УДК 519.6

Д.М. Бушев

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ ИЗОМЕТРИЧНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Ключевые слова: изометрические пространства, колмогоровский поперечник, наилучшее приближение, линейный оператор, дельтаподобное ядро.

Введение

В вычислительной математике особое место занимает задача изучения особенности функциональных пространств, свойства которых предоставляют возможность быстрого масштабирования результатов небольшого количества переменных на значительно большее их количество. На практике удачный выбор таких функциональных пространств с всевозможными присущими им свойствами изометрии приводит к минимизации избыточности вычислений. Именно поэтому удачный выбор такого пространства, предрасположенный к изучению его аппроксимационно-изометрических свойств, играет важнейшую роль для решения целого ряда задач типа сближения–уклонения в дифференциальных играх [1–7].

В свое время в [8] были построены пространства действительных функций от $n+k$ переменных, изометричные пространствам действительных функций, заданных на n-мерном евклидовом пространстве. В [9] были сформулированы определения основных аппроксимационных характеристик и их равенств в этих изометрических пространствах. Поскольку аппроксимационные характеристики для функций и классов функций наиболее полно исследованы в пространствах действительных функций от одной действительной переменной, то в [9] рассматривались изометрические отображения пространств действительных функций от $1+m$ переменных, которые были построены в [8], на пространства действительных 2π-периодических функций от одной переменной и приведены некоторые примеры ее применения в теории приближения функций и вычислительной математики.

В данной работе результаты статьи [9] распространены на изометрические отображения пространств действительных функций от $n+m$ переменных на пространства действительных функций от n переменных 2π-периодических по каждой переменной.

Аппроксимационные характеристики изометрических отображений пространств функций от $n+m$ переменных на пространства действительных функций от n переменных, 2π-периодических по каждой из них

Пусть, как и в [8], имеется изометрическое и линейное отображение линейного нормированного пространства X на линейное нормированное пространство Y. Далее будем использовать терминологию и обозначения (1)–(9) из работы [9].

Пусть $\tilde{C}^n$, $\tilde{L}^n_\infty$, $\tilde{L}^n_{\bar{p}}$ — пространства вещественных функций, заданных на n-мерном кубе $\pi^n = [-\pi, \pi)^n$, 2π-периодических по каждой переменной соответственно непрерывных, существенно ограниченных и измеримых нормами

$$\|f\|_{\tilde{C}^n} = \sup_{x\in\pi^n} |f(x)|, \quad \|f\|_{\tilde{\infty}^n} = \sup_{x\in\pi^n}\mathrm{vrai}\,|f(x)|,$$

$$\|f\|_{\tilde{\bar{p}}^n} = \left\| \ldots \left\| \left\| f(x_1,\ldots,x_n) \right\|_{\tilde{p}_1,x_1} \right\|_{\tilde{p}_2,x_2} \ldots \right\| =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\ldots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1, x_2,\ldots,x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \ldots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}},$$

где $\bar{1} = (1,\ldots,1) \le \bar{p} = (p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_n) < \bar{\infty} = (\infty,\ldots,\infty)$ и последнее неравенство означает, что $1 \le p_i < \infty$ $(i = \overline{1, n})$.

Из неравенства $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_m) \ge \bar{0} = (0,\ldots,0)$ следует, что координаты вектора $\bar{y}$ неотрицательные, а $\bar{y} > \bar{0}$, кроме того, хотя бы одна из них положительная.

Далее обозачим

$$\Pi^+_{n,m} = \{(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) = (x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_m) \in E^{n+m} : (\bar{y} > \bar{0})\},$$

$$\overline{\Pi}^+_{n,m} = \{(x, y) \in E^{n+m} : (\bar{y} \ge \bar{0})\}$$

подмножества действительного $(n+m)$-мерного евклидового пространства E^{n+m}, $\tilde{X}^n$ — одно из пространств $\tilde{C}^n$, $\tilde{L}^n_\infty$, $\tilde{L}^n_{\bar{p}}$, $\tilde{X}^n M_m$, $\tilde{X}^n \overline{M}_m$ — пространства действительных функций $f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_m)$, определенных соответственно на множествах $\Pi^+_{n,m}$ и $\overline{\Pi}^+_{n,m}$ с нормами

$$\|f\|_{\tilde{X}^n M_m} = \sup_{\bar{y}>\bar{0}} \|f(\bar{x}, \bar{y})\|_{\tilde{X}^n}, \quad \|f\|_{\tilde{X}^n \overline{M}_m} = \sup_{\bar{y}\ge\bar{0}} \|f(\bar{x}, \bar{y})\|_{\tilde{X}^n}.$$

