ISSN 2079–1836
2017, вип. 26

УДК 539.3

В. В. Королевич

РАСЧЁТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЕ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСНОВАНИЯМИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Методом малого параметра приводится решение стационарной задачи теплопроводности для ортотропной кольцевой пластины постоянной толщины с теплоизолированными основаниями. Учитывается зависимость теплофизических характеристик композиционного материала пластины от температуры. С точностью до 3-го порядка малости параметра ε найдено аналитическое решение стационарной задачи теплопроводности для ортотропной кольцевой пластины. Распределение температур в ортотропной кольцевой пластине является неосесимметричным при заданных постоянных значениях температур на её контурах.

Ключевые слова: *температура, ортотропная кольцевая пластина, стационарное уравнение теплопроводности, малый параметр.*

Введение. В различных современных машиностроительных и авиационных конструкциях, в аппаратах для пищевой и химической промышленности широко применяются кольцевые пластины из анизотропных материалов. Часто они могут находиться в неоднородных тепловых полях. Это приведет к дополнительным, так называемым температурным напряжениям в анизотропных кольцевых пластинах, которые необходимо учитывать при эксплуатации конструкции.

В имеющейся литературе [1 – 5] по термоупругости пластинок приводятся решения задач стационарной и нестационарной теплопроводности для бесконечных, полубесконечных и односвязных (круг, прямоугольник) анизотропных пластин и отсутствуют решения таких задач для многосвязных анизотропных пластин. Данная работа посвящена решению задачи стационарной теплопроводности для двухсвязной анизотропной пластины.

Цель работы. Исследуется распределение температуры в ортотропной кольцевой пластине постоянной толщины с теплоизолированными основаниями и теплофизическими характеристиками материала, линейно зависящими от температуры, используя метод малого параметра.

Основные уравнения и их решения. Рассмотрим кольцевую пластину постоянной толщины h_0, вырезанную из ортогонально армированной композитной плиты. Пусть на внутреннем контуре (при $r = r_0$) поддерживается постоянная температура T_0^*, а на внешнем контуре (при $r = R$) – T_1^* $\left(T_1^* > T_0^*\right)$. Основания кольцевой пластины при $z = \pm h_0/2$ теплоизолированы. Внутренних источников тепла в пластине не имеется. Пусть теплофизические характеристики материала пластины линейно зависят от температуры T [6].

Наряду с прямоугольной системой координат xOy, оси которой совпадают с главными направлениями тепловой симметрии ортотропного тела, введем полярные координаты r, θ .

Уравнение стационарной теплопроводности для ортотропной пластины в главных осях есть [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\left(T\left(x,y\right)\right)\frac{\partial T\left(x,y\right)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\left(T\left(x,y\right)\right)\frac{\partial T\left(x,y\right)}{\partial y}\right)=0, \tag{1}$$

где $\lambda_x\left(T\left(x,y\right)\right)=\lambda_1\left(1-\gamma T\left(x,y\right)\right), \quad \lambda_y\left(T\left(x,y\right)\right)=\lambda_2\left(1-\gamma T\left(x,y\right)\right)$ – коэффициенты теплопроводности композитного материала в направлении осей *x* и *y* соответственно; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности материала при 0ºС; $\gamma \quad (\gamma > 0)$ – параметр.

Так как коэффициенты теплопроводности линейно зависят от температуры $T\left(x,y\right)$, то вводя новую функцию

$$Y\left(x,y\right)=T\left(x,y\right)-\gamma/2\cdot T^2\left(x,y\right), \tag{2}$$

преобразуем исходное нелинейное дифференциальное уравнение (1) к линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\lambda_1\frac{\partial^2 Y\left(x,y\right)}{\partial x^2}+\lambda_2\frac{\partial^2 Y\left(x,y\right)}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) несложно привести к виду

$$\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)+\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)=0. \tag{4}$$

Перенося второе слагаемое уравнения (4) в правую часть и деля на $\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$, получим следующее уравнение

$$\nabla^2 Y\left(x,y\right)=-\varepsilon\left(\frac{\partial^2 Y\left(x,y\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Y\left(x,y\right)}{\partial y^2}\right), \tag{5}$$

где $\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ – оператор Лапласа; $\varepsilon=\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$ $\left(\left|\varepsilon\right|<1\right)$ – малый параметр.

