

Ю.Д. КОПАНИЦЯ, кандидат технічних наук  
Київський національний університет будівництва і архітектури

## РОЗРАХУНОК ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ НА КРИВОЛІНІЙНУ ПОВЕРХНЮ. УНІВЕРСАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ТРЬОХ КОМАНД – K123

*Приведено приклад організації розрахунку в комп'ютерних програмах сили тиску для задач гідростатики.*

**Ключові слова:** сила тиску, епюра, центр ваги.

*Приведен пример организации расчёта в компьютерных программах силы давления для задач гидростатики.*

**Ключевые слова:** сила давления, эпюра, центр тяжести.

*The example of organisation of counting a pressure force for hydraulic task with computer programs is produced.*

**Key words:** pressure force, pressure diagram, center of pressure.

Представлена стаття продовжує раніше опубліковану автором [1] тему визначення сили гідростатичного тиску на плоску поверхню. Мета даної роботи – узагальнити методику використання універсального алгоритму трьох команд (далі алгоритм K123) для інженерних розрахунків гідростатичного тиску на поверхні довільної криволінійної форми. Представлено детальний опис алгоритму, приклади тестових розрахунків, проведено оцінку точності розрахунків і практичні рекомендації для інженерної практики.

Для послідовного викладення матеріалу, нагадаємо основні розрахункові формули і базові принципи, які лежать в основі універсального алгоритму K123. Розрахунок гідростатичного тиску на плоску поверхню за алгоритмом K123 базується на принципі її декомпозиції на елементарні горизонтальні складові шари. Єдиний ітераційний алгоритм визначення сили тиску на окремих шарі розроблено з метою стандартизації розрахунків в деяких системах комп'ютерної алгебри – Maple, Mathematica, MathCad, MathLab, Maxima, Sage, Octave та ін. Алгоритм K123 і приклади розрахунку для плоскої поверхні представлено в роботі [1].

Основні положення і розрахункові формули алгоритму K123, проілюстровані рис.1

Виділимо два ключових моменти:

- сумарна сила тиску рідини за модулем дорівнює об'єму епюри тиску;

- точка дії рівнодіючої (центр тиску сумарної сили тиску на окремі шари рідини) проходить через точку проєкції центра ваги об'ємної епюри тиску (точка  $F$ , рис. 1.а) на поверхню шару під визначеним кутом (центр тиску – точка  $D$ ). Форма епюри є наочним відображенням всіх особливостей дії (тиску) неперервного середовища на відповідний шар площі змоченої поверхні; проєкція будується по нормалі до поверхні.

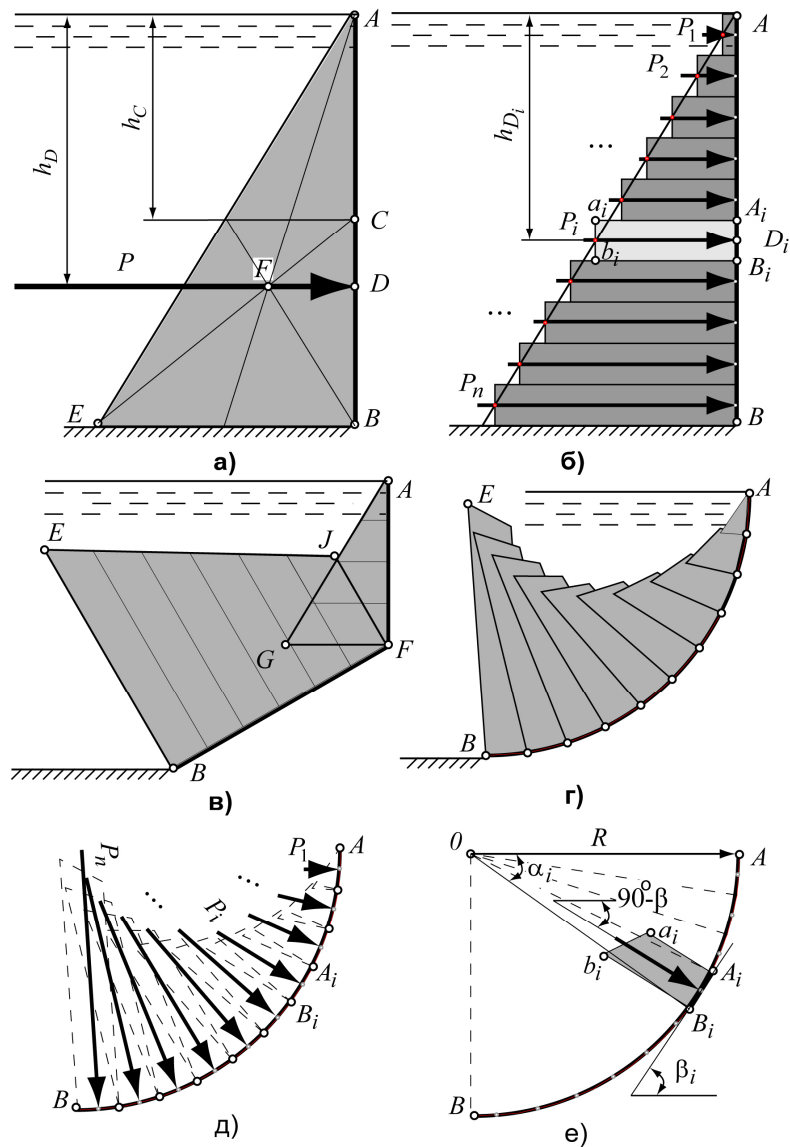


Рис. 1. Епюра гідростатичного тиску на плоску і криволінійну поверхні:  
 а) плоска поверхня; б) апроксимація епюри тиску для чисельного розрахунку; в) форма епюри тиску на сегментну ламану поверхню із плоскими елементами; г) система непаралельних сил тиску на ламану плоско елементну поверхню; д) форма епюри тиску на десяти сегментну апроксимацію криволінійної поверхні ламаною поверхнею із плоскими елементами; е) кут дії сили тиску на елементарну плоску поверхню ( $i$  – ий шар поверхні)

В роботі [1] було не уточнено, що центр тиску (точка  $D$ , рис. 1.а) не співпадає із центром ваги епюри тиску (точка  $F$ , рис. 1.а). Центр ваги

знаходиться в об'ємі епюри тиску, а центр тиску розташовано безпосередньо на поверхні шара і позначає місце дії рівнодіючої сили тиску. Обидві точки лежать на напрямку дії сумарної сили тиску  $P$ , яка діє нормально до поверхні (рис. 1.а).

