НАБЛЮДАЕМОСТЬ ОТДЕЛЬНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.61:531.36

ЛЕОНТЬЕВА Виктория Владимировна
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры прикладной математики и механики Запорожского национального университета.
Научные интересы: математическое моделирование, управление и наблюдение сложных систем.
e-mail: vleonteva15@gmail.com, vleonteva@mail.ru

КОНДРАТЬЕВА Наталия Александровна
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры прикладной математики и механики Запорожского национального университета.
Научные интересы: математическое моделирование и анализ сложных систем.
e-mail: n-kondr@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию проблемы наблюдаемости сложных позитивных динамических систем балансового типа, поведение которых описывается с помощью линейных дифференциальных или разностных векторно-матричных уравнений. Математические модели позитивных систем оперируют *позитивными* (положительными или по крайней мере неотрицательными) в течение всего времени *переменными*, к которым можно отнести, например, время, деньги и товары, популяции людей, растений, животных, электрические заряды, а также вероятности в марковских моделях [1-5] и др. Системы же с такими переменными (*позитивные системы*) отличаются тем, что характеризуются так называемым *свойством позитивности*, накладывающим некоторые ограничения на использование классических методов и применение классических методик регулирования сложных систем и состоящем в том, что любые неотрицательные вход и начальное состояние системы генерируют неотрицательные фазовую траекторию и выход в течение всего времени [6-9].

Актуальность проводимого исследования объясняется тем, что анализ проблемы наблюдаемости является первоначальным этапом при решении задачи наблюдения за сложными системами и показывает принципиальную возможность наблюдения системы, то есть возможность восстановления вектора состояния исследуемой системы по измерениям ее наблюдаемой переменной. Необходимость же в наблюдении таких систем возникает в том случае, когда не все компоненты вектора состояния объекта исследования являются доступными для измерения в силу либо ограниченности измерительных устройств, либо когда проведение измерения переменных состояния не представляется возможным [6, 10]. В таких условиях неполнота математических моделей, описывающих поведение исследуемого объекта, накладывает значительные ограничения на применяемые методы и затрудняет проведение анализа параметров моделей и объекта в целом, а также осуществление прогнозирования, управления и регулирования исследуемым объектом, поскольку полученные при решении задачи наблюдения результаты в сущности являются исходными данными для решения указанных задач.

Несмотря на достаточно широкое исследование позитивных динамических систем в настоящее время, анализ публикаций [1-6] по теме исследования показывает, что в работах, непосредственно посвященных решению задач управления, регулирования и наблюдения за сложными системами, представлены классические методы и подходы теории автоматического регулирования, которые, к сожалению, не позволяют контролировать и сохранять свойства позитивных динамических систем балансового типа (позитивности, продуктивности и асимптотической устойчивости). В этой связи существенно необходимо дальнейшее развитие методов и подходов теории автоматического регулирования с последующей их адаптацией к исследованию и сохранению свойств класса позитивных динамических систем балансового типа.

Целью данной работы является решение проблемы наблюдаемости позитивной динамической системы балансового типа, поведение которой описывается разностными (дискретная модель) или дифференциальными (непрерывная модель) векторно-матричными уравнениями. Для реализации поставленной цели необходимо решение следующих задач: проведение анализа матриц коэффициентов, входящих в разомкнутые математические модели, которые описывают поведение позитивной динамической системы балансового типа; выявление соответствия с полученными ранее выводами по управляемости исследуемых систем в силу действия принципа дуальности управляемости и наблюдаемости; формулирование общих выводов по результатам проведенного в работе исследования.

Описание и анализ математических моделей, описывающих поведение исследуемой системы. Объектом исследования в данной работе является выделенный в классе сложных динамических систем подкласс позитивных динамических систем балансового типа, для которого характерны:

1) балансовые соотношения в моделях, описывающих поведение сложных систем;

2) наличие в моделях ограничений на соответствующие матрицы коэффициентов, обеспечивающие получение неотрицательных решений на бесконечном интервале времени при неотрицательности входных параметров и начальных состояний системы.