Будем решать линейное дифференциальное уравнение (5) методом малого параметра. Представим функцию $Y(x,y)$ в виде разложения в ряд по малому параметру ε до 3-го порядка включительно

$$Y(x,y) = Y^{(0)}(x,y) + \varepsilon Y^{(1)}(x,y) + \varepsilon^2 Y^{(2)}(x,y) + \varepsilon^3 Y^{(3)}(x,y) \tag{6}$$

Подстановка разложения (6) в линейное дифференциальное уравнение (5) приводит к системе дифференциальных уравнений для компонент $Y^{(0)}(x,y), Y^{(n)}(x,y)$ $\left(n=\overline{1,3}\right)$:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 Y^{(0)}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Y^{(0)}}{\partial y^2}\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial y^2}\right) = -\left(\dfrac{\partial^2 Y^{(n-1)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 Y^{(n-1)}}{\partial y^2}\right) \quad \left(n=\overline{1,3}\right). \end{cases} \tag{7)-(8}$$

Дальнейшее решение уравнений (7), (8) будем вести в полярных координатах r,θ. Разложение функции $Y(r,\theta)$ в ряд по малому параметру ε запишется так

$$Y(r,\theta) = Y^{(0)}(r,\theta) + \varepsilon Y^{(1)}(r,\theta) + \varepsilon^2 Y^{(2)}(r,\theta) + \varepsilon^3 Y^{(3)}(r,\theta). \tag{9}$$

Система дифференциальных уравнений (7) , (8) в полярных координатах r,θ примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Y^{(0)}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Y^{(0)}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 Y^{(0)}}{\partial \theta^2} = 0 & (10) \\ \dfrac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial r^2} + \dfrac{\partial Y^{(n)}}{r\,\partial r} + \dfrac{\partial^2 Y^{(n)}}{r^2\,\partial \theta^2} = \left[2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 Y^{(n-1)}}{\partial r \partial \theta} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial Y^{(n-1)}}{\partial \theta}\right)\sin 2\theta - \right. & \\ \qquad \left. -\left(\dfrac{\partial^2 Y^{(n-1)}}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Y^{(n-1)}}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 Y^{(n-1)}}{\partial \theta^2}\right)\cos 2\theta \right] \quad \left(n=\overline{1,3}\right). & (11) \end{cases}$$

В *нулевом приближении* компонента $Y^{(0)}(r,\theta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (10) в частных производных.

Разложим функцию $Y^{(0)}(r,\theta)$ в ряд Фурье

$$Y^{(0)}(r,\theta) = Y_0^{(0)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_{2k}^{(0)}(r)\cos 2k\theta. \tag{12}$$

Подставляя разложение (12) в уравнение (10), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $Y_0^{(0)}(r), Y_{2k}^{(0)}(r)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y_0^{(0)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_0^{(0)}}{dr}=0; \\ \dfrac{d^2Y_{2k}^{(0)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_{2k}^{(0)}}{dr}-\dfrac{4k^2}{r^2}Y_{2k}^{(0)}(r)=0, \qquad k=1,2,3,.... \end{cases} \tag{13}$$

Введем новую переменную $t=\ln r$. Тогда система уравнений (13) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y_0^{(0)}}{dt^2}=0; \\ \dfrac{d^2Y_{2k}^{(0)}}{dt^2}-4k^2Y_{2k}^{(0)}=0, \quad k=1,2,3,.... \end{cases} \tag{14}$$

Общее решение уравнений системы (14) есть:

$$\begin{aligned} &Y_0^{(0)}(t)=C_{1;0}^{(0)}\cdot t+C_{2;0}^{(0)}; \\ &Y_{2k}^{(0)}(t)=C_{1;2k}^{(0)}\cdot e^{-2k\cdot t}+C_{2;2k}^{(0)}\cdot e^{2k\cdot t}, \ \ k=1,2,3,..., \end{aligned} \tag{15}$$

где $C_{1;0}^{(0)},C_{2;0}^{(0)},C_{1;2k}^{(0)},C_{2;2k}^{(0)}$ – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Перейдем в формулах (15) к прежней переменной r:

$$\begin{cases} Y_0^{(0)}(r)=C_{1;0}^{(0)}\cdot \ln r+C_{2;0}^{(0)}; \\ Y_{2k}^{(0)}(r)=C_{1;2k}^{(0)}\cdot r^{-2k}+C_{2;2k}^{(0)}\cdot r^{2k}, \ \ k=1,2,3,.... \end{cases} \tag{16}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} Y_0^{(0)}(r_0)=Y_0^*, \\ Y_0^{(0)}(R)=Y_1^*; \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_{2k}^{(0)}(r_0)=0, \\ Y_{2k}^{(0)}(R)=0, \ \ k=1,2,3,..., \end{cases} \tag{17}$$

где $Y_0^*=T_0^*-\dfrac{\gamma}{2}\left(T_0^*\right)^2, \quad Y_1^*=T_1^*-\dfrac{\gamma}{2}\left(T_1^*\right)^2$.

