

DOI:10.15421/420004
УДК 539.3

Л. О. Григор'єва¹, канд. фіз.-мат. наук,
О. І. Безверхий², д-р техн. наук

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРІВ З УРАХУВАННЯМ ДИСИПАЦІЇ ЕНЕРГІЇ

Досліджуються коливання радіально поляризованих циліндрів на резонансних частотах з урахуванням дисипації енергії. Для врахування електричних, механічних та діелектричних втрат вводяться комплексні матеріальні сталі. Для розв'язування використовується варіаційно-сплайновий метод. Проаналізовано коливання циліндрів з п'єзокераміки PZT -4 при моногармонічних електричних навантаженнях та різних граничних умовах на торцях, визначено резонансні частоти, досліджено вплив дисипації енергії на амплітудні значення при резонансах.

Ключові слова: принцип Гамільтона – Остроградського; п'єзокерамічний циліндр; електричне навантаження; вимушені коливання; сплайн-апроксимації; резонансні частоти; дисипація енергії; тангенси втрат.

Вступ. Елементи конструкції з природних і синтезованих п'єзоелектричних матеріалів знаходять широке застосування в пристроях найрізноманітніших галузей техніки. В зв'язку з цим дослідження зв'язаного деформування п'єзоелектричних елементів в різних умовах функціонування мають велике фундаментальне і прикладне значення. Аналітичні розв'язки задач електропружності отримано лише для тіл досить простої геометрії з урахуванням певних спрощень [7 – 9, 11].

У [1, 10] на основі варіаційних принципів [2] з використанням сплайнових апроксимацій [4] по просторовій координаті розроблено числовий метод дослідження пружноелектричних коливань циліндричних перетворювачів, проведено тестування методики, встановлено залежність амплітудних значень переміщень від частоти збурення. Але на резонансних частотах встановлено лише форми коливань, амплітудні значення переміщень на резонансах без врахування дисипації енергії дорівнюють нескінченності, а при числових обчисленнях досягають фізично неможливих значень.

Урахування втрат енергії (механічних, електричних, п'єзоелектричних) в задачах електропружності в моногармонічному наближенні виконується за допомогою процедури введення комплексних матеріальних сталих [6, 7]. Визначення цих матеріальних сталих є складною експериментальною задачею, що потребує набору п'єзокерамічних зразків різної форми з різним напрямком поляризації та складних вимірювальних приладів. Тому знайти повний набір модулів втрат в літературі ви-

явилося проблематичним. Виробники в основному обмежуються лише тангенсами діелектричних втрат, але затухання коливань виникає в першу чергу від механічних втрат. В [5] проводиться визначення тангенсів діелектричних втрат на окремих модах коливань п'єзокерамічного диска. В [12] запропоновано експериментальну методику визначення тангенсів втрат для кераміки APC 841, але відсутні механічні характеристики для цієї кераміки. В [3] проводиться розрахунок нестационарних коливань балки з врахуванням дисипації енергії в п'єзокерамічних накладках. Задача розв'язується в просторі перетворень Лапласа з використанням комплексних матеріальних сталей.

В даній роботі розв'язується задача про вимушені коливання п'єзокерамічного радіально поляризованого циліндра обмеженої довжини з урахуванням електромеханічних втрат енергії за допомогою варіаційно-сплайнового методу [1]. Досліджується залежність між величиною тангенсів втрат та амплітудою коливань на перших двох резонансах.

Постановка задачі. Дослідження осесиметричних гармонічних коливань п'єзокерамічних циліндрів робиться в припущенні моногармонічної залежності між компонентами електромеханічного стану та координатою часу. Для осесиметричних аксіально-радіальних коливань циліндрів потрібно врахувати умови симетрії

$$u_{\theta} = 0; \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_{zr}}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

співвідношення Коші

$$S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad S_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}; \quad S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2S_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (2)$$

