольными элементами a и b пространства X равно расстоянию между их образами $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ в пространстве $\varphi(X)=Y$, т.е.

$$\rho_X(a,b)=\|a-b\|_X=\rho_Y(\varphi(a),\varphi(b))=\|\varphi(a)-\varphi(b)\|_Y,\ \ \|a\|_X=\|\varphi(a)\|_Y. \qquad (1)$$

Последнее равенство следует из линейности отображения.

Пусть далее M и T — произвольные множества пространства X, $\varphi(M)$ и $\varphi(T)$ — их изометрические образы в пространствах $\varphi(X)$, A — произвольный линейный оператор, который отображает пространство X в подпространство $A(X)=U\subseteq X$, $A\circ\varphi$ — соответствующий ему линейный оператор, который отображает пространство $\varphi(X)$ в подпространство $\varphi(U)$ таким образом, что для каждого элемента $b\in X$

$$A(\varphi(b))=\varphi(A(b)). \qquad (2)$$

Обозначим $\rho_X(b, A(b)) = \|b - A(b)\|_X$ расстояние между элементом $b \in X$ и его образом $A(b) \in U$, которое называют приближением элемента b заданным линейным оператором A, $\rho_Y(\varphi(b), A(\varphi(b)) = \|\varphi(b) - A \circ (\varphi(b))\|_Y$, $\rho_X(a, T) = = \inf_{u \in T} \rho_X(a, u) = \inf_{u \in T} \|a - u\|_X$ — расстояние от элемента $a \in X$ ко множеству $T \subset X$, которое называют наилучшим приближением элемента a элементами множества T (см., например, [1]), $\rho_Y(\varphi(a), \varphi(T)) = \inf_{\varphi(u) \in \varphi(T)} \rho_Y(\varphi(a), \varphi(u)) = = \inf_{\varphi(u) \in \varphi(T)} \|\varphi(a) - \varphi(u)\|_Y$, $\rho_X(M, A(M)) = \sup_{a \in M} \rho_X(a, A(a))$ — расстояние между множеством $M \subset X$ и его образом $A(M)$, которое называют приближением множества M заданным линейным оператором A, $\rho_Y(\varphi(M), A(\varphi(M))) = = \sup_{\varphi(a) \in \varphi(M)} \rho_Y(\varphi(a), A(\varphi(a)))$; $\rho_X(M, T) = \sup_{a \in M} \rho_X(a, T)$ — расстояние между множествами M и T, которое называют наилучшим приближением множества M элементами множества T, $\rho_Y(\varphi(M), \varphi(T)) = \sup_{\varphi(a) \in \varphi(M)} \rho_Y(\varphi(a), \varphi(T))$; $L(X, U)$ — множество всех линейных операторов A, которые отображают пространство X в линейное подпространство U, $L(\varphi(X), \varphi(U))$ — множество всех линейных операторов $A \circ \varphi$, которые отображают пространство $\varphi(X)$, изометричное пространству X, в подпространство $\varphi(U)$, изометричное пространству U, $\lambda(M, U)_X = \inf_{A \in L(X,U)} \rho_X(M, A(M))$ — наилучшее линейное отображение множества M линейными операторами множества $L(X, U)$, $\lambda(\varphi(M), \varphi(U))_Y = = \inf_{A \circ \varphi \in L(\varphi(X), \varphi(U))} \rho_Y(\varphi(M), A(\varphi(M)))$; $\{M_n\}$ — множество всех линейных подпространств F_n размерности не более n пространства X, $\{\varphi(M_n)\}$ — множество всех линейных подпространств $\varphi(F_n)$ размерности не более n изометрического образа пространства X, $d_n(M)_X = \inf_{F_n \in \{M_n\}} \rho_X(M, F_n)$ — n-мерный поперечник по Колмогорову множества M в пространстве X, $d_n(\varphi(M))_Y = = \inf_{\varphi(F_n) \in \{\varphi(M_n)\}} \rho_Y(\varphi(M), \varphi(F_n))$; $\lambda_n(M)_X = \inf_{F_n \in \{M_n\}} \lambda(M, F_n)_X$ — линейный n поперечник множества M в пространстве X, $\lambda_n(\varphi(M))_Y = \inf_{\varphi(F_n) \in \{\varphi(M_n)\}} \lambda(\varphi(M), \varphi(F_n))_Y$.