Пусть далее $Q^n_\delta = [-\delta, \delta]^n \subset E^n$ — n-мерный куб в пространстве E^n с ребром, равным $2\delta < 2\pi$, $\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}(x) = \tilde{K}^n_{\bar{y}^m}(x_1,\ldots,x_n) = \tilde{K}(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_m) \in \tilde{L}^n_1 M_m = \tilde{L}^n M_m$ — дельтаподобные ядра такие, что при каждом $\bar{y} > \bar{0}$ справедливы равенства:

$$\int_{\pi^n} \tilde{K}^n_{\bar{y}^m}(x)dx = 1, \quad \lim_{\bar{y}\to\bar{0}+\bar{0}} \int_{\pi^n \setminus Q^n_\delta} |\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}(x)|\,dx = 0.$$

ISSN 0572-2691

Следует отметить, что в одномерном случае вышеуказанные дельтаподобные ядра $\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}(x)$ изучались в работах [10–16].

Пусть

$$\{\widetilde{X}^n * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\} = \left\{\widetilde{u}(x, y) = \widetilde{u}(x, \bar{y}) = (\widetilde{f} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m})(x) = \int_{\pi^n} \widetilde{f}(x-t)\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}(t)dt : (\widetilde{f} \in \widetilde{X}^n)\right\},$$

$$\overline{\{\widetilde{\mathrm{X}}^n * \widetilde{\mathrm{K}}^n_{\bar{\mathrm{y}}^m}\}} = \left\{\widetilde{v}(x, y) = \widetilde{v}(x, \bar{y}) = \begin{cases} (\widetilde{f} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m})(x), \bar{y} > \bar{0}, \\ \widetilde{f}(x), \bar{y} = \bar{0} \end{cases} : (\widetilde{f} \in \widetilde{\mathrm{X}}^n)\right\}$$

— пространства сверток с дельтаподобными ядрами аппроксимативных свойств, которых в одномерном случае изучены в [17–25].

Основная цель данной публикации — получение равенств для аппроксимационных характеристик в случае изометрических отображений пространств функций от $n+m$ переменных на пространства действительных функций от n переменных, 2π-периодических по каждой из них.

Пусть Z^n — целочисленная решетка в пространстве E^n, $\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}(x)$ — дельтаподобное ядро, которое определено на $\Pi^+_{n,m}$ с рядом Фурье:

$$\sum_{k \in Z^n} c_k(\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m})e^{ikx} = \sum_{k \in Z^n} c_{k_1,\dots,k_n}(\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m})e^{i\sum_{j=1}^n k_j x_j} \sim \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}(x), \tag{1}$$

где $c_k(f) = \dfrac{1}{(2p)^n}\displaystyle\int_{\pi^n} f(t)e^{-ikt}dt$ — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in \widetilde{L}^n$,

$$F_{G^n} = \Big\{T_{G^n}(x) = \sum_{k \in G^n \cap Z^n} c_k e^{ikx} = \sum_{k \in G^n \cap Z^n} c_{k_1,\dots,k_n} e^{i\sum_{j=1}^n k_j x_j} /$$

$$/(c_{-k} = c_{-k_1,\dots,-k_n} = \bar{c}_k) \wedge (G^n \subset E^n) \wedge ((\forall x \in G^n) \Rightarrow (-x \in G^n))\Big\} \tag{2}$$

— пространство действительных тригонометрических полиномов от n переменных, которые определяются ограниченной центральносимметричной областью $G^n \subset E^n$, и где $\bar{c}_k$ — число, сопряженное комплексному числу $a_k + ib_k = c_k$,

$$U_{G^n}(\Lambda, f, x) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\lambda_{G^n} * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\pi^n}\lambda_{G^n}(t)f(x-t)dt \tag{3}$$

— линейный оператор, который задается с помощью свертки с ядром $\lambda_{G^n} \in F_{G^n}$.