Об'єм епюри тиску в будь-якому випадку і для будь-якої поверхні (криволінійної або плоскої) обов'язково дорівнює модулю сили тиску.

Центр ваги об'ємної епюри в будь-якому випадку визначає координати через які проходить лінія дії вектора сили гідростатичного тиску на поверхню (або елемента поверхні, якщо розглядається окремий шар). Аналогічна примітка, щодо поняття "елемента" поверхні відноситься також і до розрахунку координат центра ваги всієї системи елементарних епюр – на заключному етапі розрахунку.

Алгоритм K123 **чисельного (або аналітичного)** розрахунку сумарної сили тиску рідини **на елементарний шар** поверхні включає таку послідовність операцій:

- розрахунок загального об'єму епюри тиску, який дорівнює величині модуля рівнодіючої (сумарної) сили тиску  $P_i$  на окремий  $i$ -ий шар змоченої поверхні ( $i$ -ий шар, рис. 1.б);
- визначення статичного моменту рівнодіючої (сумарної) сили тиску  $m(P_i)$  на елементарний шар відносно обраної точки (точка  $A$  – рівень вільної поверхні рідини, рис. 1.б);
- обчислення координат  $h_{D_{xi}}$ ,  $h_{D_{zi}}$  точки прикладання (центра тиску – точка  $D_i$ ) рівнодіючої (сумарної) сили тиску ( для простоти розрахунків приймається проєкція центру ваги епюри гідростатичного тиску  $A_i B_i b_i a_i$  на  $i$ -ий шар, рис. 1.б).

Алгоритм K123 **чисельного (або аналітичного)** розрахунку сумарної сили тиску рідини **на всю площу** змоченої поверхні включає такі операції:

- для плоскої поверхні виконуємо стандартні три команди розрахунку  $P$ ,  $m(P)$ ,  $h_D$ , які описано для елементарного шару. Дії виконуються над системою паралельних сил  $P_i$ , відповідними глибинами центрів тиску  $h_{D_{zi}}$  відносно осі  $z$  і координатами  $h_{D_{xi}}$  відносно осі  $x$  (значення індексу « $i$ » змінюється від 0 до « $n$ »);
- для криволінійної поверхні розкладемо на ортогональні складові кожний вектор сили тиску  $P_i$  для всіх елементарних шарів, отримуємо відповідні набори  $P_{x_i}$  і  $h_{D_{x_i}}$  та  $P_{y_i}$  і  $h_{D_{y_i}}$ . Далі знов повторюється стандартний трьохкроковий алгоритм K123 – визначаємо сумарну силу і центр тиску для кожного орта –  $P_x$  і  $h_{D_x}$  та  $P_y$  і  $h_{D_y}$ ;

- визначається рівнодіюча сила тиску  $P$  і кут напрямку  $\angle\varphi$  для криволінійної поверхні стандартним шляхом.

Таким чином, виконується **стандартна процедура** розрахунку  $P$ ,  $m(P)$  і  $h_D$ , яка складається з **трьох стандартних команд** незалежно від конкретних форм елементів поверхні. Отже, необхідно представити ці команди в загальному вигляді.

В загальному випадку **на форму запису цих стандартних команд** впливають закони зміни:

- густини рідини для  $i$  – го шара  $f(\rho_i)$ ;
- поперечної ширини  $i$  – го шара  $f(b_i)$ ;
- наявність манометричного (вакуумметричного) тиску над вільною поверхнею рідини (або співвідношення загальної висоти площі поверхні і висоти змоченої площі поверхні)  $f_1(h_i)$ ;
- співвідношення між загальною висотою стовпчика води над  $i$  – м шаром поверхні і координатою довільно обраної точки, відносно якої розраховується статичний момент  $f_2(h_i)$ ;
- координати положення нижньої та верхньої кромки  $i$  – го шара поверхні – межі інтегрування, які позначаємо, відповідно,  $h_1$  і  $h_2$ .

### Базовий алгоритм розрахунку K123

Формула розрахунку сили тиску:

$$P = \int_{h_1}^{h_2} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(b_i) dh. \quad (K1)$$

Формула статичного моменту сили тиску:

$$m(P) = \int_{h_1}^{h_2} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(b_i) f_2(h_i) dh. \quad (K2)$$

Координати точки дії сумарної сили тиску:

$$h_D = \frac{m(P)}{P} = \frac{\int_{h_1}^{h_2} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(b_i) f_2(h_i) dh}{\int_{h_1}^{h_2} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(b_i) dh}. \quad (K3)$$

Базовий алгоритм розрахунку K123 **для чисельного розрахунку**

Формула розрахунку сили тиску:

$$P = \sum_{h_1}^{h_2} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(b_i) \Delta h. \quad (K1')$$

Статичний момент сили тиску розраховуємо за формулою:

$$m(P) = \sum_{h_1}^{h_2} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(b_i) f_2(h_i) \Delta h. \quad (K2')$$