Введем переменную $s=r/R, \ \ s\in[\delta;1]$, где $\delta=r_0/R$. Тогда решение (16) запишется в виде

$$\begin{cases} Y_0^{(0)}(s)=C_{1;0}^{(0)}\cdot \ln s+C_{2;0}^{*(0)}; \\ Y_{2k}^{(0)}(s)=C_{1;2k}^{*(0)}\cdot s^{-2k}+C_{2;2k}^{*(0)}\cdot s^{2k}, \quad k=1,2,3,..., \end{cases} \tag{18}$$

где $C^{*(0)}_{2;0} = C^{(0)}_{1;0} \ln R + C^{(0)}_{2;0}, C^{*(0)}_{1;2k} = C^{(0)}_{1;2k} R^{-2k}, C^{*(0)}_{2;2k} = C^{(0)}_{2;2k} R^{2k}$.

Удовлетворим решение (18) граничным условиям (17). Получим:

$$\begin{cases} Y_0^{(0)}(\delta) = C^{(0)}_{1;0} \cdot \ln \delta + C^{*(0)}_{2;0} = Y_0^*, \\ Y_0^{(0)}(1) = C^{(0)}_{1;0} \cdot \ln 1 + C^{*(0)}_{2;0} = Y_1^*; \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} Y_{2k}^{(0)}(\delta) = C^{*(0)}_{1;2k} \cdot \delta^{-2k} + C^{*(0)}_{2;2k} \cdot \delta^{2k} = 0, \\ Y_{2k}^{(0)}(1) = C^{*(0)}_{1;2k} + C^{*(0)}_{2;2k} = 0, \; k = 1, 2, 3, ... \end{cases} \tag{20}$$

Решение алгебраических систем (19), 20) есть:

$$C^{(0)}_{1;0} = -\frac{\left(Y_1^* - Y_0^*\right)}{\ln \delta}, \; C^{*(0)}_{2;0} = Y_1^*, \; C^{*(0)}_{1;2\text{k}} = 0, \; C^{*(0)}_{2;2\text{k}} = 0.$$

Таким образом, в нулевом приближении функция $Y^{(0)}$ не зависит от угловой координаты θ и определяется по формуле

$$Y^{(0)}(s) = \left[Y_1^* - \frac{\ln s}{\ln \delta} \cdot \left(Y_1^* - Y_0^* \right) \right]. \tag{21}$$

Решение задачи в 1-ом приближении. Уравнение (11) для компоненты $Y^{(1)}(r,\theta)$, с учётом найденного решения (16) для компоненты $Y_0^{(0)}(r)$, примет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 Y^{(1)}(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y^{(1)}(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Y^{(1)}(r,\theta)}{\partial \theta^2} = \\ = -\left(\frac{d^2 Y^{(0)}(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dY^{(0)}(r)}{dr} \right) \cos 2\theta = \frac{2C^{(0)}_{1,0}}{r^2} \cos 2\theta. \end{gathered} \tag{22}$$

Представим функцию $Y^{(1)}(r,\theta)$ в виде ряда Фурье

$$Y^{(1)}(r,\theta) = Y_0^{(1)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_{2k}^{(1)}(r) \cos 2k\theta. \tag{23}$$

Подставляя разложение (23) в дифференциальное уравнение (22) в частных производных, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $Y_0^{(1)}(r), Y_2^{(1)}(r), Y_{2n}^{(1)}(r)$:

$$\begin{cases} (k=0)\ \dfrac{d^2Y_0^{(1)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_0^{(1)}}{dr}=0, \\ (k=1)\ \dfrac{d^2Y_2^{(1)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_2^{(1)}}{dr}-\dfrac{4}{r^2}Y_2^{(1)}(r)=\dfrac{2C_{1,0}^{(0)}}{r^2}, \\ (k\ge 2)\ \dfrac{d^2Y_{2n}^{(1)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_{2n}^{(1)}}{dr}-\dfrac{4n^2}{r^2}Y_{2n}^{(1)}(r)=0. \end{cases} \tag{24}$$

Первое и третье однородные дифференциальные уравнения системы (24) с нулевыми краевыми условиями дают тривиальные (нулевые) решения:

$$Y_0^{(1)}(r)=0, \quad Y_{2k}^{(1)}(r)=0 \text{ для } k\ge 2 . \tag{25}$$

Второе же неоднородное дифференциальное уравнение системы (24) с нулевыми краевыми условиями имеет следующее решение:

$$Y_2^{(1)}(r)=\frac{C_{1,0}^{(0)}}{2\left(R^2+r_0^2\right)}\left[r^2+\frac{R^2r_0^2}{r^2}-\left(R^2+r_0^2\right)\right]. \tag{26}$$

Подставляя решения (25), (26) в разложение (23), получим выражение для компоненты $Y^{(1)}(r,\theta)$:

$$Y^{(1)}(r,\theta)=\frac{C_{1,0}^{(0)}}{2\left(R^2+r_0^2\right)}\left[r^2+\frac{R^2r_0^2}{r^2}-\left(R^2+r_0^2\right)\right]\cos 2\theta . \tag{27}$$

