

УДК 539.3

*А. А. Дисковский, канд. техн. наук*

## РАСЧЕТ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГОФРИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ ОСРЕДНЕНИЯ

Получены уравнения расчета напряженно-деформированного состояния гофрированного стержня в проекциях на ось, равноотстоящую от вершин гофра. Для их решения применён метод осреднения. Рассмотрена задача оптимального проектирования профиля гофра.

*Ключевые слова:* гофрированный стержень, метод осреднения, уравнения в проекциях, оптимальное проектирование профиля.

**Введение.** Гофрированные стержни находят широкое применение, например, в качестве элементов сетчатой арматуры в железобетонных изделиях. К модели гофрированного стержня приходят также при исследовании упругих свойств тканых материалов, применяющихся в армированных стеклопластиках. Особенности расчета гофрированных стержней можно использовать при решении прямых и обратных задач для более сложных гофрированных конструкций, например, пластин и оболочек.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) гофрированного стержня как кривого стержня требует решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. При большом числе волн гофра численное решение этих уравнений проводится главным образом методом конечных элементов [2] или методом прогонки [3] и вызывает трудности, к тому же такие расчеты затрудняют анализ параметров при проектировании. В этом случае эффективным оказывается применение асимптотического метода осреднения [1].

**Целью исследования является:** построение упрощенной схемы расчета НДС с помощью уравнений в проекциях усилий, момента и перемещений на ось, равноотстоящую от вершин гофра, и метода осреднения, определение эффективных коэффициентов упругости для растяжения и изгиба, постановка и решение задач оптимального проектирования.

**Постановка задачи.** Рассмотрим изгиб гофрированного стержня (рис. 1). Ось стержня представляет собой плоскую кривую, одна из главных осей инерции поперечного сечения стержня расположена в плоскости  $x, z$ , все внешние силы действуют в этой же плоскости. Поэтому ось стержня после деформации останется плоской кривой. Деформации стержня будем считать малыми.

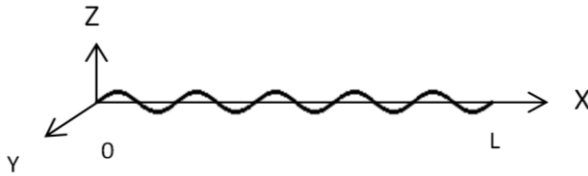


Рис. 1 – Гофрированный стержень  $z = H \sin \frac{2\pi n x}{L}$ ,  $n = 5$

Перейдем к безразмерной координате  $x = 2\pi\alpha/L$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Введем в рассмотрение проекции внутренних усилий  $N_x, Q_z$  на оси  $x, z$  и момент относительно оси  $oy$ :  $M_x = M + zN_x$ . Относительно этих проекций уравнения равновесия криволинейного стержня запишутся так:

$$\frac{dN_x}{dx} = A\bar{L}P_x; \quad \frac{dQ_z}{dx} = A\bar{L}P_z; \quad \frac{d^2M_x}{dx^2} = \bar{L} \left( A\bar{L}P_x + \frac{d}{dx}(zAP_x) \right), \quad (1)$$

где  $A = \sqrt{1 + \beta^2}$ ;  $\beta = \frac{dz}{dx}$ ;  $\bar{L} = \frac{L}{2\pi}$ ;  $P_x = P_t \cos \varphi + P_n \sin \varphi$ ;  $P_z = P_n \cos \varphi - P_t \sin \varphi$ ;

$\varphi$  – угол наклона касательной к криволинейной оси;  $\cos \varphi = \frac{1}{A}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\beta}{A}$ .

Отметим, что хотя уравнения (1) легко решаются в квадратурах, но получаемые при этом интегралы не выражаются через элементарные функции для большинства видов внешней нагрузки. Численное интегрирование при этом также вызывает значительные трудности при достаточно большом числе волн гофра. Ниже предлагается метод решения уравнений (1) лишенный указанных недостатков.

**Метод осреднения.** Если ограничиться случаями плавной внешней нагрузки  $P_t, P_n$ , то правые части уравнений (1) имеют два масштаба изменчивости: один определяется изменением внешней нагрузки, другой – изменением геометрии стержня. Эффективным методом решения таких уравнений является асимптотический метод двух масштабов – метод осреднения [1].