Если функции f и g принадлежат пространству $\widetilde{L}^n$, $\sum_{k \in Z^n} c_k(f)e^{ikx} \sim f(x)$ и $\sum_{k \in Z^n} c_k(g)e^{ikx} \sim (g)(x)$ — их ряды Фурье, то (см., например, [26 с. 275, 267]) функция $(f * g)(x) = \int_{\pi^n} f(t)g(x-t)dt$ принадлежит пространству $\widetilde{L}^n$ и имеет ряд Фурье

$$(2\pi)^n \sum_{k \in Z^n} c_k(f)c_k(g)e^{ikx} \sim (f * g)(x). \tag{4}$$

Поскольку функции T_{G^n} и λ_{G^n} принадлежат пространству $F_{G^n} \subset \widetilde{C}^n \subset \widetilde{L}^n_\infty \subset$ $\subset \widetilde{L}^n_{\overline{p}} \subseteq \widetilde{L}^n$, то из (2) и (3) с помощью (4) получаем

$$U_{G^n}(\Lambda, f, x) = \sum_{k \in G^n \cap Z^n} c_k(\lambda_{G^n}) c_k(f) e^{ikx}, \tag{5}$$

$$(T_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m})(x) = (2\pi)^n \sum_{k \in G^n \cap Z^n} c_k(\widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}) c_k e^{ikx}, \tag{6}$$

где $f \in \widetilde{X}^n$, а $\widetilde{X}^n$ — одно из пространств $\widetilde{C}^n$, $\widetilde{L}^n_\infty$ или $\widetilde{L}^n_{\overline{p}}$.

Из (2) и (5) следует, что линейный оператор $U_{G^n}(\Lambda, f, x)$ отображает пространство $\widetilde{X}^n$ в подпространство F_{G^n}, а из (2) и (6) — что множества

$$\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\} =$$
$$= \left\{ (T_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m})(x) = (2\pi)^n \sum_{k \in G^n \cap Z^n} c_k(\widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}) c_k e^{ikx} : (c_{-k} = \overline{c}_k) \wedge (\overline{y} > \overline{0}) \right\}, \tag{7}$$

$$\overline{\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}} = \begin{cases} (T_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m})(x), \ \overline{y} > \overline{0}, \\ T_{G^n}(x), \qquad \overline{y} = \overline{0}, \end{cases} \tag{8}$$

— подпространства пространств сверток $\{\widetilde{X}^n * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}$ и $\overline{\{\widetilde{X}^n * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}}$.

Из [8] (следствие 1) подпространства сверток $\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}$ и $\overline{\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}}$ изоморфны подпространству F_{G^n} и изометричны этому подпространству, если дельтаподобное ядро $\widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}(x)$ неотрицательное [27–34] на $\Pi^+_{\mathrm{n},m}$.

Обозначим $U_{G^n} \circ \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m} = U_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}$ линейный оператор (2) из (9), соответствующий линейному оператору (3) данной работы, который отражает пространства $\{\widetilde{X}^n * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}$ и $\overline{\{\widetilde{X}^n * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}}$ соответственно в подпространства $F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}$ и $\overline{\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}}$, $U_{G^n}(\Lambda * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}, f, x) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}((\lambda_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}) * f)(x)$.

Если дельтаподобное ядро $(\widetilde{K}^n{}_{\overline{y}^m})(x)$ неотрицательное и $\widetilde{X}^n$ — одно из пространств $\widetilde{C}^n$, $\widetilde{L}^n_{\overline{p}}$ $(\overline{1} \le \overline{p} < \infty)$, то в силу изометричности пространств $\{\widetilde{X}^n * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}$ и $\widetilde{X}^n$, а также их подпространств $\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}\}$ и F_{G^n} из (2)–(9) работы [9] получаем:

$$\left\| f * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m} - U_{G^n}(\Lambda * \widetilde{K}^n_{\overline{y}^m}, f) \right\|_{\widetilde{X}^n M_m} = \left\| f - U_{G^n}(\Lambda, f) \right\|_{\widetilde{X}^n},$$