градієнтні співвідношення для електричного потенціалу

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (3)$$

а також матеріальні співвідношення, які при радіальній поляризації з урахуванням осевої симетрії (1) мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{13}^E S_{\theta\theta} + c_{13}^E S_{zz} + c_{33}^E S_{rr} - e_{33} E_r; \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{11}^E S_{\theta\theta} + c_{12}^E S_{zz} + c_{13}^E S_{rr} - e_{13} E_r, \\ \sigma_{zz} &= c_{12}^E S_{\theta\theta} + c_{11}^E S_{zz} + c_{13}^E S_{rr} - e_{13} E_r; \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}^E S_{rz} - e_{15} E_z; \\ D_r &= e_{13} (S_{zz} + S_{\theta\theta}) + e_{33} S_{rr} + \varepsilon_{33}^S E_r; \quad D_z = 2e_{15} S_{rz} + \varepsilon_{11}^S E_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Система рівнянь доповнюється граничними умовами для механічних та електричних величин на граничній поверхні S

$$u_S = u_S \vee \sigma_n = \sigma_n; \quad (5)$$

$$\varphi = \overset{o}{\varphi} \vee D_n = \overset{o}{D}_n. \quad (6)$$

Використання варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського в задачах електропружності в циліндричній системі координат [4, 12] має на меті пошук набору амплітудних значень $u_i^a(r, z_i)$, $\varphi_i^a(r, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, що забезпечують стаціонарність функціоналу

$$J(u, \varphi) = \int_V [\sigma_{rr} S_{rr} + \sigma_{zz} S_{zz} + \sigma_{\theta\theta} S_{\theta\theta} + 2\sigma_{rz} S_{rz} - E_r D_r - E_z D_z - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2)] dV. \quad (7)$$

Допустимі функції повинні задовольняти співвідношення Коші (2), градієнтні співвідношення для електричного потенціалу (3), матеріальні співвідношення (4), а також граничні умови (5), (6).

Дисипація енергії в рамках в'язкопружної моделі в моногармонічному наближенні враховується введенням комплексних матеріальних сталей в фізичні співвідношення (4) [6, 7, 11]. Введемо комплексні модулі наступними співвідношеннями:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij}^E (1 + i c'_{ij}); \quad \bar{e}_{ij} = e_{ij} (1 + i e'_{ij}); \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^S (1 + i \varepsilon'_{ij}), \quad (8)$$

де c'_{ij} , e'_{ij} , ε'_{ij} – тангенси кутів механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат.

Надалі будемо використовувати безрозмірні змінні

$$\bar{r} = \frac{r}{R}; \quad \bar{u}_i = \frac{u_i^a}{R}; \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{33}}{c_{33} R^2}}; \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{33} \varepsilon_{33}}}; \quad \bar{\rho} = 1; \\ \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{33}^E}; \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^S}{\varepsilon_{33}^S}; \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^E}}. \quad (9)$$

При такому обезрозміренні вигляд рівнянь не зміниться. Надалі знаки безрозмірності, верхні індекси « a », « E » і « S » будемо опускати.

Внаслідок малості тангенсів втрат вплив дисипації енергії найбільш помітний на резонансних режимах роботи. Таким чином, ми ставимо за мету дослідити вимушені коливання перетворювачів та порівняти коливання п'єзокерамічних тіл на резонансних частотах при різних значеннях тангенсів втрат.

Метод розв'язування. Запропонований підхід до розв'язання задачі полягає в побудові системи рівнянь коливань п'єзокерамічного циліндра, що впливає з умов стаціонарності функціоналу (7). З врахуванням співвідношень Коші, градієнтних залежностей для електричного потенціалу та матеріальних залежностей в (7) основними функціями стають

u_r, u_z, φ , і варіації функціоналу будуть братися по цих змінних. Після підстановки (2) – (4) функціонал осесиметричних коливань п'єзоелектричного циліндра (7) при радіальній поляризації приймає вигляд

$$\begin{aligned}
 A = & \int_{r_0}^{r_k} \int_0^L \left\{ [2c_{13} \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{33} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{u_r}{r} + \right. \\
 & + c_{55} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon_{33} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2] + [2c_{12} \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{11} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + c_{55} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \\
 & + 2e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2] + 2c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2c_{55} \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \\
 & \left. + 2e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2) + c_{11} \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right\} r dz dr. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Отриманий функціонал містить частинні похідні першого порядку по поздовжній та радіальній координаті. Для переходу до системи диференціальних рівнянь відносно координати r розв'язок будемо шукати в вигляді набору дискретних значень $u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i$, пов'язаних з шуканими функціями за допомогою сплайн-апроксимацій.