Введем переменную  $\xi = nx$ , которую будем считать независимой от  $x$ . Оператор дифференцирования при этом принимает вид

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (2)$$

Проекции усилий и момента представим в виде следующих асимптотических разложений:

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} N_{xk}(x, \xi); \quad Q_z = \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} Q_{zk}(x, \xi); \quad M_x = \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} M_{xk}(x, \xi), \quad (3)$$

где  $N_{xk}, Q_{zk}, M_{xk}$  – периодические по  $\xi$  функции с периодом.

Подставляя выражения (2), (3) в уравнения равновесия (1), приравнявая слагаемые с одинаковыми степенями  $n$ , после осреднения получаем

$$\frac{dN_{x0}}{dx} = \bar{L}m(AP_x); \quad \frac{dQ_{z0}}{dx} = \bar{L}m(AP_z); \quad \frac{d^2M_{x0}}{dx^2} = \bar{L}^2 m(AP_z); \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_{x1}}{\partial \xi} = \bar{L}(AP_x - m(AP_x)); \quad \frac{\partial Q_{z1}}{\partial \xi} = \bar{L}(AP_z - m(AP_z)); \quad \frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial \xi^2} = \bar{L} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} N_{x0},$$

где  $m(\dots) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\xi$  – оператор осреднения.

**Физические соотношения.** Выберем в качестве искомого проекции перемещений на оси  $ox, oy$ :

$$u_x = u \cos \varphi - w \sin \varphi = \frac{u - \beta w}{A}; \quad w_z = w \cos \varphi + u \sin \varphi = \frac{w + \beta u}{A} \quad (5)$$

и выразим эти проекции через проекции усилий и момента:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \left( \frac{du_x}{dx} + \beta \frac{dw_z}{dx} \right) &= \frac{\bar{L}}{EF} (N_x - \beta Q_z); \\ \frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A^2} \left( \frac{dw_z}{dx} - \beta \frac{du_x}{dx} \right) \right) &= \frac{\bar{L}^2}{EI} (M_x - z N_x). \end{aligned} \quad (6)$$

В силу линейности соотношений (6) перемещения  $u_x, w_z$  можно разделить на перемещения, вызываемые продольным усилием  $N_x (u_x^p, w_z^p)$  и моментом  $M_x (u_x^u, w_z^u)$ :

$$u_x = u_x^p + u_x^u; \quad w_z = w_z^p + w_z^u. \quad (7)$$

Решение модельных задач (рис. 2) показало, что компоненты перемещений (7) можно представить в виде асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} u_x^p &= u_{x0}^p(x) + n^{-1} u_{x1}^p(\xi); \quad w_z^p = n^{-1} w_{z1}^p(\xi) + n^{-2} w_{z2}^p(\xi); \\ u_x^u &= n^{-1} u_{x1}^u(x, \xi) + n^{-2} u_{x2}^u(\xi); \quad w_z^u = w_{z0}^u(x) + n^{-2} w_{z1}^u(\xi), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $u_{x0}^p \sim u_{x2}^p \sim w_{z1}^p \sim w_{z2}^p \sim \frac{N}{EF}$ ;  $u_{z1}^u \sim u_{x2}^u \sim w_{z0}^u \sim w_{z1}^u \sim \frac{M}{EI}$ ;  $u_{x1}^p, w_{z1}^p, w_{z2}^p, u_{x1}^u, u_{x2}^u, w_{z1}^u$  – периодические по  $\xi$  функции с периодом.



Рис. 2 – **Модельные задачи на растяжение и изгиб**

Подставляя разложения (3), (8) в соотношения (6) и приравнивая слагаемые одинакового порядка малости, после осреднения будем иметь:

$$N_{x0} = E(m\tilde{K}_1)^{-1} \frac{du_{x0}^p}{dx}; M_{x0} = EI(mA)^{-1} \frac{d^2w_{z0}^u}{dx^2}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_{x1}^p}{\partial \xi} = \frac{\tilde{K}_1 - m\tilde{K}_1}{m\tilde{K}_1} \frac{du_{x0}^p}{dx}; \frac{\partial^2 w_{z1}^u}{\partial \xi^2} = \frac{A - mA}{mA} \frac{d^2 w_{z0}^u}{dx^2}, \quad (10)$$

где  $\tilde{K}_1(\xi) = \frac{1}{AF} - \frac{\beta}{I} \int_0^\pi z A d\xi$ ;  $m\tilde{K}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1}{AF} + \frac{z^2 A}{I} \right) d\xi$ .