В переменных s, θ компонента $Y^{(1)}(s,\theta)$ есть

$$Y^{(1)}(s,\theta)=\frac{C_{1,0}^{(0)}}{2\left(1+\delta^2\right)}\left[s^2+\frac{\delta^2}{s^2}-\left(1+\delta^2\right)\right]\cos 2\theta. \tag{28}$$

Решение задачи во 2-ом приближении. Уравнение (11) для компоненты $Y^{(2)}(r,\theta)$, с учётом решения (27) для компоненты $Y^{(1)}(r,\theta)$, примет вид

$$\frac{\partial^2Y^{(2)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2Y^{(2)}}{\partial\theta^2}=\Bigg[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2Y^{(1)}}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial\theta}\right)\sin 2\theta-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 Y^{(1)}}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y^{(1)}}{\partial \theta^2}\right)\cos 2\theta\Bigg]=$$
$$=-\frac{2C_{1,0}^{(0)}}{\left(R^2+r_0^2\right)}\left[1+\left(3\cdot\frac{R^2 r_0^2}{r^4}-\frac{\left(R^2+r_0^2\right)}{r^2}\right)\cos 4\theta\right]. \tag{29}$$

Представим функцию $Y^{(2)}(r,\theta)$ в виде ряда Фурье:

$$Y^{(2)}(r,\theta)=Y_0^{(2)}(r)+\sum_{k=1}^{\infty}Y_{2k}^{(2)}(r)\cos 2k\theta. \tag{30}$$

Подставляя разложение (30) в дифференциальное уравнение (29) в частных производных, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $Y_0^{(2)}(r), Y_2^{(2)}(r)$, $Y_4^{(2)}(r), Y_{2k}^{(2)}(r)$:

$$\begin{cases} (k=0)\ \dfrac{d^2Y_0^{(2)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_0^{(2)}}{dr}=-\dfrac{2C_1^{(0)}}{\left(R^2+r_0^2\right)}, \\ (k=1)\ \dfrac{d^2Y_2^{(2)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_2^{(2)}}{dr}-\dfrac{4}{r^2}Y_2^{(2)}(r)=0, \\ (k=2)\ \dfrac{d^2Y_4^{(2)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_4^{(2)}}{dr}-\dfrac{16}{r^2}Y_4^{(2)}(r)= \\ \qquad =-\dfrac{2C_1^{(0)}}{\left(R^2+r_0^2\right)}\left[3\cdot\dfrac{R^2r_0^2}{r^4}-\dfrac{\left(R^2+r_0^2\right)}{r^2}\right] \\ (k\geq 3)\ \dfrac{d^2Y_{2k}^{(2)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY_{2k}^{(2)}}{dr}-\dfrac{4k^2}{r^2}Y_{2k}^{(2)}(r)=0. \end{cases} \tag{31}$$

Второе и четвертое однородные дифференциальные уравнения системы (31) с нулевыми краевыми условиями дают тривиальные (нулевые) решения:

$$Y_2^{(2)}(r)=0,\quad Y_{2k}^{(2)}(r)=0 \ \text{ для } k\geq 3. \tag{32}$$

Первое неоднородное дифференциальное уравнение системы (31) с нулевыми краевыми условиями имеет следующее решение:

$$Y_0^{(2)}(r)=\frac{C_{1,0}^{(0)}}{2\left(R^2+r_0^2\right)\ln\left(\frac{r_0}{R}\right)}\left[\left(R^2-r^2\right)\ln\left(\frac{r_0}{R}\right)-\left(R^2-r_0^2\right)\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]. \tag{33}$$

Третье неоднородное дифференциальное уравнение системы (31) с нулевыми краевыми условиями имеет более сложное решение:

$$Y_4^{(2)}(r) = -\frac{C_{1,0}^{(0)}}{8\left(R^2+r_0^2\right)^2\cdot\left(R^4+r_0^4\right)}\left[\left(3R^4+2R^2r_0^2+3r_0^4\right)\frac{R^4r_0^4}{r^4}-4\left(R^2+r_0^2\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(R^4+r_0^4\right)\frac{R^2r_0^2}{r^2}+\left(R^2+r_0^2\right)^2\left(R^4+r_0^4\right)-\left(R^2+r_0^2\right)^2r^4\right]. \quad (34)$$

Подставляя решения (32) – (34) в разложение (30), получим выражение для компоненты $Y^{(2)}(r,\theta)$:

$$Y^{(2)}(r,\theta) = \frac{-C_{1,0}^{(0)}}{2\left(R^2+r_0^2\right)\ln\left(\frac{r_0}{R}\right)}\left[\left(R^2-r_0^2\right)\ln\left(\frac{r}{R}\right)-\left(R^2-r^2\right)\ln\left(\frac{r_0}{R}\right)\right]-$$
$$-\frac{C_{1,0}^{(0)}}{8\left(R^2+r_0^2\right)^2\cdot\left(R^4+r_0^4\right)}\left[\left(3R^4+2R^2r_0^2+3r_0^4\right)\cdot\frac{R^4r_0^4}{r^4}-4\left(R^2+r_0^2\right)\times\right. \quad (35)$$
$$\left.\times\left(R^4+r_0^4\right)\frac{R^2r_0^2}{r^2}+\left(R^2+r_0^2\right)^2\left(R^4+r_0^4\right)-\left(R^2-r_0^2\right)^2r^4\right]\cos 4\theta.$$