При этом под *сложными системами*, согласно [6], понимаются системы с большим количеством взаимосвязанных и взаимодействующих между собой элементов (подсистем), обеспечивающих выполнение системой некоторой достаточно сложной функции. Будем считать, что все подсистемы исследуемой сложной позитивной системы являются взаимосвязанными в модели, общее число взаимосвязей определяется числом n^2. В таком случае схема взаимосвязей *n* подсистем сложной системы представляется на рис. 1, на котором $1,2,3,\ldots,n$ граф описывает соответственно взаимосвязи в $1,2,3,\ldots,n$ подсистеме, а стрелками указывается, с какой j-й $\left(j=\overline{1,n}\right)$ подсистемой взаимосвязана i – я $\left(i=\overline{1,n}\right)$ подсистема.

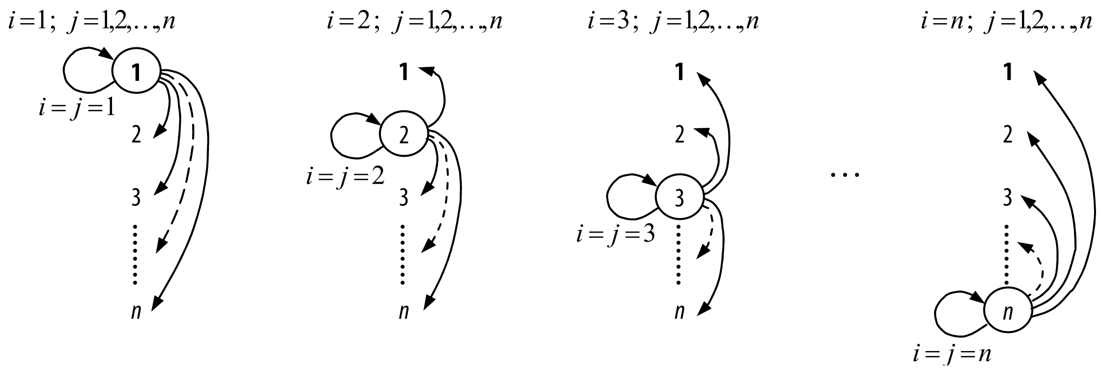

Рисунок 1 – Взаимосвязи между n подсистемами сложной системы

Согласно [7-9], поведение исследуемой системы описывается дискретной (время t принимается дискретным) или непрерывной (время t – непрерывно) математической моделью, представляемой соответственно линейным неоднородным разностным (или дифференциальным) векторно-матричным уравнением первого порядка с матрицами постоянных коэффициентов соответственно вида

$$X_{t+1} = (I-B)^{-1}(A-B)X_t + (I-B)^{-1}C_t \qquad (1)$$

или

$$\dot{X} = (I-B)^{-1}(A-I)X(t) + (I-B)^{-1}C(t), \qquad (2)$$

где $X_t, X(t)-$ $n-$мерные векторы состояния системы, причем предполагается, что о векторах состояния нет полной информации, т.е. не все их компоненты доступны для измерения, $C_t, C(t)-$ $n-$мерные векторы управления системы, являющиеся либо заданным, либо функционально установленным, A, B – постоянные матрицы размерностей $n\times n$, I – единичная матрица размерности $n\times n$. На матрицы коэффициентов в модели накладываются ограничения, обеспечивающие получение неотрицательных решений на бесконечном интервале времени при неотрицательности входных параметров и начальных условий системы. Так, для дискретной модели, описываемой уравнением (1), матрицы $A, B, (A-B), (I-B)^{-1}(A-B)$ должны быть неотрицательными и продуктивными, а для непрерывной модели, описываемой уравнением (2), неотрицательными и продуктивными должны быть матрицы A, B, а матрица $(I-B)^{-1}(A-I)\le 0$.

Математические модели, описываемые уравнениями (1) и (2), являются разомкнутыми: изменение выходной характеристики не оказывает воздействия на входные характеристики позитивной динамической системы. Такие модели существенно зависят только от прошлых и текущих значений входных характеристик и не могут скомпенсировать неизбежные изменения выходной характеристики системы.

В работах [7-8] проведен анализ построенных разомкнутых математических моделей позитивной динамической системы балансового типа, на основе которого было выявлено, что выполнение всех наложенных на матрицы коэффициентов моделей ограничений обеспечивает позитивность и асимптотическую устойчивость получаемых на выходе моделей решений.

Приведенные в данном разделе работы результаты будут играть существенную роль при проведении дальнейшего анализа наблюдаемости исследуемой системы.

Перейдем теперь непосредственно к раскрытию содержания понятия наблюдаемости объекта и оценке указанного свойства объекта исследования, которым в данной работе выступает позитивная динамическая система балансового типа.