Координати точки дії сумарної сили тиску визначаються:

$$h_D = \frac{m(P)}{P} = \frac{\sum_{h_1}^{h_2} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(b_i) f_2(h_i) \Delta h}{\sum_{h_1}^{h_2} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(b_i) \Delta h}. \quad (K3')$$

Для плоскої поверхні переріз епюри тиску має форму трикутника  $\triangle ABE$  (рис. 1.а). Представлену епюру можемо замінити системою елементарних епюр, які складаються із простих паралелепіпедів. Із достатньою для інженерного розрахунку точністю ми визначаємо об'єм  $i$ -го сегмента епюри і його центр ваги. У такий спосіб ми отримали величину, напрямок дії і точку прикладання (центр тиску) сили тиску на кожний шар поверхні і всю означену поверхню (рис. 1.б). Питання точності інженерного розрахунку розглянуто в роботі [1].

Плоска поверхня  $AB$  (рис. 1.а) може бути ламаною сегментною поверхнею  $AFB$  (рис. 1.в). Переріз епюри гідростатичного тиску показано у вигляді двох епюр (в перерізі показано контур): трикутник  $\triangle AFG$  і трапеція  $FJEB$ . Епюра є віртуальною фігурою, яка не існує в реальності, але вона є зручним способом відображення величини тиску на кожний елемент поверхні.

Аналогічний вигляд епюри гідростатичного тиску ми отримали, вигнувши розглянуту плоску поверхню в десяти означених точках (десяти сегментна апроксимація сектора «чверть кола» ламаною лінією  $AB$ , рис. 1.г) [2]. Між точками ми зберегли плоску поверхню і маємо відповідну систему епюр тиску. Розрахунок об'єму і центру ваги кожної епюри дозволяють визначити всі характеристики системи сил тисків на  $n = 10$  шарів поверхні  $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}\}$ , (рис. 1.д).

Наприклад, величину, напрямок і точку дії (центр тиску) сили  $P_i$  (рис. 1.д,е) можна визначити через: координати точок  $A_i$  і  $B_i$  (рис. 1.д), фіксований крок зміни куту  $\angle \alpha_i$  та заданий радіус  $R$  (рис. 1.е). Кут вектора сили тиску  $P_i$  пов'язано із кутом нахилу  $\angle \beta_i$  шара поверхні  $A_i B_i$  (рис. 2.а).

Координати центра тиску  $h_{D_{xi}}$ ,  $h_{D_{zi}}$  для  $i$ -го шара розташовані на перерізі поверхні по осі симетрії – між точками  $A_i$  і  $B_i$  (рис. 2.а). Цей факт пов'язано із тим, що об'єм епюри визначає тільки модуль сили тиску, а сама дія (тиск рідини на поверхню) відбувається в плоскості поверхні. Іншими словами, центр тиску на  $i$ -тий шар поверхні знаходиться в точці проєкції центра ваги епюри на поверхню  $i$ -го шара.

Систему сил тиску  $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}\}$  (рис. 1.д) можна привести до рівнодіючої через відповідні ортогональні проєкції  $P_{x(i)}$  і  $P_{z(i)}$  кожної сили  $P_i$ , та їх координати центра тиску  $h_{D_{xi}}$ ,  $h_{D_{zi}}$  (рис. 2.б). На заключному етапі

об'єднання окремих рішень – процес композиції – система сил тиску до єдиної рівнодіючої також приводиться за стандартним алгоритмом K123.

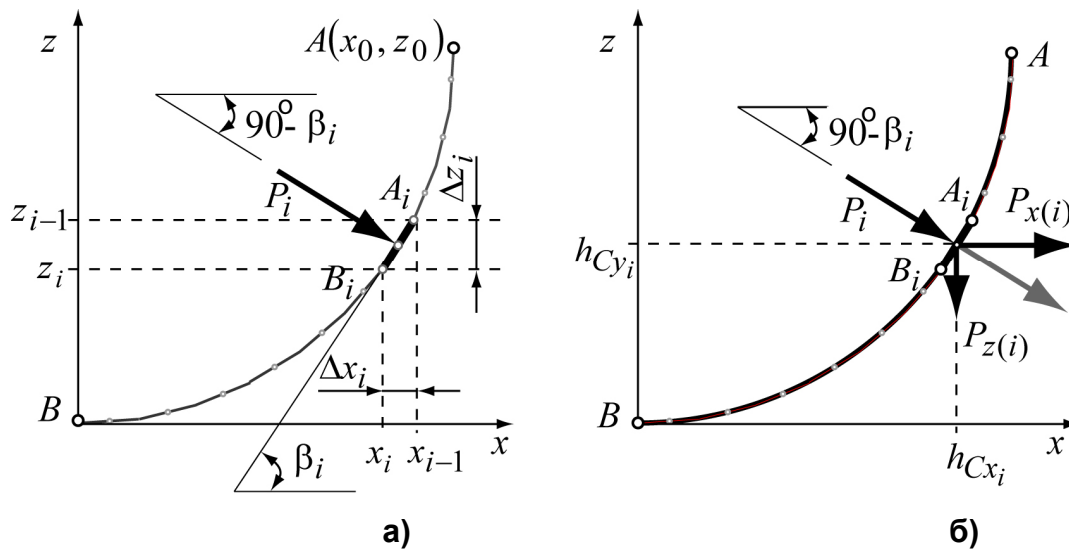


Рис. 2. Визначення параметрів вектора сили тиску на елемент поверхні: **а)** кут дії і вектор сили тиску на  $i$ -й шар поверхні; **б)** вертикальна і горизонтальна складові вектора сили тиску

Розглянемо варіанти реалізації алгоритму K123 для чисельного розрахунку на конкретних прикладах. Саме реалізація алгоритму K123 чисельними методами дозволяє:

- визначити необхідну кількість заданих параметрів для гідростатичного тиску на криволінійну поверхню;
- зберегти проміжні розрахунки в масивах;
- перевірити результати розрахунку в кожній ітерації;
- провести налагодження конкретної реалізації алгоритму K123 в системах комп'ютерної алгебри;
- виводити результати обчислення на екран;
- проводити розрахунки в кроковому режимі та перевіряти коректність умов виходу із циклу;
- при наявності помилок, перевіряти результати проміжних розрахунків на тестових розрахунках.