В переменных s, θ компонента $Y^{(2)}(s,\theta)$ есть:

$$Y^{(2)}(s,\theta) = -\frac{C_1^{(0)}}{2\left(1+\delta^2\right)\ln\delta}\left[\left(1-\delta^2\right)\cdot\ln s-\left(1-s^2\right)\cdot\ln\delta\right]-$$
$$-\frac{C_1^{(0)}}{8\left(1+\delta^2\right)^2\left(1+\delta^4\right)}\left[\left(3+2\delta^2+3\delta^4\right)\cdot\frac{\delta^4}{s^4}-4\left(1+\delta^2\right)\left(1+\delta^4\right)\cdot\frac{\delta^2}{s^2}+\right. \quad (36)$$
$$\left.+\left(1+\delta^2\right)^2\left(1+\delta^4\right)-\left(1-\delta^2\right)^2\cdot s^4\right]\cos 4\theta.$$

***Решение задачи в 3-ем приближении*.** Уравнение (11) для компоненты $Y^{(3)}(r,\theta)$ с учётом решения (35) для компоненты $Y^{(2)}(r,\theta)$ примет вид

$$\frac{\partial^2 Y^{(3)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Y^{(3)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y^{(3)}}{\partial\theta^2} = \left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 Y^{(2)}}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial\theta}\right)\sin 2\theta-\right.$$

$$-\left(\frac{\partial^2 Y^{(2)}}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y^{(2)}}{\partial \theta^2}\right)\cos 2\theta\Bigg]=\frac{a_0}{r^2}\cos 2\theta+ \\ +\left(c_0 r^2+\frac{b_0}{r^2}+\frac{b_1}{r^4}+\frac{b_2}{r^6}\right)\cos 4\theta, \tag{37}$$

где $a_0=\frac{C_{1,0}^{(0)}}{2}\cdot\frac{\left[\left(R^2+r_0^2\right)\ln\left(\frac{r_0}{R}\right)-\left(R^2-r_0^2\right)\right]}{\left(R^2+r_0^2\right)\ln\left(\frac{r_0}{R}\right)}$, $c_0=-3C_{1,0}^{(0)}\cdot\frac{\left(R^2-r_0^2\right)^2}{\left(R^2+r_0^2\right)^2\left(R^4+r_0^4\right)}$,

$b_0=\frac{3}{2}C_{1,0}^{(0)}$, $b_1=-12C_{1,0}^{(0)}\cdot\frac{R^2 r_0^2}{\left(R^2+r_0^2\right)}$, $b_2=5C_{1,0}^{(0)}\cdot\frac{\left(3R^4+2R^2r_0^2+3r_0^4\right)R^4r_0^4}{\left(R^2+r_0^2\right)^2\left(R^4+r_0^4\right)}$.

Представим функцию $Y^{(3)}(r,\theta)$ в виде ряда Фурье:

$$Y^{(3)}(r,\theta)=Y_0^{(3)}(r)+\sum_{k=1}^{\infty}Y_{2k}^{(3)}(r)\cos 2k\theta. \tag{38}$$

Подстановка разложения (38) в дифференциальное уравнение (37) в частных производных приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $Y_0^{(3)}(r), Y_2^{(3)}(r), Y_4^{(3)}(r)$, $Y_6^{(3)}(r), Y_{2k}^{(3)}(r)$:

$$\begin{cases} (k=0)\ \ \frac{d^2Y_0^{(3)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dY_0^{(3)}}{dr}=0, \\ (k=1)\ \ \frac{d^2Y_2^{(3)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dY_2^{(3)}}{dr}-\frac{4}{r^2}Y_2^{(3)}(r)=\frac{a_0}{r^2}, \\ (k=2)\ \ \frac{d^2Y_4^{(3)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dY_4^{(3)}}{dr}-\frac{16}{r^2}Y_4^{(3)}(r)=0, \\ (k=3)\ \ \frac{d^2Y_6^{(3)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dY_6^{(3)}}{dr}-\frac{36}{r^2}Y_6^{(3)}(r)=\left(c_0r^2+\frac{b_0}{r^2}+\frac{b_1}{r^4}+\frac{b_2}{r^6}\right), \\ (k\geq 4)\ \ \frac{d^2Y_{2k}^{(3)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dY_{2k}^{(3)}}{dr}-\frac{4k^2}{r^2}Y_{2k}^{(3)}(r)=0. \end{cases} \tag{39}$$