Из равенств (1), (2) и соответствующих определений следует равенство аппроксимативных характеристик для изометрических элементов и изометрических классов элементов соответствующих изометрических пространств, а именно:

$$\rho_Y(\varphi(b), A(\varphi(b))) = \rho_X(b, A(b)), \tag{3}$$

$$\rho_Y(\varphi(a), \varphi(T)) = \rho_X(a, T), \tag{4}$$

$$\rho_Y(\varphi(M), A(\varphi(M))) = \rho_X(M, A(M)), \tag{5}$$

$$\lambda(\varphi(M), \varphi(U))_Y = \lambda(M, U)_X, \tag{6}$$

$$\rho_Y(\varphi(M), \varphi(T)) = \rho_X(M, T), \tag{7}$$

$$d_n(\varphi(M))_Y = d_n(M)_X, \tag{8}$$

$$\lambda_n(\varphi(M))_Y = \lambda_n(M)_X. \tag{9}$$

 ISSN 0572-2691

Если $u_0 \in T, a_0 \in M, a_1 \in M, u_1 \in T, A_0 \in L(X,U), F_n^0 \in \{M_n\}$ и $F_n^1 \in \{M_n\}$ — экстремальные элементы соответственно для величин $\rho_X(a,T) = \rho_X(a,u_0)$, $\rho_X(M, A(M)) = \rho_X(a_0, A(a_0))$, $\rho_X(M,T) = \rho_X(a_1,u_1)$, $\lambda(M,U)_X = \rho_X(M, A_0(M))$, $d_n(M)_X = \rho_X(M, F_n^0)$ и $\lambda_n(M)_X = \lambda(M, F_n^1)_X$, то из равенств (1)–(9) следует, что их изометрические образы $\varphi(u_0) \in \varphi(T)$, $\varphi(a_0) \in \varphi(M)$, $\varphi(a_1) \in \varphi(M)$, $\varphi(u_1) \in \varphi(T)$, $A_0 \circ \varphi \in L(\varphi(X), \varphi(U)), \varphi(F_n^0)$ и $\varphi(F_n^1)$ — экстремальные элементы соответственно для величин, записанных в левых частях равенств (4)–(9).

Поскольку аппроксимативные характеристики для функций и классов функций наиболее полно исследованы в пространствах действительных функций от одной действительной переменной (см., например, библиографию работ [2–9]), будем рассматривать изометрические отображения пространств действительной функции от $1+m$ переменных, которые построены в [10], на пространства действительных 2π-периодических функций от одной переменной.

Пусть $\widetilde{X}$ — одно из пространств $\widetilde{C}, \widetilde{L}_\infty$ или $\widetilde{L}_p$ $(1 \le p < \infty)$ действительных 2π-периодических функций одной переменной, соответственно непрерывных, существенно ограниченных и измеримых с нормами

$$\|f\|_{\widetilde{C}} = \sup_{x\in[0,2\pi)} |f(x)|, \ \|f\|_{\widetilde{\infty}} = \sup_{x\in[0,2\pi)} \mathrm{vrai} |f(x)|, \ \|f\|_{\widetilde{p}} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

$\widetilde{X}M_m$ — линейные нормированные пространства функций $f(x,\bar{y}) = f(x, y_1, \ldots, y_m)$ 2π-периодических по переменной x, которые при каждом фиксированном $\bar{y} > \bar{0}$ принадлежат соответственно пространствам $\widetilde{X}$ с нормами $\|f(x,\bar{y})\|_{\widetilde{X}M_n} = \sup_{\bar{y}>\bar{0}} \|f(x,\bar{y})\|_{\widetilde{X}}$, где неравенство $\bar{y} > \bar{0}$ обозначает, что все координаты вектора $\bar{y}$ неотрицательны и хотя бы одна из них положительна, $K_{\bar{y}^m}(x) = K(x,\bar{y})$ — дельтаподобное ядро (см., например, [11–16]) 2π-периодическое по переменной x с рядом Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{\bar{y}^m}(|k|) e^{ikx} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{\bar{y}^m}(k) \cos kx\right) \sim K_{\bar{y}^m}(x),$$

$$\widetilde{X} \supset F_{2n-1} = \left\{ T_{n-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) : a_k, b_k \in \mathrm{R} \right\}$$