Наблюдаемость позитивной динамической системы балансового типа и ее связь с управляемостью исследуемой системы. В данном разделе работы проводится анализ подкласса позитивных динамических систем балансового типа класса сложных динамических систем на предмет их наблюдаемости. Как известно, наблюдаемость системы (объекта) управления является одним из центральных понятий теории автоматического регулирования, которое тесно связано с понятием управляемости. Акцентирование внимания на указанных понятиях связано с тем, что при решении задач управления методами теории пространства состояний предварительно рассматриваются некоторые фундаментальные свойства динамических систем, которые не встречаются в классической теории управления, оперирующей только входными и выходными сигналами элементов рассматриваемой системы. Именно одними из таких свойств и являются управляемость и наблюдаемость системы (объекта) управления). Соответственно первоочередными задачами анализа любой соответствующей модели такой системы являются *задачи об управляемости и наблюдаемости* [6, 9, 10].

В результате проведенного в работе [7] исследования управляемости позитивной динамической системы балансового типа, описываемой векторно-матричными уравнениями (1) или (2), установлено, что при выполнении условий, обеспечивающих получение асимптотически устойчивых и неотрицательных решений на бесконечном интервале времени (ограничений, накладывающихся на матрицы коэффициентов соответствующих дискретной и непрерывной моделей системы), выполняется ранговое условие

$$rang\ M_y = n\,, \tag{3}$$

где матрицы $M_y = \left[\widetilde{B} \vdots \left(\widetilde{A}\widetilde{B}\right) \vdots \left(\widetilde{A}^2\widetilde{B}\right) \vdots \ldots \vdots \left(\widetilde{A}^{n-1}\widetilde{B}\right)\right]_{n\times nn}$ (для системы с дискретным временем) и $M_y = \left[\widetilde{B} \vdots \left(\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{B}\right) \vdots \left(\widetilde{\widetilde{A}}^2\widetilde{B}\right) \vdots \ldots \vdots \left(\widetilde{\widetilde{A}}^{n-1}\widetilde{B}\right)\right]_{n\times nn}$ (для системы с непрерывным временем) называются *матрицами управляемости* позитивной динамической системы балансового типа; $\widetilde{A} = (I-B)^{-1}(A-B)$; $\widetilde{B} = (I-B)^{-1}$; $\widetilde{\widetilde{A}} = (I-B)^{-1}(A-I)$.

Приведенные результаты анализа управляемости свидетельствуют о том, что исследуемая позитивная система является *полностью управляемой,* то есть такой, что ее можно перевести из любого начального состояния $X(0)=X_0$ в любое конечное состояние $X(t_k)=X_k$ за конечное время $t\in[t_0,t_k]$ при соблюдении заданных ограничений, а, следовательно, является возможной для управления и регулирования. Однако возможность управления в данном случае существует только тогда, когда о векторе состояния объекта управления имеется полная информация, т.е. все его компоненты доступны для измерения.

В случае неполной информации о переменных состояния объекта исследования возникает необходимость решения задачи наблюдения, то есть задачи оценивания вектора состояний [10] таким образом, чтобы впоследствии он мог быть использован для управления. Причем для того, чтобы имелась возможность решения указанной задачи, необходимо, чтобы объект управления обладал свойством наблюдаемости.

Таким образом, мы подошли к тому, чтобы перейти к непосредственному анализу наблюдаемости исследуемой системы и определению ее оценки. На содержательном уровне *наблюдаемость системы (объекта) управления* означает принципиальную возможность восстановления вектора состояния системы (объекта) управления по измерениям ее наблюдаемой переменной на некотором интервале.

Примем, что для описываемой системы о векторе состояния нет полной информации, т.е. не все его компоненты доступны для измерения. Будем также полагать, что для данной системы (1) или (2) можно измерить только некоторую линейную комбинацию переменных состояний, называемую *наблюдаемой переменной* и обозначаемую соответственно для системы с дискретным или непрерывным временем в виде

$$Y_t = DX_t\,, \tag{4}$$

$$Y(t) = DX(t), \tag{5}$$

где $D=(d_{ij})-$ известная матрица постоянных коэффициентов соответствующей размерности.