Коэффициенты, входящие в уравнения (9), представляют собой эффективные модули упругости – упругие характеристики некоторой прямой эквивалентной балки, деформации которой близки к деформациям гофрированной. Отметим, что полученные выражения для эффективных модулей упругости обеспечивают предельный переход к прямому стержню и хорошо согласуются с аналогичными коэффициентами, полученными на физическом уровне строгости другими авторами [5].

**Задачи проектирования.** Одним из главных преимуществ описанного выше метода определения напряженно-деформированного состояния гофрированных конструкций является возможность ставить и решать задачи их оптимального проектирования. Эти задачи сводятся к выбору формы профиля гофра, обеспечивающего требуемые механические характеристики гофрированных конструкций. При этом оптимизацию формы гофра можно проводить двумя способами. Первый способ, который назовём локальной оптимизацией, состоит в выборе формы регулярного гофра, который дает наибольшие или наименьшие значения эффективных модулей упругости при неизменной общей длине криволинейной оси гофра. Локальная оптимизация из-за симметрии и периодичности профиля гофра сводится к задаче на одной полуволне гофра. К сожалению, с помощью локальной оптимизации нельзя учесть влияние на форму гофра закона распределения внешней нагрузки по всей длине стержня и граничных условий. Эти влияния можно учесть с помощью глобальной оптимизации – использовании функционально градиентного гофра, у которого шаг и глубина гофрировки непрерывным образом меняется по заданному закону. Этот закон является целевой функцией при глобальной оптимизации [4].

**Локальная оптимизация.** Рассмотрим одну из задач локальной оптимизации. Определим форму волны гофра  $z(x)$ , которая обеспечит наибольшую продольную жесткость стержня при заданном количестве волн гофра. Максимальную продольную жесткость обеспечит такая

форма гофра, при которой  $m\tilde{K}_1 = \min$ . Таким образом, приходим к изопериметрической задаче вариационного исчисления:

$$\int_0^\pi \left( \frac{1}{F\sqrt{1+z_\xi^2}} + \frac{z^2\sqrt{1+z_\xi^2}}{I} \right) d\xi \rightarrow \min_z; \quad (11)$$

$$\int_0^\pi \sqrt{1+z_\xi^2} d\xi = s - \text{const}; \quad (12)$$

$$z(0) = z(\pi) = 0. \quad (13)$$

Решение задачи (11)–(13) вызывает значительные математические трудности. Соответствующее этой задаче уравнение Эйлера представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение. Поэтому рассмотрим такую задачу в упрощенной постановке.

Проанализируем выражение для  $m\tilde{K}_1$ . С физической точки зрения, продольная деформация гофрированного стержня обеспечивается двумя механизмами. Первый – удлинение (укорочение) криволинейной оси стержня. Величина этой составляющей продольной деформации определяется первым слагаемым в выражении для  $m\tilde{K}_1$ . Второй механизм – основной, связан с изгибом криволинейной оси (её выпрямлением или сжатием). Такой механизм определяется вторым слагаемым. По величине это слагаемое значительно больше первого, поскольку  $I \ll F$ . Поэтому первым слагаемым можно пренебречь.

Таким образом, в упрощенной постановке рассматриваемая задача проектирования формулируется так: определить такую форму гофра, при которой спрямление криволинейной оси стержня при продольной деформации будет минимальным

$$J = \int_0^\pi z^2 \sqrt{1+z_\xi^2} d\xi \rightarrow \min_z. \quad (14)$$

Уравнение Эйлера для вариационной задачи (12)–(14) значительно проще

$$2z + 2z z_\xi^2 - z^2 z_{\xi\xi} - \lambda z_{\xi\xi} = 0 \quad (15)$$

и допускает аналитическое решение

$$z = \frac{\pi k}{(1-k^2)K(k)} \operatorname{sn}\left(2K(k)\frac{\xi}{\pi}, k\right), \quad (16)$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода; параметр  $k$  определяет длину дуги волны гофра.

На рис. 3 показаны графики оптимального профиля (16) при  $k = 0,4; 0,6; 0,8$ .