— пространство всех тригонометрических полиномов степени не выше $(n-1)$ с действительными коэффициентами.

В [10] доказано, что линейное нормированное пространство $\widetilde{X}$ изометрично линейному нормированному пространству сверток $\widetilde{X}$ с неотрицательными дельтаподобными ядрами [17–21] $\{\widetilde{X} * K_{\bar{y}^m}\}$ с нормой пространства $\widetilde{X}M_m$ и $\{F_{2n-1} * K_{\bar{y}^m}\} =$

$$= \left\{ (T_{n-1} * K_{\bar{y}^m})(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{\bar{y}^m}(k) A_k(x) : (T_{n-1}(x) \in F_{2n-1}) \wedge (\bar{y} > \bar{0}) \right\}$$ — изометрический образ пространства F_{2n-1}.

Обозначим

$$U_n(\Lambda, f, x) = \frac{1}{\pi}(\lambda_n * f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \lambda_n(t) f(x-t)\, dt$$

линейный оператор с ядром $\lambda_n(t)=\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos kt,$ который отображает пространство $\tilde{L}$ в подпространство $F_{2n-1},$ $U_n\circ K_{\bar{y}^m}=U_n*K_{\bar{y}^m}$ — соответствующий ему линейный оператор (2), $U_n(\Lambda*K_{\bar{y}^m},f)(x)=\frac{1}{\pi}((\lambda_n*K_{\bar{y}^m})*f)(x),$ который отображает пространства $\{\tilde{X}*K_{\bar{y}^m}\}$ (см. (14) из [10]) соответственно в подпространства $\{F_{2n-1}*K_{\bar{y}^m}\}$. Если дельтаподобное ядро $K_{\bar{y}^m}(x)$ неотрицательно [22–29], то в силу изометричности пространств $\{\tilde{X}*K_{\bar{y}^m}\}$ и $\tilde{X}$ и их подпространств $\{F_{2n-1}*K_{\bar{y}^m}\}$ и F_{2n-1} из (2)–(9) получим:

$$\|f*K_{\bar{y}^m}-U_n(\Lambda,f*K_{\bar{y}^m})\|_{\tilde{X}M_m}=\|f-U_n(\Lambda,f)\|_{\tilde{X}},$$

$$\rho_{\tilde{X}M_m}(\{M*K_{\bar{y}^m}\},U_n(\Lambda,\{M*K_{\bar{y}^m}\}))=\sup_{f\in M}\|f*K_{\bar{y}^m}-U_n(\Lambda,f*K_{\bar{y}^m})\|_{\tilde{X}M_m}=$$

$$=\rho_{\tilde{X}}(M,U_n(\Lambda,\{M\}))=\sup_{f\in M}\|f-U_n(\Lambda,f)\|_{\tilde{X}},$$

$$\rho_{\tilde{X}M_m}(f*K_{\bar{y}^m},\{F_{2n-1}*K_{\bar{y}^m}\})=E_n(f*K_{\bar{y}^m})_{\tilde{X}M_m}=\rho_{\tilde{X}}(f,F_{2n-1})=E_n(f)_{\tilde{X}},$$

$$\rho_{\tilde{X}M_m}(\{M*K_{\bar{y}^m}\},\{F_{2n-1}*K_{\bar{y}^m}\})=E_n(\{M*K_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}M_m}=\rho_{\tilde{X}}(M,F_{2n-1})=E_n(M)_{\tilde{X}},$$

$$\lambda(\{M*K_{\bar{y}^m}\},\{F_{2n-1}*K_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}M_m}=\lambda(M,F_{2n-1})_{\tilde{X}},$$

$$d_n(\{M*K_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}M_m}=d_n(M)_{\tilde{X}},\ \lambda_n(\{M*K_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}M_m}=\lambda_n(M)_{\tilde{X}}.$$