 ISSN 0572-2691

$$\sup_{f\in M}\left\| f*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m} - U_{G^n}(\Lambda*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}, f)\right\|_{\tilde{X}^n M_m} = \sup_{f\in M}\left\| f - U_{G^n}(\Lambda, f)\right\|_{\tilde{X}^n},$$

$$E_{G^n}(f*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m})_{\tilde{X}^n M_m} = \inf_{T_{G^n}\in F_{G^n}}\left\| f*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m} - T_{G^n}*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\tilde{X}^n M_m} =$$
$$= E_{G^n}(f)_{\tilde{X}^n} = \inf_{T_{G^n}\in F_{G^n}}\left\| f - T_{G^n}\right\|_{\tilde{X}^n},$$

$$E_{G^n}(M*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m})_{\tilde{X}^n M_m} =$$
$$= \sup_{f\in M} E_{G^n}(f*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m})_{\tilde{X}^n M_m} = E_{G^n}(M)_{\tilde{X}^n} = \sup_{f\in M} E_{G^n}(f)_{\tilde{X}^n},$$

$$\lambda(\{M*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\},\{F_{G^n}*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}^n M_m} = \lambda(M, F_{G^n})_{\tilde{X}^n},$$

$$d_n(\{M*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}^n M_m} = d_n(M)_{\tilde{X}^n},$$

$$\lambda_n(\{M*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}^n M_m} = \lambda_n(M)_{\tilde{X}^n}.$$

Пусть дельтаподобное ядро $\tilde{K}^n{}_{\bar{y}^m}$ неотрицательное. Если $\tilde{X}^n$ — одно из пространств $\tilde{C}^n$ или $\tilde{L}^n_{\bar{p}}$ $(\bar{1}\le \bar{p} < \bar{\infty})$, то в силу изоморфизма пространств $\tilde{X}^n$ и $\overline{\{\tilde{X}^n * \tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\}}$ и их подпространств F_{G^n} и $\overline{\{F_{G^n} * \tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\}}$, используя неравенства (23) из [8], имеем:

$$\left\| f - U_{G^n}(\Lambda, f)\right\|_{\tilde{X}^n} \le$$
$$\le \left\| f*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m} - U_{G^n}(\Lambda*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}, f)\right\|_{\tilde{X}^n \bar{M}_m} \le \left\|\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\bar{1}\bar{M}_m}\cdot\left\| f - U_{G^n}(\Lambda, f)\right\|_{\tilde{X}^n},$$

$$\sup_{f\in M}\left\| f - U_{G^n}(\Lambda, f)\right\|_{\tilde{X}^n} \le$$
$$\le \sup_{f\in M}\left\| f*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m} - U_{G^n}(\Lambda*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}, f)\right\|_{\tilde{X}^n M_m} \le \left\|\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\bar{1}\bar{M}_m}\cdot\sup_{f\in M}\left\| f - U_{G^n}(\Lambda, f)\right\|_{\tilde{X}^n}, \tag{9}$$

$$E_{G^n}(f)_{\tilde{X}^n} \le E_{G^n}(f*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m})_{\tilde{X}^n \bar{M}_m} \le \|\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\|_{\bar{1}M_m}\cdot E_{G^n}(f)_{\tilde{X}^n},$$

$$E_{G^n}(M)_{\tilde{X}^n} \le E_{G^n}(\{M*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}^n \bar{M}_m} \le \left\|\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\bar{1}M_m}\cdot E_{G^n}(M)_{\tilde{X}^n},$$

$$\lambda(M, F_{G^n})_{\tilde{X}^n} \le \lambda(\{M*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\},\{F_{G^n}*\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\})_{\tilde{X}^n \bar{M}_m} \le \left\|\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\bar{1}M_m}\cdot\lambda(M, F_{G^n})_{\tilde{X}^n},$$

$$d_n(M)_{\widetilde{X}^n} \le d_n(\{M * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\})_{\widetilde{X}^n \overline{M}_m} \le \left\|\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\bar{1}M_m} \cdot d_n(M)_{\widetilde{X}^n},$$

$$\lambda_n(M)_{\widetilde{X}^n} \le \lambda_n(\{M * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\})_{\widetilde{X}^n \overline{M}_m} \le \left\|\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\bar{1}M_m} \cdot \lambda_n(M)_{\widetilde{X}^n},$$

где $\left\|\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\bar{1}M_m}$ — норма ядра $\widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}$ в пространстве $\widetilde{L}^n M_m$.