Кроме того, будем считать, что управление $C=C_t$ (для дискретной модели) или $C=C(t)$ (для непрерывной модели) задано и компоненты Y_i соответственно вектора Y_t или $Y(t)$ доступны наблюдателю на отрезке времени $0\le t\le T$ и, следовательно, по результатам наблюдения известны функции $Y_i=Y_{i\,t}$ (для дискретной модели) или $Y_i=Y_i(t)$ (для непрерывной модели), $i=\overline{1,m}$, $0\le t\le T$.

Согласно [6, 10], линейная система (1) (с дискретным временем) или (2) (с непрерывным временем) называется *полностью наблюдаемой*, если любое ее состояние X_t или $X(t)$ можно восстановить по известным значениям C_t и Y_t (для системы с дискретным временем) или $C(t)$ и $Y(t)$ (для системы с непрерывным временем), измеренным на интервале $0\le t\le T$.

При этом необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости системы с дискретным или непрерывным временем является ранговое условие [3, 4, 10], представляемое в виде

$$rang\ M_y = n\,, \tag{6}$$

где матрицы $M_y=\left[\widetilde{B}\vdots(\widetilde{A}\widetilde{B})\vdots(\widetilde{A}^2\widetilde{B})\vdots\ldots\vdots(\widetilde{A}^{n-1}\widetilde{B})\ \right]_{n\times nn}$ (для системы с дискретным временем) и $M_y=\left[\ \widetilde{B}\vdots\left(\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{B}\right)\vdots\left(\widetilde{\widetilde{A}}^2\widetilde{B}\right)\vdots\ldots\vdots\left(\widetilde{\widetilde{A}}^{n-1}\widetilde{B}\right)\right]_{n\times nn}$ (для системы с непрерывным временем) называются *матрицами наблюдаемости*.

Из рассмотрения условия наблюдаемости объекта (системы) управления видно, что с ним тесно связано условие управляемости, определенное ранее для позитивных динамических систем балансового типа. Согласно [4, 10], управляемость и наблюдаемость как характеристические свойства системы обладают в определенном смысле симметрией.

Введем в рассмотрение матрицу $L=(l_{ij})_{n\times n}$ такую, что $L=\widetilde{A}$ (если рассматривается линейная система с дискретным временем) или $L=\widetilde{\widetilde{A}}$ (для системы с непрерывным временем).

Рассмотрим наряду с исходной линейной системой (с дискретным временем) вида

$$X_{t+1} = LX_t + \widetilde{B}C_t\,; \quad Y_t = DX_t \tag{7}$$

или (с непрерывным временем)

$$\dot{X}(t) = LX(t) + \widetilde{B}C(t); \quad Y(t) = DX(t) \tag{8}$$

так называемую *дуальную* (*двойственную)* ей систему соответственно

$$\widetilde{X}_{t+1} = L^T\widetilde{X}_t + D^TC_t\,; \;\; Y_t = \widetilde{B}^T\widetilde{X}_t\,, \tag{9}$$

$$\dot{\tilde{X}}(t) = L^T \tilde{X}(t) + D^T C(t); \quad Y_t = \tilde{B}^T \tilde{X}(t). \qquad (10)$$

Согласно [10], правила получения двойственной системы с дискретным или непрерывным временем следующие:

1) транспонирование матриц $L, \tilde{B}, D$ в исходной системе;

2) перестановка транспонированных входной матрицы $\tilde{B}$ и выходной матрицы D в исходной системе;

3) обращение времени.

При этом исходной системой может выступать система управления (наблюдения). Тогда дуальной ей будет система наблюдения (управления). Этим определяется дуальность систем управления и наблюдения, а, следовательно, и дуальность задач управления и наблюдения.

Существует тесная связь между наблюдаемостью и управляемостью исходной и дуальной систем. Так, матрица управляемости исходной системы (7) или (8)

$$M_y = \left[\tilde{B} \vdots L\tilde{B} \vdots \ \dots \ \vdots L^{n-1}\tilde{B}\right]$$

совпадает с матрицей наблюдаемости дуальной системы (9) или (10)

$$\tilde{M}_н = \left[\left(\tilde{B}^T\right)^T \vdots \left(L^T\right)^T \left(\tilde{B}^T\right)^T \vdots \ \dots \ \vdots \left(\left(L^T\right)^T\right)^{n-1} \left(\tilde{B}^T\right)^T\right] = ,$$

$$= \left[\tilde{B} \vdots L\tilde{B} \vdots \ \dots \ \vdots L^{n-1}\tilde{B}\right]$$

а матрица наблюдаемости исходной системы (7) или (8)

$$M_H = \left[D^T \vdots L^T D^T \vdots \ \dots \ \vdots \left(L^T\right)^{n-1} D^T\right]$$

совпадает с матрицей управляемости дуальной системы (9) или (10)

$$\tilde{M}_y = \left[D^T \vdots L^T D^T \vdots \ \dots \ \vdots \left(L^T\right)^{n-1} D^T\right],$$

Поэтому справедлив следующий принцип дуальности (двойственности) систем управления и наблюдения [6, 10].