Пусть $D^{(k)}(f(x))=f^{(k)}(x)$ — оператор дифференцирования, $D^{(k)}\circ K_{\bar{y}^m}=$ $=D^{(k)}*K_{\bar{y}^m}$ — соответствующий ему линейный оператор (2), т.е.

$$D^{(k)}(f*K_{\bar{y}^m})(x)=(f^{(k)}*K_{\bar{y}^m})(x)=\frac{\partial^k(f*K_{\bar{y}^m})(x)}{\partial x^k}.$$

Известно (см., например, [1, с. 127]), что в пространстве F_{2n-1} имеет место неравенство Зигмунда, т.е. $\|T_{n-1}^{(k)}(x)\|_{\tilde{X}}\le(n-1)^k\|T_{n-1}\|_{\tilde{X}}$. В силу изометричности пространств F_{2n-1} и $\{F_{2n-1}*K_{\bar{y}^m}\}$ имеем

$$\left\|\frac{\partial^{(k)}(K_{\bar{y}^m}*T_{n-1})(x)}{\partial x^k}\right\|_{\tilde{X}M_m}=\|T_{n-1}^{(k)}*K_{\bar{y}^m}\|_{\tilde{X}M_m}=$$

$$=\|T_{n-1}^{(k)}(x)\|_{\tilde{X}}\le(n-1)^k\|(K_{\bar{y}^m}*T_{n-1})(x)\|_{\tilde{X}M},$$

т.е. неравенство Зигмунда имеет место в пространстве $\{F_{2n-1}*K_{\bar{y}^m}\}$.

Обозначим

$$M_1=\left\{T_{n-1}(x)=\frac{\rho_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k\cos(kx+\theta_k):\rho_{n-1}=1\right\}$$

множество всех тригонометрических полиномов степени не выше $(n-1)$, старший коэффициент которого $\rho_{n-1}=1.$ Тогда

$$\{M_1 * K_{\bar{y}^m}\} = \left\{ (T_{n-1} * K_{\bar{y}^m})(x) = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{\bar{y}^m}(k)\rho_k \cos(kx+\theta_k) : \rho_{n-1} = 1 \right\}$$

— изометрический образ M_1. Наименьшую норму в пространстве $\tilde{X}$ (см., например, [1, с. 110, 111]) среди всех полиномов множества M_1 имеет полином $\cos((n-1)x+\theta_{n-1})$, т.е.

$$\rho_{\tilde{X}}(0, M_1) = \inf_{T_{n-1}\in M_1} \|T_{n-1}\|_{\tilde{X}} = \|\cos((n-1)\,x+\theta_{n-1})\|_{\tilde{X}} = \|\cos x\|_{\tilde{X}}. \qquad (10)$$

Из (4) и (10) следует, что наименьшую норму в пространстве $\tilde{X}M_m$ среди элементов множества $\{M_1 * K_{\bar{y}^m}\}$ имеет элемент $\psi_{\bar{y}^m}(n-1)\cos((n-1)x+\theta_{n-1})$, т.е.

$$\rho_{\tilde{X}M_m}(0, \{M_1 * K_{\bar{y}^m}\}) = \inf_{K_{\bar{y}^m} * T_{n-1}\in\{M_1 * K_{\bar{y}^m}\}} \| K_{\bar{y}^m} * T_{n-1} \|_{\tilde{X}M_m} =$$

$$= \| \psi_{\bar{y}^m}(n-1)\cos((n-1)x+\theta_{n-1}) \|_{\tilde{X}M_m} = \|\cos x\|_{\tilde{X}}.$$