Для отримання дискретних рівнянь розіб'ємо область по осі r $N-1$ прямими лініями, паралельними осі r , з інтервалом $h_i = z_{i+1} - z_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Представимо розшукувані функції на прямих у вигляді сплайна першого порядку [4], який є кусково-неперервною функцією [1].

Функціонал (10) при переході до нових змінних набуде вигляду

$$A = \int_{r_0}^{r_k} \int_0^L J dz dr = \int_{r_0}^{r_k} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} J dz dr = \int_{r_0}^{r_k} \sum_{i=0}^{N-1} h_i \int_0^1 J_i d\xi dr = \int_{r_0}^{r_k} \sum_{i=0}^{N-1} F_i dr. \quad (11)$$

Розв'язуюча система рівнянь для знаходження переміщень і електричного потенціалу впливає з умов стаціонарності функціоналу (11)

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_{ki}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u'_{ki}} \right) \sum_{i=0}^{N-1} F_i = F_{ki}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = 0; \quad \mathbf{u}_{ki} = \mathbf{u}_{ri}; \mathbf{u}_{zi}, \Phi_1.$$

Шукані величини представимо в вигляді вектора

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y} &= \{u_{r,1}, \dots, u_{r,n}, u_{z,1}, \dots, u_{z,n}, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} = \\
 &= \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}, y_{2n+1}, \dots, y_{3n}\}.
 \end{aligned}$$

Тоді система рівнянь (11) набуває вигляду

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial r^2} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r} + \mathbf{B} \mathbf{Y} = 0. \quad (12)$$

Матриці в (12) мають стрічкову форму, що спрощує знаходження числового розв'язку. Для виключення з системи рівнянь невідомих величин в контурних точках використовується різницева форма для граничних умов.

Нехай циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень

$$\sigma_{rr}(r_0, z) = \sigma_{rz}(r_0, z) = 0; \quad \sigma_{rr}(r_r, z) = \sigma_{rz}(r_r, z) = 0.$$

До електродів на циліндричних поверхнях прикладена різниця потенціалів

$$\varphi(r_0, z) = -V_0; \quad \varphi(r_r, z) = V_0.$$

На торцях розглядатимемо два типи закріплень:

а) циліндр з закороченими торцями, жорстке закріплення

$$u_r(r, 0) = u_z(r, 0) = 0; \quad u_r(r, l) = u_z(r, l) = 0; \\ \varphi(r, 0) = \varphi(r, l) = 0. \quad (13)$$

В різницевій формі маємо

$$u_{r,0} = u_{z,0} = \varphi_0 = 0; \quad u_{r,n+1} = u_{z,n+1} = \varphi_{n+1} = 0;$$

б) циліндр з закороченими торцями, мембранне закріплення

$$u_r(r, 0) = \sigma_{zz}(r, 0) = 0; \quad u_r(r, l) = \sigma_{zz}(r, l) = 0; \\ \varphi(r, 0) = \varphi(r, l) = 0. \quad (14)$$

В різницевій формі маємо

$$u_{r,0} = \varphi_0 = u_{r,n+1} = \varphi_{n+1} = 0; \quad u_{z,0} = u_{z,1}; \quad u_{z,n+1} = u_{z,n}.$$

Отримана система рівнянь розв'язується за допомогою методу колокацій або методу дискретної ортогоналізації. Також порівняння розв'язків з результатами, отриманими при інтегруванні системи рівнянь типу Гамільтона [10] показало гарну збіжність.

Для аналізу коливань циліндра на резонансних частотах потрібно враховувати дисипацію енергії в матеріалі. Для цього вводимо комплексні модулі (8), приймаючи значення $c'_{ij} = e'_{ij} = \varepsilon'_{ij} = c$, щоб змодельовати затухання коливань по всіх параметрах електромеханічного стану. Втрати в матеріалі визначаються неоднозначно, залежать від частоти навантаження та робочої температури, а також умов виготовлення конкретного зразка, тому будемо варіювати значення c .