Если же $\widetilde{X}^n$ — одно из пространств $\widetilde{C}^n$ или $\widetilde{L}^n_{\bar{p}}$ $(\bar{1} \le \bar{p} < \bar{\infty})$, то эти неравенства справедливы и для изоморфных пространств $\widetilde{X}^n$ и $\{\widetilde{X}^n * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\}$ и их изоморфных подпространств F_{G^n} и $\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\}$ с заменой нормы пространства $\widetilde{X}^n \overline{M}_m$ на норму пространства $\widetilde{X}^n M_m$.

Если $D^{(\bar{s})} f = f^{(\bar{s})} = \dfrac{\partial^{s_1+\ldots+s_n} f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}}$ — оператор дифференцирования, $D^{(\bar{s})} \circ \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m} = D^{(\bar{s})} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}$ — соответствующий ему линейный оператор (2) из [9],

$$D^{(\bar{s})}(f * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m})(x) = (f^{(\bar{s})} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m})(x) = \frac{\partial^{s_1+\ldots+s_n}(f * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m})(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}}, \qquad (10)$$

$P^n_{|l|} = \{x \in E^n : (|x_i| \le l_i) \wedge (l_i \in N) \wedge (i = \overline{1, n})\}$ — подмножество пространства E^n,

$T_{\bar{l}}(x) = T_{l_1, \ldots l_n}(x) = \sum\limits_{k \in P^n_{|l|} \cap Z^n} c_k e^{ikx} = \sum\limits_{k \in P^n_{|l|} \cap Z^n} c_{k_1, \ldots, k_n} e^{i\sum_{j=1}^n k_j x_j}$ — тригонометрический полином порядка $l_1, \ldots, l_n$. Известно (см., например, [35, с. 138–140]), что для полиномов $T_{\bar{l}}(x)$ имеет место неравенство Бернштейна и ее обобщения, неравенство Зигмунда, т.е.

$$\left\|T^{(\bar{s})}_{\bar{l}}(x)\right\|_{\widetilde{X}^n} \le l_1^{s_1} \ldots l_n^{s_n} \left\|T_{\bar{l}}(x)\right\|_{\widetilde{X}^n} = \bar{l}^{\,\bar{s}} \left\|T_{\bar{l}}(x)\right\|_{\widetilde{X}^n}, \qquad (11)$$

где $\widetilde{X}^n$ — одно из пространств $\widetilde{C}^n, \widetilde{L}^n_\infty$ или $\widetilde{L}^n_{\bar{p}}$ $(\bar{1} \le \bar{p} < \bar{\infty})$. В силу изометричности пространств F_{G^n}, $\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\}$ и $\overline{\{F_{G^n} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\}}$ из (1), (11) следует, что

$$\begin{gathered} \left\|T_{\bar{l}}(x)\right\|_{\widetilde{X}^n} = \left\|T_{\bar{l}} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\widetilde{X}^n M_m} = \\ = \left\|T_{\bar{l}} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\widetilde{X}^n M_m}, \quad \left\|T^{(\bar{s})}_{\bar{l}}\right\|_{\widetilde{X}^n} = \left\|T^{(\bar{s})}_{\bar{l}} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\widetilde{X}^n M_m} = \left\|T^{(\bar{s})}_{\bar{l}} * \widetilde{K}^n_{\bar{y}^m}\right\|_{\widetilde{X}^n \overline{M}_m}, \end{gathered} \qquad (12)$$

а из (10)–(12), что неравенство Зигмунда имеет место в пространствах $\widetilde{X}^n M_m$ и $\widetilde{X}^n \overline{M}_m$, т е.

$$\left\| \frac{\partial^{s_1+\ldots+s_n}(T_{\bar{l}} * \tilde{K}^n_{\bar{y}^m})}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \right\|_{\tilde{X}^n M_m} \le$$

$$\le \bar{l}^{\bar{s}} \left\| T_{\bar{l}} * \tilde{K}^n_{\bar{y}^m} \right\|_{\tilde{X}^n M_m}, \left\| \frac{\partial^{s_1+\ldots+s_n}(T_{\bar{l}} * \tilde{K}^n_{\bar{y}^m})}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \right\|_{\tilde{X}^n \overline{M}_m} \le \bar{l}^{\bar{s}} \left\| T_{\bar{l}} * \tilde{K}^n_{\bar{y}^m} \right\|_{\tilde{X}^n \overline{M}_m}, \tag{13}$$

где $\tilde{K}^n_{\bar{y}^m}(x)$ — неотрицательное дельтаподобное ядро.