Заключение

В настоящее время наиболее эффективными средствами вычисления специальных математических функций являются системы компьютерной математики. Но ввиду аналитической сложности специальных функций их реализация в данных пакетах имеет непростые алгоритмы вычисления, что приводит, как правило, к существенным затратам времени на вычисление и препятствует применению таких систем для моделирования систем и устройств. В связи с этим рассматривается возможность применения различных приближений специальных функций в среде программных систем компьютерной математики. Полученные приближения должны иметь приемлемую для практики точность, а также обеспечивать быстрое вычисление специальных функций и реализовываться в системах компьютерной математики. Здесь помогут задачи интерполяции (например, в работах [30, 31] для нахождения функции Миттаг–Леффлера используется аппарат интерполяционных многочленов Лагранжа–Сильвестра и аппроксимации). Полученные авторами аппроксимативные характеристики позволяют разработать эффективные численные алгоритмы для приближения специальных математических функций в системах компьютерной математики.

Д.М. Бушев

ІЗОМЕТРИЧНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРІВ З РІЗНИМ ЧИСЛОМ ЗМІННИХ І ДЕЯКІ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Одні з найважливіших наукових проблем обчислювальної математики пов'язані з реалізацією математичних моделей в умовах обмеженої вихідної інформації, коли все, що можна обчислити, — це деякі точки, в яких відомі значення функції, причому в основному наближено внаслідок похибок різного походження. Теоретичне дослідження складних керованих систем, знаходження їх оптимальних математичних моделей вимагає досліджень в області побудови критеріїв керованості.

Математичну модель складної системи бажано максимально спростити. Водночас не повинен зникнути опис тих особливостей поведінки, які належить досліджувати. Головним критерієм є відповідність математичної моделі описуваним реальним процесам. Це визначається порівнянням результатів теоретичного розрахунку з результатами експерименту на конкретному об'єкті. Модель заслуговує особливого визнання, якщо з її допомогою вдається теоретично ви-

явити нові особливості поведінки і підтвердити їх експериментально. У зв'язку з цим вкрай важливе детальне дослідження особливості простору, в якому будується модель, норм та побудова наближень для функцій.

Класичний підхід в теорії наближень полягає у використанні наявної інформації для отримання наближеної функції, оперувати якою досить легко. Визначивши клас наближуваних функцій, потрібно вибрати з нього одну конкретну за допомогою деякого критерію. Взявши за основу ізометричні відображення просторів дійсних функцій від $1+m,$ змінних на простори 2π-періодичних функцій від однієї змінної, досліджено апроксимативні характеристики класів функцій в даних просторах. Отримані результати відкривають багато можливостей для подальших досліджень в асимптотичній теорії зображень. Описані математичні моделі можуть використовуватись при розв'язанні задач обчислювальної математики, пов'язаних із дослідженням складних керованих систем.

Ключові слова: критерій оптимальності, дельтаподібне ядро, ізометричність, простори згорток, апроксимативні характеристики.

D.N. Bushev

ISOMETRY OF THE FUNCTIONAL SPACES WITH DIFFERENT NUMBER OF VARIABLES AND SOME ITS APPLICATIONS IN THE THEORY OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS

Among the most important scientific problems of computational mathematics are those, that are connected with the implementation of mathematical models in conditions of limited initial information, when we have or can compute only some points in which values of the function are known, and, in addition, these data are approximate due to errors of different origin.

Theoretical study of complex controlled systems, finding the optimal mathematical models of such systems requires research in the field of building controllability criteria.

In general, creating a good mathematical model is an art. The point is that it is desirable to simplify the mathematical model of a complex system as much as possible. At the same time, with such simplification, the description of those features of the behavior to be investigated should not disappear. The main criterion here is the correspondence of the mathematical model to the described real processes. It is determined by a comparison of the results of the theoretical calculation with the results of the experiment at a particular object. The model deserves special recognition if it helps to reveal theoretically new behavioral features, which are confirmed experimentally.

In this connection, it is extremely important to study in detail the features of the space in which the model is constructed, the norms in this space, and the construction of approximations for functions in this space.

The classical approach in the approximation theory consists in using the available information to obtain the approximated function, which is fairly easy to operate.