Аналіз отриманих результатів. Проаналізуємо коливання радіально поляризованого порожнистого циліндра з кераміки PZT-4 [8] при на-

вантаженні різницею потенціалів $2Ve^{icot}$, прикладною до електродованих циліндричних поверхонь. Дослідимо залежність амплітуд коливань від частоти збурення.

Рис. 1 ілюструє залежність амплітудних значень переміщень зовнішньої поверхні циліндра з заземленими закороченими торцями (13) від частоти навантаження для циліндрів з різними внутрішніми радіусами. Бачимо, що зі зростанням товщини стінки власні частоти підвищуються. Для циліндра $R_0 = 0,8R$ $l_z = 5R$ маємо наступний набір частот: $\Omega = [0,876; 0,98; 1,07; 1,22; 1,38; 1,87; 2,32]$.

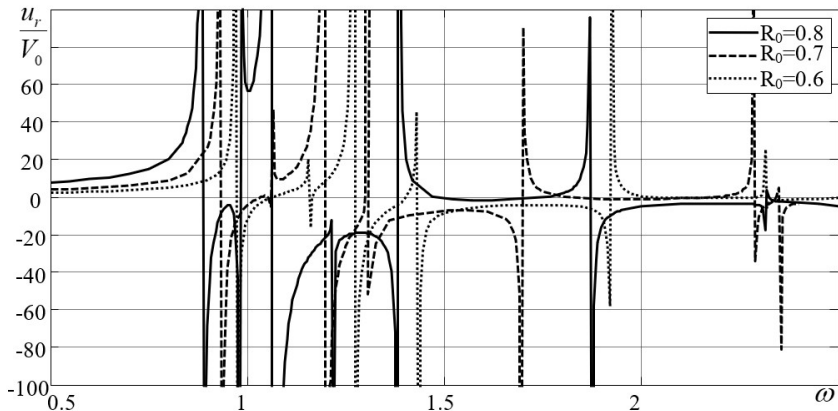


Рис. 1 – Радіальні переміщення зовнішньої поверхні циліндрів довжиною $l_z = 5R$ з жорстко заземленими торцями

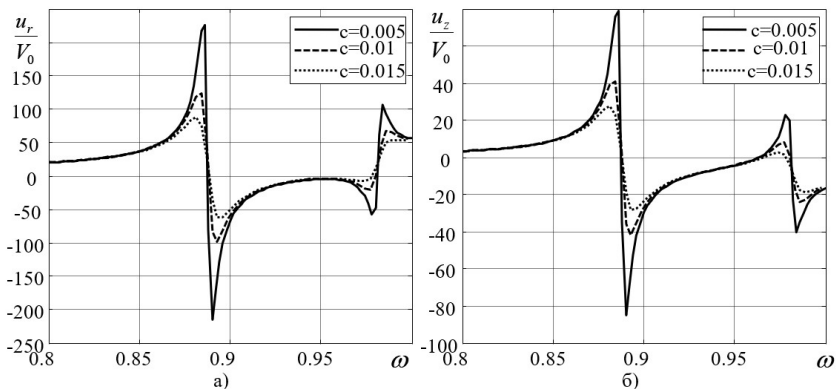


Рис.2 – Амплітудні значення радіальних (а) та поздовжніх (б) переміщень циліндра $l_z = 5R$, $R_0 = 0.8R$ в околі перших резонансів

На рис. 2 наведено криві радіальних та поздовжніх переміщень точки зовнішньої поверхні посередині довжини циліндра при різних значеннях тангенсів втрат в околі першого та другого резонансу. Бачимо, що перший резонанс більш сильний за другий, коливання відбуваються переважно в радіальному напрямку. Другий резонанс по амплітуді переміщень не перевищує 40% від першого. Для переходу до розмірних змінних отримані результати помножуються на радіус R_1 циліндра та безрозмірне значення амплітуди прикладеної різниці потенціалів V_0 .