Спочатку розглянемо *тестовий приклад* умовної задачі, яка має просте аналітичне рішення і гарантовану точну відповідь.

### ЗАДАЧА № 1

За основу візьмемо криволінійну поверхню з поперечним профілем «чверть кола», заданим радіусом  $R = 1$  м і шириною  $b = 2$  м. Приклад перерізу такої поверхні представлено на рисунках: 1.г,д,е та 2.а,б. Послідовність розрахунку за алгоритмом K123 і робочі формули для даного простого тестового прикладу представлено в табл.1.

Таблиця 1

№	Формула	Примітка
1	$x(0) = R; z(0) = 0;$	Початкові координати точки А (рис.2.а)
2	$\Delta\alpha i = \pi/2n; \alpha(i) = \Delta\alpha i \cdot i$	Крок центрального кута і величина кута на $i$ – й ітерації (рис.1.е)
3	$x(i) = R \cos(\alpha(i)); z(i) = \sqrt{R^2 - x(i)^2}$	Координати точки В для $i$ – ї ітерації (рис.2.а)
4	$AB(i) = \sqrt{(x(i-1) - x(i))^2 + (z(i) - z(i-1))^2}$ $S(i) = AB(i) \cdot b$	Висота та площа $i$ – го шару поверхні (рис.2.а)
5	$P(i) = \rho g z(i) S(i)$	Сила тиску на $i$ – й шар поверхні (рис.2.а,б)
6	$\beta(i) = \arctg\left(\frac{y(i) - y(i-1)}{x(i-1) - x(i)}\right)$	Кут нахилу шару до горизонталі (рис.2.а)
7	$\beta c(i) = \Delta\alpha(i) \cdot i - (\Delta\alpha(i)/2);$ $\beta c(i) = \pi/2 - \beta(i)$	Варіанти розрахунку кута нахилу $i$ – ї сили тиску на $i$ – й шар поверхні (рис.2.а,б)
8	$P_x(i) = P(i) \cos(\beta c(i));$ $P_z(i) = P(i) \sin(\beta c(i))$	Ортогональні проекції вектора сили тиску на відповідні осі (рис.2.б)
9	$mP_x(i) = P_x(i) z(i);$ $mP_z(i) = P_z(i) x(i)$	Статичні моменти ортогональних проекцій відносно початку координат (точка 0, рис.1.е)
10	$P_x = \sum_{i=1}^n P_x(i); P_z = \sum_{i=1}^n P_z(i);$ $mP_x = \sum_{i=1}^n mP_x(i); mP_z = \sum_{i=1}^n mP_z(i)$	Ортогональні проекції і статичні моменти рівнодіючої сили тиску на всю поверхню. Рисунок аналогічний рисунку 2.б, але для всієї поверхні АВ
11	$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2};$ $h_{D_x} = mP_x / P_x;$ $h_{D_z} = mP_z / P_z;$ $\angle\varphi = \arctg(P_z / P_x)$	Три характеристики вектора сили тиску на криволінійну поверхню АВ: величина, кут напрямку дії; точка, через яку проходить вектор

Відповідь тестового приклада отримано за стандартними формулами:

$$P_{x\_test} = \rho g (R/2) R b, \quad P_{y\_test} = \rho g (\pi R^2 / 4) b,$$

$$P_{\_test} = \sqrt{P_{x\_test}^2 + P_{y\_test}^2}, \quad \angle\varphi = \arctg(P_{y\_test} / P_{x\_test}),$$

$$h_{D_y} = 0,4244R, \quad h_{D_x} = 0,66R.$$

Результат тестового розрахунку в системі Maple:  
 $P_xTest := 9810.000000$  ;  $P_yTest := 15401.70000$  ;  $PTest := 18260.57126$  ;  
 $PhiTest := 1.003655078$  ;  $PhiTestg := 57.50689608$  ;  
 $hDx\_c\_test := 0.6666666667$  ;  $hDy\_c\_test := 0.42440$  .

Результат розрахунку за алгоритмом K123 в системі Maple:  
 $P_x = 9811.210212$  ;  $P_z = 15409.37338$  ;  $P = 18267.69372$  ;  
 $hDx\_c := 0.6666891445$  ;  $hDy\_c := 0.4243836629$  ;  $Phi\_c := 1.003824863$  ;  
 $Phi\_c := 57.51662433$  .

Оцінка відносної помилки для 10000 ітерацій ( поверхню розділено на 10000 горизонтальних шарів) складає:

$ER_{P_x} := -0.01233651376$  ,  $ER_{P_y} := -0.04982164307$  ,  
 $ER_P := -0.03900458479$  ,  $ER_{hDx\_c\_test} := -0.003371670000$  ,  
 $ER_{hDy\_c\_test} := 0.003849458058$

Помилка результатів не перевищує 0,05% і повністю задовольняє вимогам до інженерного розрахунку.

### АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ АЛГОРИТМУ K123

В алгоритмі K123 розраховано сумарний об'єм і координати положення центра ваги системи елементарних епюр. Перше важливе зауваження: через проекції на поверхню шару центрів ваги кожної елементарної епюри ми знайшли координати точки, яка належить лінії напрямку дії рівнодіючої сили гідростатичного тиску на криволінійну поверхню. Друге важливе зауваження: всі різнонаправлені елементарні сили тиску на кожній шар ми розклали на орти  $P_x(i)$ ,  $P_z(i)$ ,  $h_{D_x}(i)$ ,  $h_{D_z}(i)$  і об'єднали їх за допомогою універсального алгоритму K123.

В якості другого *тестового прикладу* наведено задачу із книги Н.К.Горчина і М.Д.Чертоусова «Гідравліка в задачах» [3, задача №38, стор. 68]. Точна копія малюнку (рис.3), вихідні дані і відповідь аналітичного рішення, які представлено в задачнику, використано для перевірки розрахунків за алгоритмом K123.

### ЗАДАЧА № 2

Визначити величину і напрямок повного тиску на греблю, змочена поверхня якої обмежена по параболі; рівняння параболі відносно осей  $xOz$ :  $x^2 = 4z$ . Вершина параболі лежить на  $H = 9$  м нижче горизонту води; дно лежить на  $H1 = 4$  м над вершиною параболі [3]. Розрахунки провести на один метр ширини греблі  $b = 1$  м (рис. 3).



Послідовність розрахунку за універсальним алгоритмом K123 і робочі формули однакові для задачі №2 і задачі №1. Різниця тільки у перших трьох пунктах таблиці №1.

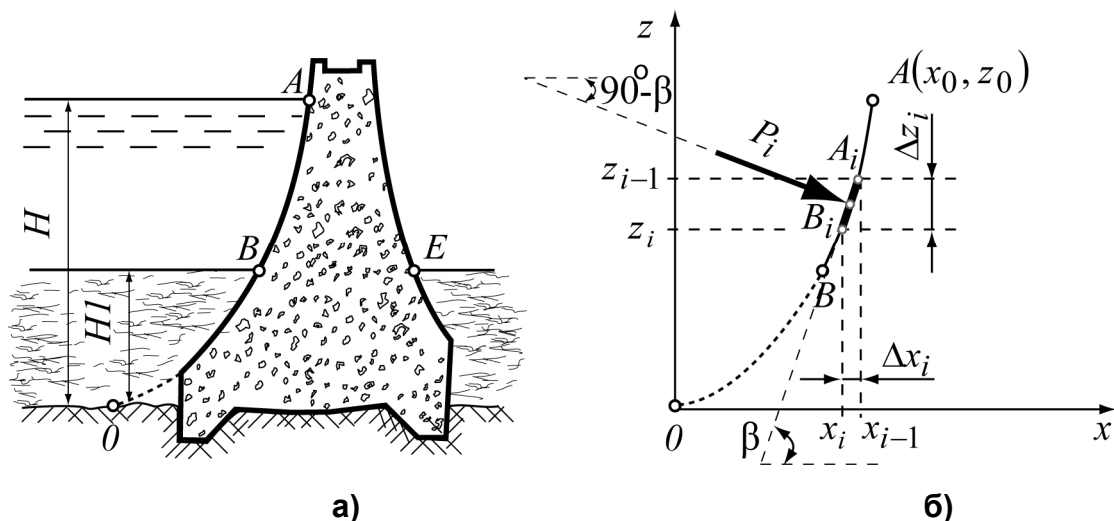


Рис.3. Сила тиску на криволінійну поверхню, яка обмежена параболою: загальний вигляд греблі (а); параметри вектора сили тиску на  $i$  – й плоский елемент, який апроксимує криволінійну поверхню (б).

Для цієї задачі необхідно задати визначення координати  $i$  – го шару за рівнянням параболі. Для початкового рівня води  $z(0) = 9$  з рівняння параболі  $x^2 = 4z$  визначаємо початкову координату  $x(0)$ . Номери пунктів і команди, які треба замінити в таблиці №1 для вирішення цієї задачі представлено в табл. 2.

Таблиця 2

№	Формула	Примітка
1	$z(0) = 9; x(0) = \sqrt{4z(0)}$	Початкові координати точки А (рис.3.б)
2	$n = 30; \Delta z = (H - H1)/n$	Прийнята загальна кількість шарів поверхні $n$ , крок зміни рівня води $\Delta z$ на $i$ – й ітерації (рис. 3.б)
3	$z(i) = H - \Delta z \cdot i; x(i) = \sqrt{4z(i)}$	Координати точки В для $i$ – й ітерації (рис.3.б)

Інші команди алгоритму K123 з таблиці №1 (пункти 4-11) і їх послідовність виконання для задачі № 2 залишаються без змін.

Як варіант – представлено інший спосіб зміни координат: на кожній ітерації ми зменшуємо висоту на постійну величину кроку  $\Delta z$  в межах зміни висот від  $H$  до  $H1$ . У такий спосіб можливо було визначити зміну рівня води і для першої задачі.

Результати розрахунку задачі №2 в системі комп'ютерної алгебри Maple мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} P_x &= 1.287998193 \cdot 10^5 ; & P_z &= 54661.43604 ; \\ P &= 1.399187837 \cdot 10^5 ; \\ hDx_d &:= 3.291707624 ; & hDy_d &:= 4.702129516 ; \\ Phi_c &:= 0.4013543897 ; \\ Phi_c &:= 22.99659085 ; & & 5.708292376 ; & & 4.779121258 . \end{aligned}$$

Похибка чисельного розрахунку складає 0,2 %, і задовольняє загальноприйнятій точності для інженерних розрахунків. Збільшуючи загальну кількість шарів поверхні "n" до 50-ти або 1000 штук ми маємо можливість підвищити точність розрахунку. Враховуючі сучасний рівень обчислювальній потужності процесорів такі зміни практично не впливають на загальний час розрахунку. Порівняння розрахунків для різної кількості шарів дає оцінку точності отриманих результатів.