Having determined the class of functions to be approximated, it is necessary to choose from it one definite function by means of some criterion. In the paper, using isometric mappings of the spaces of real functions of $1+m$ variables to the spaces of univariate 2π-periodic functions from one variable, we study the approximate characteristics of classes of functions in these spaces. The results obtained open up many possibilities for further research in the asymptotic theory of representations. The described mathematical models can be used in solving problems of computational mathematics related to the study of complex controlled systems.

Keywords: optimality criterion, delta-like kernel, isometry, spaces of convolutions, approximative characteristics.

1. Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев : Наук. думка, 1992. 304 с.
2. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukr. Math. J*. 2009. Vol. 61, N 1. P. 86–98.
3. Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}H^{\alpha}$. *Mathematical Notes*. 2014. Vol. 96, N 5-6. P. 1008–1019.

4. Hembars'ka S.B. Tangential limit values of biharmonic Poisson integral in a disk. *Ukr. Math. J*. 1997. Vol. 49, N 9. P. 1317–1323.
5. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J*. 2001. Vol. 53, N 6. P. 1012–1018.
6. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J*. 2007. Vol. 59, N 8. P. 1224–1237.
7. Hrabova U.Z. Uniform approximations of functions of Lipschitz class by threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automation ant Information Sciences*. 2017. Vol. 49, N 12. C. 57–70.
8. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukr. Math. J*. 2009. Vol. 61, N 11. P. 1757–1779.
9. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukr. Math. J*. 2009. Vol. 61, N 12. P. 1893–1914.
10. Бушев Д.М. Ізометричність функціональних просторів з різним числом змінних. *Ukr. Math. J.* 1998. **50**. C. 1027–1045.
11. Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukr. Math. J*. 2007. Vol. 59, N 9. P. 1342–1363.
12. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators. *Ukr. Math. J*. 2005. Vol. **57**, N 8. — P. 1297–1315.
13. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson . *Ukr. Math. J*. 2011. Vol. 63, N. 7. P. 1083–1107.
14. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. Approximation of functions from the Classes $W^r_\beta H^\alpha$ by Weierstrass integrals. *Ukr. Math. J*. 2017. Vol. **69**, N 4. P. 598–608.
15. Hembars'ka S.B., Zhyhallo K.M. Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Hölder classes. *Ukr. Math. J*. 2017. Vol. 69, N 7. P. 1075–1084.
16. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukr. Math. J*. 2017. Vol. 69, N 5. P. 757–765.
17. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_\beta H^\alpha$. *Ukr. Math. J*. 2017. Vol. 68, N. 11. P. 1727–1740.
18. Грабова У.З., Кальчук І.В., Степанюк Т.А. Про наближення бігармонічними інтегралами Пуассона класів $W^r_\beta H^\alpha$. *Укр. мат. журн*. 2018. **70**, № 5. C. 625–634.
19. Kharkevych Yu. I., Zhyhallo T.V. Approximation of function from class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric. *Ukr. Math. J*. 2008. Vol. 60, N 5. P. 769–798.
20. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson . *Ukr. Math. J*. 2012. Vol. 63, N 12. P. 1820–1844.
21. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukr. Math. J*. 2007. Vol. 59, N 7. P. 1059–1087.
22. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J*. 2009. Vol. 61, N 3. P. 399–413.
23. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J*. 2000. Vol. 52, N 7. P. 1113–1117.
24. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math*. 2018. Vol. 22, N 1. P. 23–36.
25. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J*. 2002. Vol. 54, N 1. P. 51–63.
26. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukr. Math. J*. 2004. Vol. 56, N 9. P. 1509–1525.
27. Жигалло Т.В. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона–Чебышева. *«Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2018. № 3. С. 46–59.
28. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J*. 2002. Vol. 54, N 9. P. 1462–1470.
29. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W^r_\beta H^\alpha$. *J. Math. Sci*. (N.Y.) 2018. Vol. 231, N 1. P. 41–47.
30. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 3. С. 3–32.
31. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.

Получено 05.09.2018