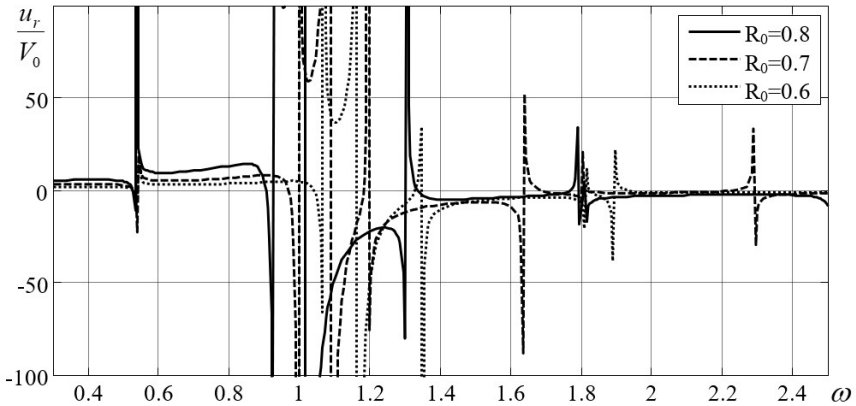


Рис. 3 – Радіальні переміщення зовнішньої поверхні циліндрів довжиною $l_z = 5R$ з мембранно закріпленими торцями

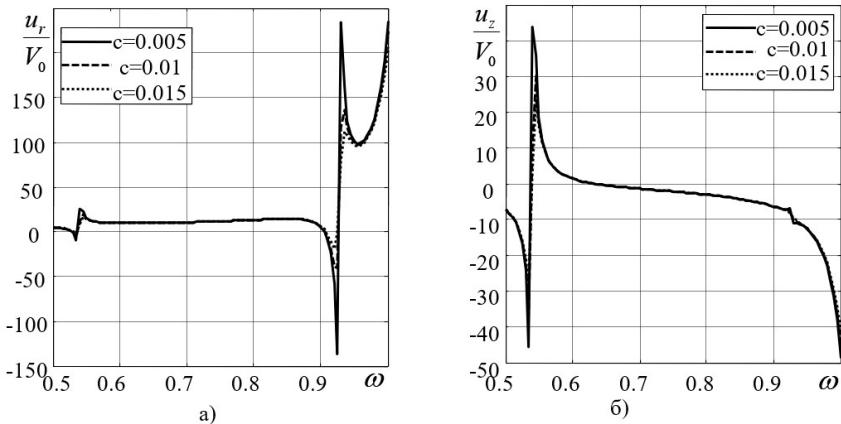


Рис. 4 – Амплітудні значення радіальних (а) та поздовжніх (б) переміщень циліндра $l_z = 5R$, $R_0 = 0,8R$ з мембранно закріпленими тоццями в околі перших двох резонансів

На рис. 3 зображено радіальні переміщення точки зовнішньої поверхні циліндра з мембранно закріпленими закороченими торцями (14) від частоти навантаження для циліндрів з різними внутрішніми радіусами. Бачимо, що перша власна частота для всіх циліндрів практично однакова. З рис. 4, де наведено криві радіальних та поздовжніх переміщень при різних значеннях тангенсів втрат в околі першого та другого резонансу, можемо зробити висновок, що ця мода відповідає поздовжнім коливанням. Таким чином, співпадіння першого резонансу пояснюється однаковою довжиною розглянутих циліндрів. На другому резонансі коливання відбуваються переважно в радіальному напрямку. При зменшенні внутрішнього радіусу друга резонансна частота зростає. Для циліндра $R_0 = 0,8R$ $I_z = 5R$ маємо наступний набір частот: $\Omega = [0,54; 0,925; 1,02; 1,3; 1,79; 1,82]$. Поява першої поздовжньої моди на відносно невеликих частотах порівняно з жорстко закріпленим циліндром пояснюється меншою жорсткістю системи.