Універсальний алгоритм K123 дозволяє проводити розрахунки гідростатичного тиску на плоскі і криволінійні поверхні. В основі розрахункової схеми лежать загальні принципи визначення об'єму і центра ваги тіла довільної форми. В задачах гідростатики в якості такого тіла виступає епюра гідростатичного тиску на задану змочену поверхню.

У такий спосіб, через геометричний зміст (форма епюри) для кожної конкретної задачі ми простим стандартним ітераційним алгоритмом визначаємо всі параметри вектора сили тиску: величину, кут дії і центр тиску. Важливо, що в наших прикладах тестових задач ми визначаємо об'єм і центр ваги епюри гідростатичного тиску за допомогою виконання єдиної простої послідовності команд.

В наступній задачі приведено послідовність команд алгоритму K123 (таблиця №1) практично без змін використано для розрахунку тиску на плоску поверхню. Приклад і тестову відповідь приведено із вищеозначеного збірника задач [3, задача №31, ст. 54]. В задачнику представлено стандартний графоаналітичний розрахунок з використанням т.зв. «мотузкового трикутника» в ручному виконанні. Ці методи безпосередньо не дозволяють реалізувати їх в комп'ютерному розрахунку. Універсальний алгоритм K123 розроблено із урахуванням особливостей сучасних систем комп'ютерної алгебри для впровадження сучасних методів як в учбовому процесі, так і для інженерного розрахунку задач будь-якої складності.

### ЗАДАЧА № 3

На малюнку (рис.4.а) зображено частину греблі Chatrain [3]. Дано:  $AB = 10,5$  м,  $BC = CD = DE_1 = 10$  м,  $E_1F_1 = F_1G_1 = 5$  м,  $EE_1 = 0,5$  м,  $FF_1 = 1,25$  м,  $GG_1 = 3$  м. Визначити величину, напрямок повного тиску на греблю і глибину занурення центру тиску. Розрахунки провести на один метр ширини греблі  $b = 1$  м.

Загальноприйнятні стандартні схеми розрахунку передбачають визначення сили тиску на окремі ділянки. Таких ділянок чотири:  $AD$  плоска вертикальна і три плоскі із різними кутами нахилу відносно вертикалі –  $DE$ ,  $EF$ ,  $FG$ .

Отриману систему не паралельних сил, які лежать в одній площині (рис.4.а), можна розкласти на горизонтальні і вертикальні ортогональні складові (рис.4.в,г). Отримані дві системи паралельних сил через визначені координати відповідних центрів тиску (рис.4.д) можна звести до сумарної рівнодіючої сили тиску.

Якщо відтворити дії, які послідовно зображено на рисунку 4.а.в.г.д, ми отримаємо алгоритм K123 для криволінійної поверхні, який було представлено для першої і другої задач. Спочатку вся поверхня розбивається на паралельні шари ( точки  $A, B, C, D \dots$ , рис.4.а). Загальна кількість шарів може обиратись від 100 до 1000 шт. – це підвищує точність розрахунку.

Визначаємо функціональну залежність зміни координат вздовж перерізу поверхні. На даному прикладі ми маємо рівняння вертикальної прямої  $AD$  і прямих, нахилених під різними кутами  $DE$ ,  $EF$ ,  $FG$ . Рівняння прямих можна записати через дві відомі координати вершин.

Наприклад, візьмемо ділянку плоскої поверхні  $DE$ . Розміщуємо початок локальної системи координат в точці  $E(x; z)$  – початок точка  $E(0; 0)$  ( рис.4.б). Довжини  $EE'$   $DE'$  дано за умовою задачі, тоді відповідні координати другої точки  $D(x; z)$  –  $D(0,5; 10)$ . Рівняння лінії  $DE$  для визначення залежності змінної величини  $x$  від фіксованих значень  $z$  має вигляд  $x = D(x) - (D(z) - z) / (D(z) - E(z))$ . Висота стовпчика вода для даного шару поверхні  $H = h_4 = D(y) - E(y)$ . Загальна висота над точкою  $E$  за вихідними даними складає  $H + H_i = h_4 + h_3 + h_2 + h_1$ ).

Номери пунктів і команди, які треба замінити в таблиці №1 для вирішення нашої нової задачі, представлено в таблиці №3.