Заметим, что неравенства (13) были установлены в [35, с. 138–140] для произвольных пространств функций с нормой, инвариантной относительно сдвига по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Заключение

В настоящей публикации распространены результаты работы [9] для изометрических отображений пространств действительных функций от $n+m$ переменных, на пространства действительных функций от n переменных 2π-периодических по каждой переменной, которые в, свою очередь, являются обобщениями соответствующих результатов этой же статьи [9].

В [9] были определены основные аппроксимационные характеристки и их равенства в изометрических пространствах. Поскольку аппроксимационные характеристики для функций и классов функций наиболее полно исследованы в пространствах действительных функций от одной действительной переменной, в [9] рассмотрены изометрические отображения пространств действительных функций от $1+m$ переменных, которые были построены в [8], на пространства действительных 2π-периодических функций от одной переменной и приведены некоторые примеры ее применения в теории приближения функций.

Пространства действительных функций от $n+k$ переменных, изометричные пространствам действительных функций, заданных на n-мерном евклидовом пространстве, были построены в [8]. Поскольку изометричность функциональных пространств с различным числом переменных — редкое явление, и раньше изометричность применялась лишь для пространств комплекснозначных функций [8, с. 1027], целесообразно рассмотреть ее применение для решения задач прикладного характера, например сближения–уклонения в дифференциальных играх.

Бушев Д.М.

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ В ПРИКЛАДНІЙ МАТЕМАТИЦІ ІЗОМЕТРИЧНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРІВ

Проблеми обчислювальної математики безпосередньо пов'язані з реалізацією математичних моделей в умовах обмеженої вихідної інформації. Особливо це проявляється, коли доводиться стикатися з різними ідеалізаціями реальних процесів, що в свою чергу змушує застосовувати дискретизацію неперервних змінних функцій, а також заміну всіх нескінченно малих і нескінченно великих величин деякими кінцевими величинами. Саме тому пошук математичного опису моделі або вибір з кількох можливих — це найскладніший і найвідповідальніший момент в моделюванні, оскільки в моделі може бути досить велика кількість зв’язків, частин, змінних, і вибір неправильного математичного опису

для будь-якої з них може привести до повної або часткової непрацездатності моделі в цілому. Для опису взаємодій беруться заздалегідь відомі функціональні залежності. Одними з найцікавіших задач обчислювальної математики, що вимагають тонкого підходу до вибору як простору, в якому вирішується ця задача, можливості швидкого масштабування результатів з малої кількості параметрів значно більшу їх кількість змінних, якраз є задачі зближення–ухиляння в диференціальних іграх, задачі уникання або ухилення від зустрічі, задачі ухиляння від групи переслідувачів. При вирішенні цих задач і при прикладному використанні результатів для мінімізації надмірності обчислень, напевно, важливо вдало вибрати функціональний простір з можливими притаманними властивостями ізометрії. Вибір такого простору — окрема задача, що вимагає глибокого всебічного вивчення. Так свого часу детально були вивчені простори дійсних функцій від $n+k$ змінних, ізометричні просторам дійсних функцій, заданих на n-вимірному евклідовому просторі. У даній роботі розглянуто ізометричні відображення просторів дійсних функцій від $n+m$ змінних на простори дійсних від n змінних 2π-періодичних по кожній змінній, що, в свою чергу, сприятиме вивченню складних керованих систем, а також знаходженню оптимальних математичних моделей для них.

Ключові слова: ізометричні простори, колмогоровський поперечник, найкраще наближення, лінійний оператор, дельтаподібне ядро.

Bushev D.N.