Первое, третье и пятое однородные дифференциальные уравнения системы (39) с нулевыми краевыми условиями дают тривиальные (нулевые) решения:

$$Y_0^{(3)}(r)=0, \quad Y_4^{(3)}(r)=0, \quad Y_{2k}^{(3)}(r)=0 \text{ для } k\geq 4. \tag{40}$$

Второе неоднородное дифференциальное уравнение системы (39) с нулевыми краевыми условиями имеет следующее решение

$$Y_2^{(3)}(r)=\frac{a_0}{4\left(R^2+r_0^2\right)}\left[r^2+\frac{R^2 r_0^2}{r^2}-\left(R^2+r_0^2\right)\right]. \tag{41}$$

Четвёртое неоднородное дифференциальное уравнение системы (39) с нулевыми краевыми условиями имеет более сложное решение

$$Y_6^{(3)}(r)=\frac{c_1}{r^6}-\frac{1}{20}\frac{b_2}{r^4}-\frac{1}{32}\frac{b_1}{r^2}-\frac{b_0}{36}-\frac{c_0}{20}r^4+c_2 r^6\,, \tag{42}$$

где

$$c_1=\left[\frac{c_0}{20}\left(\frac{R^2-r_0^2}{R^{12}-r_0^{12}}\right)R^{10}r_0^{10}+\frac{b_0}{36}\left(\frac{R^6-r_0^6}{R^{12}-r_0^{12}}\right)R^6 r_0^6+\frac{b_1}{32}\left(\frac{R^8-r_0^8}{R^{12}-r_0^{12}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times R^4 r_0^4+\frac{b_2}{20}\left(\frac{R^{10}-r_0^{10}}{R^{12}-r_0^{12}}\right)R^2 r_0^2\right];$$

$$c_2=\left[\frac{c_0}{20}\left(\frac{R^{10}-r_0^{10}}{R^{12}-r_0^{12}}\right)+\frac{b_0}{36}\left(\frac{R^6-r_0^6}{R^{12}-r_0^{12}}\right)+\frac{b_1}{32}\left(\frac{R^4-r_0^4}{R^{12}-r_0^{12}}\right)+\frac{b_2}{20}\left(\frac{R^2-r_0^2}{R^{12}-r_0^{12}}\right)\right].$$

Подставляя решения (40) – (42) в разложение (38), получим выражение для компоненты $Y^{(3)}(r,\theta)$

$$\begin{aligned}Y^{(3)}(r,\theta)&=\frac{a_0}{4\left(R^2+r_0^2\right)}\left[r^2+\frac{R^2 r_0^2}{r^2}-\left(R^2+r_0^2\right)\right]\cos 2\theta+\\&+\left(\frac{c_1}{r^6}-\frac{1}{20}\frac{b_2}{r^4}-\frac{1}{32}\frac{b_1}{r^2}-\frac{b_0}{36}-\frac{c_0}{20}r^4+c_2 r^6\right)\cos 6\theta.\end{aligned} \tag{43}$$

В переменных s, θ компонента $Y^{(3)}(s,\theta)$ есть

$$\begin{aligned}Y^{(3)}(s,\theta)&=\frac{a_0}{4\left(1+\delta^2\right)}\left[s^2+\frac{\delta^2}{s^2}-\left(1+\delta^2\right)\right]\cos 2\theta+\left(\frac{c_1^*}{s^6}-\frac{1}{20}\frac{b_2^*}{s^4}-\right.\\&\left.-\frac{1}{32}\frac{b_1^*}{s^2}-\frac{b_0}{36}-\frac{c_0^*}{20}s^4+c_2^* s^6\right)\cos 6\theta,\end{aligned} \tag{44}$$

где $c_1^*=c_1/R^6$, $b_2^*=b_2/R^4$, $b_1^*=b_1/R^2$, $c_0^*=c_0 R^4$, $c_2^*=c_2 R^6$.

Подставляя найденные решения (21), (28), (36), (44) в разложение (9), получим приближенное решение линейного дифференциального уравнения (5) в частных производных:

$$Y(s,\theta)=Y_2^*+\frac{C_{1,0}^{(0)}}{2\left(1+\delta^2\right)\ln\delta}\left\{\left[2\left(1+\delta^2\right)\ln\delta-\varepsilon^2\left(1-\delta^2\right)\right]\cdot\ln s+\varepsilon^2\left(1-s^2\right)\cdot\ln\delta\right\}+$$

$$+\frac{C_{1,0}^{(0)}}{8\left(1+\delta^2\right)^2\ln\delta}\left\{4\varepsilon\left(1+\delta^2\right)\ln\delta+\varepsilon^3\left[\left(\left(1+\delta^2\right)\ln\delta\right)-\left(1-\delta^2\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left[s^2+\frac{\delta^2}{s^2}-\left(1+\delta^2\right)\right]\cos2\theta-\varepsilon^2\frac{C_{1,0}^{(0)}}{8\left(1+\delta^2\right)^2\left(1+\delta^4\right)}\times\left[\left(3+2\delta^2+3\delta^4\right)\frac{\delta^4}{s^4}-\right.\qquad(45)$$