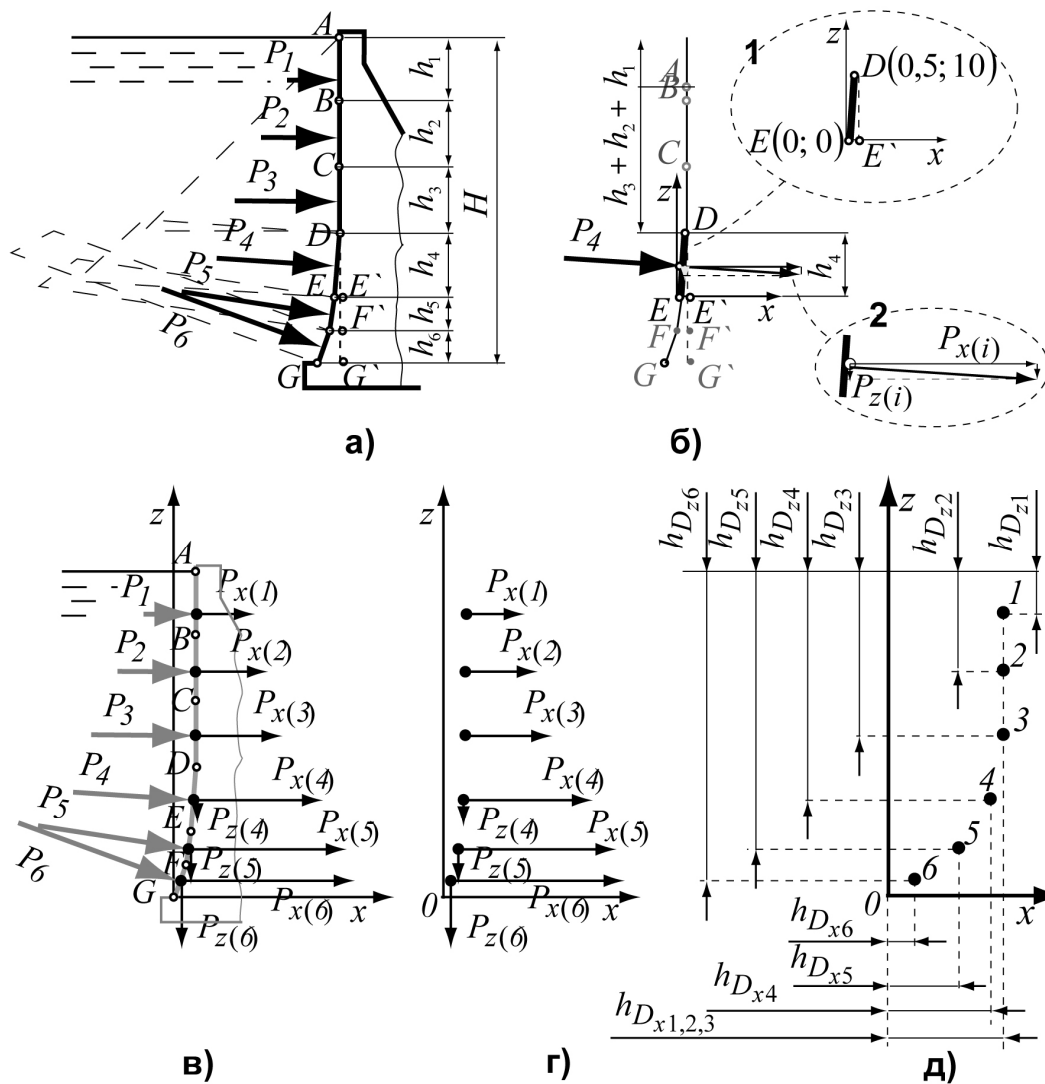


Рис. 4. Визначення параметрів вектора сили тиску на елемент поверхні: сила тиску, кут дії (а); вертикальна і горизонтальна складові вектора сили тиску (б),(в),(г); відстані центрів тиску до осі  $z$  і до вільної поверхні рідини (д)

Таблиця 3

№	Формула	Примітка
1	$z(0) = 10; x(0) = 0,5$	Початкові координати точки $A$ (точка $D(0,5; 10)$ , рис.4.б)
2	$n = 50; \Delta z = (H)/n$	Прийнята загальна кількість шарів поверхні $n$ , крок зміни рівня води $\Delta z$ на $i$ -й ітерації (рис. 3.б)
3	$z(i) = H + Hi - \Delta z \cdot i;$ $x(i) = D(x) - (D(z) - z(i))/(D(z) - E(z))$	Координати точки $B$ для $i$ -ї ітерації (точка $E(0; 0)$ , рис.4.б)

Наприклад, результати розрахунку ділянки  $DE$  задачі №3 в системі комп'ютерної алгебри Maple мають наступний вигляд:

$$P_x = 3.483668595 \cdot 10^6 ; P_z = 1.714024663 \cdot 10^5 ;$$

$$P = 3.487882694 \cdot 10^6 ; h_{Dx\_c} := 5.234675447 ; h_{Dy\_c} := 0.2382662276 ;$$

$$Phi\_c := 0.04916206904 ; Phi\_c := 2.816862144 .$$

Тестовий розрахунок за стандартними формулами дає відповідь:  
 $P := 3.486900471 \cdot 10^6$  .

Похибка чисельного розрахунку складає 0,2 %, і задовольняє загальноприйнятій точності для інженерних розрахунків.

Для задачі № 3, задаючи координати початку і кінця унікальних складових елементів греблі, ми послідовно використовуємо однаковий код програми. У такий спосіб розраховуємо та зберігаємо в масиві всі характеристики векторів елементарних сил тиску:  $P_x(i), P_z(i), h_{D_x}(i), h_{D_z}(i)$ . На заключному етапі універсальний алгоритм K123 дозволяє об'єднати результати окремих розрахунків і визначити всі характеристики вектора рівнодіючої сили тиску на всю змочену поверхню греблі:  $P, h_{D_x}, h_{D_z}, \angle\varphi$ .

### ОЦІНКА ТОЧНОСТІ РОЗРАХУНКІВ

Точність розрахунку за алгоритмом K123 чисельними методами залежить від величини кількості ітерацій. Верхню оцінку відносної помилки розрахунків основних параметрів рівнодіючої сили гідростатичного тиску для різних типів задач представлено на рис. 5.