Принцип дуальности: Для того, чтобы система управления (7) или (8) была полностью управляемой (полностью наблюдаемой), необходимо и достаточно, чтобы система наблюдения (9) или (10) была полностью наблюдаемой (полностью управляемой).

Приведенные выше результаты исследования управляемости [7] свидетельствуют от том, что если системами (объектами) управления являются позитивные динамические системы балансового типа, описываемые разностным уравнением (7) или дифференциальным уравнением (8), то такие системы управления является полностью управляемыми. Тогда, согласно принципу дуальности, получаем, что если объектами наблюдения являются позитивные динамические системы балансового типа, описываемые разностным уравнением (9) или дифференциальным уравнением (10), то указанные объекты (системы) являются и полностью наблюдаемыми.

Указанная дуальность задач управления и задач оценивания состояния позволяет воспользоваться результатами, полученными в работе [8] при решении задач управления с помощью обратной связи в стационарных системах, для решения задач построения оценок состояния этих систем.

ПРОВЕДЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведем вычислительный эксперимент для частного случая дискретной математической модели позитивной динамической системы балансового типа с двумя $(n = 2)$ подсистемами, описываемой разностным уравнением (1).

Пусть поведение позитивной динамической системы балансового типа с двумя подсистемами ($n = 2$) описывается с помощью разомкнутой дискретной математической модели исследуемой системы, уравнение состояния которой представляет собой линейное неоднородное векторно-матричное разностное уравнение первого порядка с матрицами постоянных коэффициентов вида (1) при следующих входных параметрах [8]

$$n = 2, \ A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 \\ 0,15 & 0,19 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,13 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

С учетом (11) уравнение состояния вида (1), описывающее поведение исследуемой системы, принимает вид

$$\begin{pmatrix} X^1_{t+1} \\ X^2_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1317 & 0,0724 \\ 0,0926 & 0,0756 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1_t \\ X^2_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,1343 & 0,2608 \\ 0,1043 & 1,1734 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1_t \\ C^2_t \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

а уравнение выхода –

$$Y_t = X_t^2, \qquad (13)$$

где $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0,1317 & 0,0724 \\ 0,0926 & 0,0756 \end{pmatrix}$;

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1,1343 & 0,2608 \\ 0,1043 & 1,1734 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли система, описываемая системой (12)-(13), полностью наблюдаемой.

Решение.

Согласно [8], матрицы A, B, $(A-B)$, $\widetilde{A}$ являются неотрицательными и продуктивными. Для проверки использовалось первое из необходимых и достаточных условий продуктивности, согласно которому матрица A является продуктивной, если существует обратная матрица $(I-A)^{-1} \geq 0$. Для данного примера имеем следующие соответствующие неотрицательные обратные матрицы:

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,3268 & 0,4095 \\ 0,2457 & 1,3104 \end{pmatrix} \geq 0;$$

$$(I-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,1343 & 0,2608 \\ 0,1043 & 1,1734 \end{pmatrix} \geq 0;$$

$$(I-(A-B))^{-1} = \begin{pmatrix} 1,1157 & 0,0593 \\ 0,0831 & 1,0682 \end{pmatrix} \geq 0;$$

$$(I-\widetilde{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,1613 & 0,0909 \\ 0,1163 & 1,0909 \end{pmatrix} \geq 0,$$

что означает, что основные ограничения на матрицы коэффициентов выполняются и можно проводить оценку управляемости и наблюдаемости.