$$\left.-4\left(1+\delta^2\right)\left(1+\delta^4\right)\cdot\frac{\delta^2}{s^2}+\left(1+\delta^2\right)^2\left(1+\delta^4\right)-\left(1-\delta^2\right)^2s^4\right]\cos4\theta+$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{c_1^*}{s^6}-\frac{1}{20}\frac{b_2^*}{s^4}-\frac{1}{32}\frac{b_1^*}{s^2}-\frac{b_0}{36}-\frac{c_0^*}{20}s^4+c_2^*s^6\right)\cos6\theta.$$

Решение квадратного уравнения (2) есть:

$$T(s,\theta)=\frac{1\pm\sqrt{1+2\gamma\cdot Y(s,\theta)}}{\gamma}. \qquad (46)$$

Представим формулу (46) в следующем виде:

$$\left(\gamma T(s,\theta)-1\right)=\pm\sqrt{1+2\gamma\cdot Y(s,\theta)}. \qquad (47)$$

Анализируя формулу (47), получим следующие два варианта распределения температуры в ортотропном кольцевой пластине в зависимости от значения параметра γ:

1) $T(s,\theta)=\left(1-\sqrt{1+2\gamma\cdot Y(s,\theta)}\right)\Big/\gamma$ при $T_1^*<1/\gamma$,

2) $T(s,\theta)=\left(1+\sqrt{1+2\gamma\cdot Y(s,\theta)}\right)\Big/\gamma$ при $T_1^*\geq1/\gamma$,

где функция $Y(s,\theta)$ задаётся выражением (45).

Выводы. Метод малого параметра позволяет эффективно решать сложные нелинейные задачи теплопроводности для анизотропных кольцевых пластин. Зависимость теплофизических параметров композитного материала пластины от температуры $T(r,\theta)$ может носить и более сложный характер, например, квадратичная, экспоненциальная или логарифмическая зависимости. Ход решения остаётся таким же, как в данной работе, и только на конечном этапе для нахождения распределения температуры в анизотропной кольцевой пластине придется решать кубическое или трансцендентные уравнения для функции $T(r,\theta)$. Общим для всех случаев нелинейности является то, что распределение температуры $T(r,\theta)$ в анизотропных кольцевых пластинах является неосесимметричным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Прусов И. А.*** Термоупругие анизотропные пластинки / И. А. Прусов. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 200 с.

2. ***Уздалев А. И.*** Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела / А. И. Уздалев. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1967. – 165 с.

3. ***Коваленко А. Д.*** Термоупругость пластин и оболочек / А. Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1971. – 108 с.

4. ***Подстригач Я. С.*** Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.

5. ***Новацкий В.*** Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий.– М.: Мир, 1970. – 236 с.

6. ***Дмитриенко Ю. И.*** Механика композиционных материалов при высоких температурах / Ю.И. Дмитриенко. – М.: Машиностроение, 1997. – 365 с.

УДК 539.3

В. В. Королевич

РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОРТОТРОПНІЙ КІЛЬЦЕВІЙ ПЛАСТИНІ З ТЕПЛОІЗОЛЬОВАНИМИ ОСНОВАМИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРУ

Методом малого параметру наводиться розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності для ортотропної кільцевої пластини постійної товщини з теплоізольованими основами. Враховується залежність теплофізичних характеристик композиційного матеріалу пластини від температури. З точністю до 3-го порядку малості параметра ε знайдено аналітичний розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності для ортотропної кільцевої пластини. Розподіл температур в ортотропній кільцевій пластині є неосесиметричним при заданих постійних значеннях температур на її контурах.

Ключові слова: *температура, ортотропна кільцева пластина, стаціонарне рівняння теплопровідності, малий параметр.*

UDC 539.3

U. V. Karalevich

CALCULATION OF THE TEMPERATURE FIELD IN THE ORTHOTROPIC RING PLATE WITH HEAT-INSULATED FOUNDATIONS BY THE METHOD OF SMALL PARAMETER

The method of a small parameter gives the solution of the stationary heat conduction problem for an orthotropic annular plate of constant thickness with thermally insulated foundations. The dependence of the thermophysical characteristics of the composite plate material on temperature is taken into account. Up to the third order of smallness of the parameter ε, analytical solution of the

stationary heat conduction problem for an orthotropic annular plate is found. With the constant temperature values on the contours of the orthotropic annular plate the temperature distribution in it is nonaxisymmetric.

Keywords: *temperature, orthotropic annular plate, stationary heat equation, small parameter.*

Anisotropic annular plates, which can be located in inhomogeneous heat fields, are widely used in modern engineering and aviation structures, in devices for food and chemical industry. This leads to additional so-called thermal stresses in the plates.