ON SOME APPLICATIONS OF ISOMETRICITY OF FUNCTIONAL SPACES IN APPLIED MATHEMATICS

Problems of computational mathematics are directly connected with an implementation of mathematical models in conditions of limited initial information. This is especially evident when, during modeling, one encounters various idealizations of real processes which in turn forces one to apply discretization for functions of continuous variables, as well as replacing all infinitesimal and infinitely large quantities with some finite quantities. That is why the search for a mathematical description of the model or the choice between several possible ones is the most difficult and crucial moment in modeling, since the model may contain a sufficiently large number of connections, parts, variables and choosing the wrong mathematical description for any of them can yield a full or partial operability of the model as a whole. To describe the interactions one selects a priory known functional dependencies. One of the most interesting problems of computational mathematics that require a delicate approach to choosing both the space in which the problem is solved and its capability to quickly scale up the results from a small number of parameters to a much larger number of them, are exactly the problems of approach-evasion differential games, the problems of escape or evasion from a meeting, the problems of escape from a group of pursuers. In solving these problems and in applying the results to minimize redundancy of calculations, it is certainly important to appropriately select a functional space with possible inherent isometry properties. The choice of such space is a separate task requiring a deep comprehensive study. The spaces of real functions of $n+k$ variables that are isometric to the spaces of real functions defined on the n-dimensional Euclidean space are already studied in detail. In this paper, isometric mappings are considered of the spaces of real functions of $n+m$ variables into the spaces of real functions of n variables that are 2π-periodic in each variable, which in turn will contribute to the study of complex controlled systems, as well as finding an optimal mathematical models for such systems.

Keywords: isometric spaces, Kolmogorov width, best approximation, linear operator, delta kernel.

1. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Game problems of approach for quasilinear systems of general form. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2019. 304 (Suppl 1). P. 44–58. DOI: 10.1134/ S0081543819020068
2. Chikrii A.A. An analytic method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **271,** N 1. P. 69–85. DOI: 10.1134/s0081543810040073

3. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in a parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. 293 (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229
4. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Comput. Math. Appl.* 2002. 44, N 7. P. 835–851. DOI: 10.1016/S0898-1221(02)00197-9
5. Chikrij A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. Kibernet. Sistem. Anal. 2001. N 6. P. 836–864.
6. Chikrii A.A.,Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl 1). P. 56-65. DOI**:** 10.1134/S0081543815090047
7. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. **27**, N 1. P. 27–38.
8. Bushev D.M. Isometry of functional spaces with different number of variables. *Ukrainian Math. J.* 1998. 50, N 8. — P. 1170–1191. DOI**:** 10.1007/BF02513090
9. Bushev D. N. Isometry of the functional spaces with different number of variables and some its applications in the theory of approximation of functions. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 1. P. 70–77. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v 51.i1.70
10. ZhyhalloT.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69,** N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
11. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ,β) — differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z
12. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03
13. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249
14. Hrabova U.Z. Uniform approximations of functions of Lipschitz class by threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 12. P. 57–70. DOI: 10. 1615/JAutomatInfScien.v49.i12.60
15. Hrabova U.Z. Approximative properties of the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 8. C. 77–86. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v 50.i8. 70
16. Zhyhallo T.V. Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson-Chebyshev integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 5. P. 34–48. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v 50.i5. 40
17. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. 22, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19
18. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. 61, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y
19. Kal'chuk I.V., KharkevychYu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_\beta H^\alpha$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9
20. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of function from class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9
21. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T. A. On the approximation of the classes $W^r_\beta H^\alpha$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. P. 719–729. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6
22. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4

23. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1
24. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. Ukrainian Math. J. 2012. **63**, N 12. P. 1820-1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2
25. KharkevychYu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$. *Math. Notes.* 2014. **96**, N 5-6. P. 1008–1019. DOI: 10.1134/ s0001434614110406
26. И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах: пер. с англ. М. : Мир. 1974. 333 с.
27. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 2018. **231,** N 1. P. 41-47. DOI: 10.1007/s10958-018-3804-2
28. KharkevychYu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/ s11253-007-0069-1
29. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0
30. Zhyhallo T.V., KharkevychYu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y
31. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximation of functions from the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$ by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x
32. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x
33. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550
34. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914
35. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука. 1969. 480 с.

Получено 08.10.2019