Проведем исследование управляемости системы. Матрица управляемости в данном случае имеет вид

$$M_y = \left[\widetilde{B} \vdots \widetilde{A}\widetilde{B}\right]_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 1,1343 & 0,2608 & 0,1569 & 0,1192 \\ 0,1043 & 1,1734 & 0,1129 & 0,1129 \end{bmatrix}_{2\times 4}. \qquad (14)$$

Проверяя выполнение рангового условия (3) получаем, что ранг определенной в (14) матрицы управляемости M_y совпадает с рангом матрицы $\widetilde{B}$, которая в силу ее продуктивности является матрицей полного ранга, и, следовательно, совпадает с размерностью $n = 2$ пространства состояний системы

$$rang\, M_y = rang \begin{bmatrix} 1,1343 & 0,2608 & 0,1569 & 0,1192 \\ 0,1043 & 1,1734 & 0,1129 & 0,1129 \end{bmatrix}_{2\times 4} =$$

$$= rang\, \tilde{B} = rang \begin{bmatrix} 1,1343 & 0,2608 \\ 0,1043 & 1,1734 \end{bmatrix}_{2\times 2} = 2$$

в силу чего получаем, что исследуемая система является полностью управляемой.

Согласно полученным результатам дуальности управляемости и наблюдаемости, можно сделать вывод, что из полной наблюдаемости исследуемой системы (12)-(13) следует ее полная наблюдаемость. Численная проверка матриц наблюдаемости и управляемости также подтверждает этот результат.

Результаты, полученные для дискретной модели, распространяются и на случай непрерывной модели.

Таким образом, результаты, полученные при проведении вычислительного эксперимента, соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований оценивания наблюдаемости позитивной динамической системы балансового типа.

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проведенные в работе исследования наблюдаемости выделенного подкласса позитивных динамических систем балансового типа в классе сложных динамических систем, позволяют сделать вывод, что исследуемая система при выполнении всех накладываемых ограничений на соответствующие матрицы математических моделей, описывающих ее поведение, согласно принципу дуальности управляемости и наблюдаемости систем, является полностью наблюдаемой, а значит, возможной для решения задачи восстановления вектора состояния системы, а, следовательно, в дальнейшем и для управления и регулирования, что в свою очередь позволяет привести разомкнутую модель к замкнутой модели, дает возможность учета неизбежных изменений входных параметров объекта, стабилизации неустойчивого объекта управления, а также позволяет улучшить динамические свойства позитивной системы. В настоящее время ведутся исследования по восстановлению вектора состояния объекта исследования путем построения полного наблюдателя системы в условиях неполной информации о состоянии позитивной динамической системы балансового типа с дискретным и непрерывным временем.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Caswell H. Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation. – [2nd ed.]. – Sunderland (Massachusetts): Sinauer Associates, 2001. – 722 p.
2. Kaczorek T. Some recent developments in positive systems //Proc. 7th Conf. on Dynamical Systems: Theory and Applications. – Łydź, 2003. – P.25-35.
3. Briat C. Robust stability and stabilization of uncertain linear positive systems via integral linear constraints: l1-gain and l∞-gain characterization //International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2013. – №23. – P.1932-1954.
4. Najson F. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma for discrete-time positive systems: A novel simple proof and some related results //International Journal of Control. – 2013. – №86 (10). – P.1813-1823.
5. Rami A. Solvability of static output-feedback stabilization for LTI positive systems //Systems & Control Letters. – 2011. – №60. – P.704-708.
6. Schuppen J.H. Control and System Theory of Positive Systems. – Amsterdam: The Vrije Universitei, 2007. – 245 p.
7. Leontieva V.V., Kondratieva N.A. Razomknutaya diskretnaya matematicheskaya model' pozitivnyh dinamicheskih sistem balansovogo tipa i ee analiz //Zb. nauk. prac'. Visnik ZNU. – 2009. – №1. – S.132-137.
8. Leontieva V.V., Kondratieva N.A. Upravlyaemost' pozitivnoj dinamicheskoj sistemy balansovogo tipa //Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu: Zbirnik naukovih prac'. Fiziko-matematichni nauki. – 2011. – №1. – S.58-66.
9. Leontieva V.V., Kondratieva N.A. Upravlenie v nepreryvnoj matematicheskoj modeli pozitivnoj dinamicheskoj sistemy balansovogo tipa //Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tekhnicheskogo universiteta. – 2009. – Vyp. 2 (35). – S.273-278.
10. Kvakernaak H., Sivan R. Linejnye optimal'nye sistemy upravleniya. – M.: Mir, 1977. – 656 s.

Рецензент: *д.т.н., проф. Тулученко Г.Я.,*
Херсонский национальный технический университет.