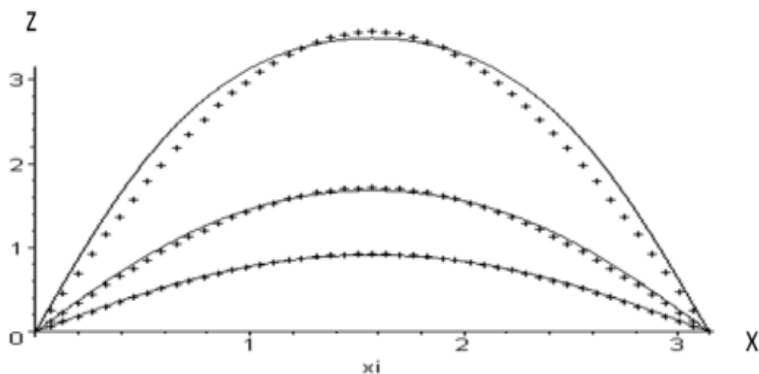


Рис. 3 – Графики оптимального профиля (сплошная линия) и синусоидального той же длины (крестики)

Определим, как изменится эффективный модуль упругости на растяжение, если перейти от синусоидального профиля к оптимальному (16). Как было показано выше, модуль упругости  $m\tilde{K}_1$  для не пологого гофра определяется величиной интеграла  $J$  (14). Найдем относительное увеличение этого интеграла при замене синусоидального профиля на оптимальный

$$\delta = \frac{J_o - J_s}{J_s} 100\% , \quad (17)$$

где  $J_o, J_s$  – значение интеграла (14) соответственно для оптимального профиля и синусоидального той же длины.

Из (17) для выбранных значений  $k = 0,4; 0,6; 0,8$  получаем  $\delta = 0,065; 0,23; 0,365\%$ .

**Выводы.** Предлагаемая методика расчета НДС гофрированного стержня в проекциях компонентов оказывается проще традиционной схемы (криволинейного стержня) и позволяет использовать хорошо разработанный метод осреднения. Такой подход также дает возможность эффективно решать задачи оптимизации. При этом оказалось, что широко использующийся синусоидальный профиль гофра весьма близок к оптимальному точки зрения продольной жесткости.

## БИБЛІОГРАФІЧЕСКІЕ ССЫЛКИ

1. **Andrianov I.** Asymptotic investigation of corrugated elements with quasi-periodic structures / I. Andrianov, G. Awrejcewicz, A. Diskovsky // 10th Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications. – Lodz, 2009. – P. 523–532.
2. **Boubaker B.** Discrete model of fabric yarn deflection and stability analysis / B. Boubaker, B. Haussy, J. Ganghoffer // Multidiscipline Modeling in Materials and Structures. – 2008. – № 4. – P. 267–282.
3. **Grigorenko Ya. M.** Dynamical stability of shells of revolution with corrugated generatrix / Ya. M. Grigorenko, E. I. Bespalova, G. P. Urusova // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2011. – № 10. – P. 62–66.
4. **Dzjuba A. P.** Weight's optimization of the shells based on Pontryagin's maximum principle / A. P. Dzjuba, P. I. Bulakajev // Abstracts of annual scientific conference "GAMM 2001". – Zurich: Swiss Federal Institute of Technology. – 2001. – 33 p.
5. **Sheshenin S.** Asymptotic analysis of plates with periodic cross-sections // Mechanics of Solids. – 2006. – № 41. – P. 57–63.

*О. А. Дисковський, канд. техн. наук*

## РОЗРАХУНОК І ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ГОФРОВАНІХ СТЕРЖНІВ МЕТОДОМ ОСЕРЕДНЕННЯ

Отримані рівняння розрахунку напружено-деформовного стану гофрованого стержня в проєкціях на вісь рівновіддалену від вершин гофру. Для їх розв'язування використано метод осереднення. Розглянута задача оптимального проектування профіля гофра.

*Ключові слова:* гофрований стержень, метод осереднення, рівняння в проєкціях, оптимальне проектування профіля.

*A. A Diskovsky, Associate Professor*

## CALCULATION AND OPTIMAL DESIGN OF A CORRUGATED ROD BY THE AVERAGING METHOD

The equations of deflected mode on projections are received. The equations are solved using the averaging method. The problem of the optimal design of corrugated rod form is considered.

*Keywords:* corrugated rod, averaging method, equations on projections, optimal design of corrugated form.