The literature [1 – 5] presents solutions of the problems of heat conduction for infinite, semi-infinite and simply-connected (circle, rectangle) anisotropic plates and there are no solutions of such problems for multiply connected anisotropic plates. This work is devoted to the solution of the stationary heat conduction problem for a doubly-connected anisotropic plate.

In the article is investigated by the method of small parameter temperature distribution in the orthotropic annular plate of constant thickness with thermally insulated bases if $z = \pm h_0/2$ and thermophysical characteristics when the material is linearly dependent on the temperature [6]. At the internal contour (at $r = r_0$) a constant temperature T_0^* is maintained, and on the external contour (at $r = R$) it is T_1^* $\left(T_1^* > T_0^*\right)$. Internal heat sources in the plate are not available.

The equation of the stationary heat conduction for an orthotropic plate in the main axes is [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\left(T(x,y)\right)\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\left(T(x,y)\right)\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)=0, \qquad (1)$$

where $\lambda_x\left(T(x,y)\right)=\lambda_1\left(1-\gamma T(x,y)\right)$, $\lambda_y\left(T(x,y)\right)=\lambda_2\left(1-\gamma T(x,y)\right)$ – are coefficients of heat conduction of the composite material in the direction of the x and y axes, accordingly; λ_1, λ_2 – are coefficients of heat conduction of the material at 0 ° C; γ $(\gamma > 0)$ – is parameter.

Since the coefficients of heat conduction linearly depend on temperature $T(x,y)$, then, introducing a new function:

$$Y(x,y) = T(x,y) - \gamma/2 \cdot T^2(x,y), \qquad (2)$$

the non-linear differential equation (1) is transformed to a linear differential equation in partial derivatives

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 Y(x,y)}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 Y(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad (3)$$

which is easy to put in the form

$$\nabla^2 Y(x,y) = -\varepsilon\left(\frac{\partial^2 Y(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y(x,y)}{\partial y^2}\right), \tag{4}$$

where $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ – Laplace operator; $\varepsilon = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$ $\left(|\varepsilon| < 1\right)$ – small parameter.

The differential equation (4) is solved by the method of a small parameter. In polar coordinates r, θ the function $Y(r,\theta)$ is represented by a series for a small parameter ε up to the third order inclusive

$$Y(r,\theta) = Y^{(0)}(r,\theta) + \varepsilon Y^{(1)}(r,\theta) + \varepsilon^2 Y^{(2)}(r,\theta) + \varepsilon^3 Y^{(3)}(r,\theta)... \tag{5}$$

Substituting the decomposition (5) into the equation (4), written in polar coordinates, we obtain a system of differential equations in partial derivatives for the components $Y^{(n)}(r,\theta)$ $\left(n = \overline{0,3}\right)$.

By solving this system successively we obtain an approximate solution of the differential equation (4) for the function $Y(r,\theta)$.

The temperature distribution in the orthotropic annular plate is non-axisymmetric and depends on the value of the parameter γ:

1) $T(s,\theta) = \left(1 - \sqrt{1 + 2\gamma \cdot Y(s,\theta)}\right)\big/\gamma$ when $T_1^* < 1/\gamma$,

2) $T(s,\theta) = \left(1 + \sqrt{1 + 2\gamma \cdot Y(s,\theta)}\right)\big/\gamma$ when $T_1^* \geq 1/\gamma$.

REFERENCES

1. ***Prusov I. A.*** Thermoelastic anisotropic plates/ I. A. Prusov. – Mn.; Publishing house of BSU, 1978. – 200 p. (in Russian)
2. ***Uzdalev A. I.*** Some problems of thermoelasticity of an anisotropic body / A. I. Uzdaev. – Saratov; Saratov University Publishing house, 1967. – 165 p. (in Russian)
3. ***Kovalenko A. D.*** Thermoelasticity of plates and shells / A. D. Kovalenko. – Kiev: Naukova dumka, 1971. – 108 p. (in Russian)
4. ***Podstrigach Ya. S.*** Unsteady temperature fields and stresses in thin plates/ Ya. S. Podstrigach, U.M. Koliano. – Kiev: Naukova dumka, 1972. – 308 p. (in Russian)
5. ***Nowatsky V.*** Dynamic problems of thermoelasticity / V. Nowatsky. – Moskow: Mir, 1970. – 236 p. (in Russian)
6. ***Dmitrienko U. I.*** Mechanics of composite materials at high temperatures/ U. I. Dmitrienko. – Moskow: Mashinostroenie, 1997. – 365 p. (in Russian)

Друкується за рекомендацією програмного комітету VI Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», 25 – 28 травня 2017 р., м. Запоріжжя.

Международный центр
современного образования (ICME),
Чехия, Прага

Поступила в редколлегию 30.03.2017