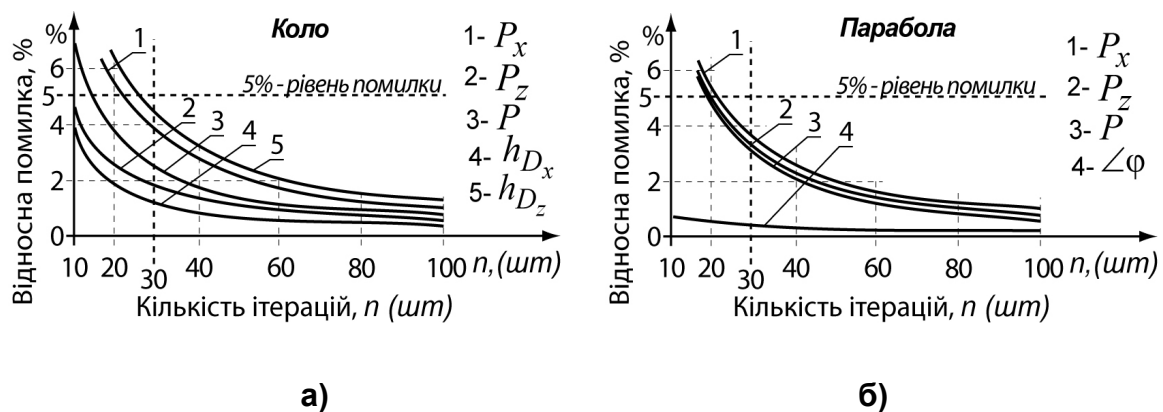


Рис.5. Верхня оцінка відносної помилки в залежності від кількості ітерацій для різних типів задач: **а)** утворююча поверхні «коло»; **б)** утворююча поверхні «парабола»

Рекомендована мінімальна кількість ітерацій (прийнята кількість шарів поверхні) складає 25-30 штук, що відповідає 5-ти % рівню припустимої помилки для загальнотехнічних розрахунках. Невеликі об'єми даних зручно обробляти в звичайних електронних таблицях.

В системі комп'ютерної алгебри Maple визначено рівень нижньої оцінки похибки чисельних розрахунків. Кількість шарів збільшено до 10000 шт. Загальний час обчислення зростає до 4,11 секунд для параболічної поверхні та 5,67 секунд для кола. Оцінка відносної похибки розрахунків не перевищує 0,1%.

## ВИСНОВКИ

Універсальний алгоритм трьох команд базується на єдності геометричного і алгебраїчного методів при визначенні гідростатичного тиску на поверхню. Четвертий вимір епюри гідростатичного тиску на криволінійну поверхню і тривимірність епюри для плоскої поверхні не дозволяють провести наявну геометричну аналогію між аналітичними схемами розрахунку її об'єму і її центру ваги.

Автор сподівається, що обчислювальні експерименти при розрахунку трьох тестових задач дозволяють підтвердити головну тезу про об'єм і центр ваги чотирьохвимірної епюри гідростатичного тиску: її об'єм дорівнює модулю вектора сили тиску, а кут і точку через яку вектор сили проходить, визначає, відповідно, її форма і координати центру її ваги. На відміну від стандартних розрахунків глибина занурення центра тиску  $h_{D_x}$ ,  $h_{D_y}$  і напрямок дії  $\angle \varphi$  сили гідростатичного тиску на поверхні складної форми розраховуються дуже просто методом трьох команд.

В представленому матеріалі для ілюстрації схеми чисельного розрахунку за алгоритмом K123 використано переріз спрощеного апроксимованого зображення 4-х мірної епюри в плоскості  $xOz$  (рис.1.г). Віртуальна природа епюри гідростатичного тиску дозволяє розраховувати елементи епюри тиску на окремі складові шари поверхні, не зважаючи на той факт, що в нашому тривимірному просторі перерізи всієї системи елементів складових епюр «перетинаються». Детальний порівняльний аналіз існуючих схем розрахунку і властивості епюр гідростатичного тиску планується представити в наступних роботах автора.

Алгоритм K123 дозволяє єдиним способом розраховувати гідростатичний тиск на поверхні будь-якої довільної форми. Рухаючись по поверхні вздовж аналітично заданої утворюючої із визначеним кроком, ми розраховуємо всі характеристики елементарних сил тиску на складові шари. Всі результати проміжних розрахунків зберігаються в одномірних масивах. За рахунок великої кількості ітерацій і мінімізації розмірів елементарних шарів можливо апроксимувати криволінійні елементи поверхні плоскими аналогами (прямокутниками). Простота алгоритму, невелика кількість операцій і

універсальність заданої послідовності команд забезпечують надійність і високу точність розрахунку.

Універсальність базового алгоритму K123 при розрахунку гідростатичного тиску на елементарні поверхні, і можливість зберігати всі проміжні характеристики вектора сили дозволяють за допомогою одного і того ж алгоритму об'єднувати результати розрахунку. Існує можливість після розрахунку на основі збереженого іменованого масиву даних проводити детальний аналіз розподілу сили гідростатичного тиску на окремі елементи поверхні, визначати всі характеристики вектора рівнодіючої сили тиску на будь-яку комбінацію елементів поверхні. У такий спосіб створюється єдиний стандартний механізм розрахунку гідростатичного тиску на поверхні довільної форми.

Чисельний метод реалізації алгоритму K123 дозволяє як використовувати потужні аналітичні можливості систем комп'ютерної алгебри Maxima, Octave, Maple, Mathematica, так і проводити розрахунки в простих електронних таблицях MS Office Excel, OpenSoft FreeOffice, Oracle OpenOffice. Результати розрахунку представлених задач і елементи програмного коду можливо знайти на сайті автора [www.ydk.kiev.ua/k123.html](http://www.ydk.kiev.ua/k123.html)

### **Список літератури**

1. *Копаниця Ю.Д.* Комп'ютерний розрахунок сили тиску. Універсальний алгоритм трьох команд – K123. // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – К.: КНУБА, 2012. – Вип.18 – С.148–163.
2. *Рендалл Л.* Закрученные пассажи: Проникая в тайны скрытых размерностей пространства. –М.: Издательство ЛКИ, 2011. – 397 с.
3. *Горчин Н.К.* Гидравлика в задачах / Н.К. Горчин, М.Д. Чертоусов. – Ленинград: «Кубуч», 1927. – 430 с.