The conventional investigation of the stress–strain state of the corrugated beam requires the differential equations with variable coefficients to be solved. When the number of crimp waves is high, the straightforward numerical resolution of these equations by the finite element method [2] or the sweep method [3] causes significant computational difficulties. The purpose of the present paper is a justification and estimation of the accuracy of the method of analysis of the corrugated structures [4]. The equations are formulated in terms of projections of forces, moments and displacements on the axis equidistant from the tops of the crimp and the averaging method is applied.

One of the main advantages of the foregoing approach for the prediction of the stress–strain state of corrugated structures is the possibility to set and solve the problems of optimal design. These problems come to the choice of the crimp profile shape that provides the required mechanical properties of the corrugated structures. In this paper, the concern is the choice of the shape of the regular crimp that gives the highest or the lowest value of the effective elastic modulus when the total length of the crimp curvilinear axis is fixed. Due to the symmetry and periodicity of the crimp profile, this optimization comes to the formulation of the problem on one half of the crimp wavelength. So the problem is formulated as to determine the crimp profile  $z(\xi)$  of the one half of the crimp wavelength ( $0 \leq \xi \leq \pi$ ) that ensures the highest longitudinal stiffness with the material mass and fixed crimp wavelength

$$J = \int_0^\pi z^2 \sqrt{1 + z_{\xi\xi}^2} d\xi \rightarrow \min_z; \tag{1}$$

$$\int_0^\pi \sqrt{1 + z_{\xi\xi}^2} d\xi = s - \text{const}. \tag{2}$$

The isoperimetric condition (2) ensures the constancy of the arc length of the crimp wave. The periodical crimp is considered. Particularly, the crimp, for which the integral of the function describing its shape is taken along one period, equals zero. For such crimp the problem (1) and (2) should be completed by the boundary conditions:

$$z(0) = z(\pi) = 0. \tag{3}$$

The corresponding Euler equation for the variational problem (1), (2) can be written in the form

$$2z + 2z z_{\xi\xi}^2 - z^2 z_{\xi\xi\xi} - \lambda z_{\xi\xi} = 0. \tag{4}$$

Solving Eq. (4) by the order reduction method and satisfying the boundary conditions (3), one obtains

$$z = \frac{\pi k}{(1 - k^2) K(k)} \operatorname{sn} \left( 2K(k) \frac{\xi}{\pi}, k \right), \tag{5}$$

where  $\operatorname{sn}(\dots)$  is the elliptic sine;  $K(\dots)$  is the complete elliptic integral of the first kind; parameter  $k$  defines the arc length of the crimp wave.



Substituting the expressions (5) into Eq. (1) we can identify the elastic modulus  $J$  values for the sinusoidal profile  $J_s$  and for the optimal one  $J_0$ . The relative variation of this modulus can be obtained:

$$\delta = \frac{J_0 - J_s}{J_s} 100\%. \quad (6)$$

From (6) one obtains that for the selected values  $k = 0,4; 0,6; 0,8$  replacing of the sinusoidal profile with the optimal, one increases the longitudinal stiffness modulus, by  $\delta = 0:065; 0:23; 0:365\%$  respectively. Therefore, the sinusoidal profile appears to be quite close to the optimal one in terms of the longitudinal stiffness.

## REFERENCES

1. **Andrianov I.** Asymptotic investigation of corrugated elements with quasi-periodic structures / I. Andrianov, G. Awrejcewicz, A. Diskovsky // 10th Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications. – Lodz, 2009. – P. 523–532.
2. **Boubaker B.** Discrete model of fabric yarn deflection and stability analysis / B. Boubaker, B. Haussy, J. Ganghoffer // Multidiscipline Modeling in Materials and Structures. – 2008. – № 4. – P. 267–282.
3. **Grigorenko Ya. M.** Dynamical stability of shells of revolution with corrugated generatrix / Ya. M. Grigorenko, E. I. Bespalova, G. P. Urusova // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2011. – № 10. – P. 62–66.
4. **Dzjuba A. P.** Weight's optimization of the shells based on Pontryagin's maximum principle / A. P. Dzjuba, P. I. Bulakajev // Abstracts of annual scientific conference "GAMM 2001". – Zurich: Swiss Federal Institute of Technology. – 2001. – 33 p.
5. **Sheshenin S.** Asymptotic analysis of plates with periodic cross-sections // Mechanics of Solids. – 2006. – № 41. – P. 57–63.

*Национальная металлургическая  
академия Украины,  
Днепропетровск, Украина*

*Поступила в редколлегию 03.11.2012*