Висновок. Врахування дисипації енергії дозволяє визначати дійсні амплітуди коливань на резонансних частотах. Отримані в роботі результати ілюструють механізми затухання коливань в п'єзокераміці та можуть бути використані для дослідження коливань п'єзокерамічних циліндрів на резонансних модах. Описані залежності та визначені резонанси необхідні при проектуванні реальних перетворювачів. Але зміна інших умов навантаження (збурення на частоті, яка дещо відрізняється від резонансної, зміна температури, впливу корпусу перетворювача, вплив провідності електричного кола та врахування опору навколишнього середовища) також впливає на реальні амплітуди коливань і якість сигналу, що випромінюється п'єзоелементом. Дослідження таких станів стане продовженням розглянутої задачі.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Безверхий О.І., Григор'єва Л.О.** Варіаційно-сплайновий метод в задачах дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд. Вип. 98. 2017. С. 149–161.
2. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
3. **Дубенец В.Г., Савченко Е.В., Деркач О.Л.** Нестационарные колебания балки с электровязкоупругими диссипативными накладками // Вісник Чернігівського державного технологічного університету. 2013. № 3 (67) С.53–61.
4. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошніченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М: Наука, 1980. 352 с.
5. **Карлаш В.Л.** Ще раз про втрати енергії в п'єзокерамічних резонаторах // Акуст. вісник. 2015. Т. 17, № 1. С. 34–47.
6. **Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.** Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. Житомир: ЖГТУ, 2005. 428 с.
7. **Партон В.З., Кудрявцев Б.А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

8. **Шульга Н.А., Карлаш В.Л.** Резонансные электромеханические колебания пьезоэлектрических пластин. К.: Наукова думка, 2007. 272 с.
9. **Шарапов В.М., Сотула Ж.В., Куницкая Л.Г.** Электроакустические преобразователи / Под ред. В.М. Шарапова. М.: Техносфера, 2013. 296 с., ISBN 978-5-94836-357-8.
10. **Bezverkhyi O.I., Grigoryeva L.O.** Comparative Analysis of Two Methods Used for the Investigation of Harmonic Vibrations of Piezoceramic Cylinders // Journal of Mathematical Sciences, 2019. Vol. 240, No. 2, July. DOI 10.1007/s10958-019-04342-6.
11. **Ikeda, T.** Fundamentals of Piezoelectricity. Oxford University Press, Oxford (1996).
12. **Uchino K., Zhuang Y. and S.O. Ural Loss.** Determination Methodology for a Piezoelectric Ceramic: New Phenomenological Theory and Experimental Proposals // Journal of Advanced Dielectrics. 2011. Vol. 1. No. 1. P.17–31. DOI: 10.1142/S2010135X11000033.

УДК 539.3

*Л. О. Григорьева¹, канд. физ.-мат. наук,
О. И. Безверхий², д-р техн. наук*

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

Исследуются колебания радиально поляризованных цилиндров на резонансных частотах с учетом диссипации энергии. Для учета электрических, механических и диэлектрических потерь вводятся комплексные материальные постоянные. Для решения используется вариационно-сплайновый метод. Проанализированы колебания цилиндров из пьезокерамики PZT-4 при моногармонических электрических нагрузках и различных граничных условиях на торцах, определены резонансные частоты, исследовано влияние диссипации энергии на амплитудные значения на резонансах.

Ключевые слова: принцип Гамильтона – Остроградского; пьезокерамический цилиндр; электрическая нагрузка; вынужденные колебания; сплайн-аппроксимации; резонансные частоты; диссипация энергии; тангенсы потерь.

UDC 539.3

*L. O. Grigoryeva¹, PhD (Phys.-Math.),
O. I. Bezverkhyi², Dr. Sci. (Tech.)*

RESONANT OSCILLATIONS OF PIEZOCERAMIC CYLINDERS TAKING INTO ACCOUNT ENERGY DISSIPATION

The vibrations of radially polarized cylinders at resonance frequencies are studied taking into account energy dissipation. To take into account electric, mechanical and dielectric losses, complex material constants are introduced. The variation-spline method is used for solving. The oscillations of cylinders made of PZT-4 piezoceramics under monoharmonic electrical loads with various boundary conditions at the ends are analyzed, resonant frequencies are defined, the influence of losses tangents values on resonance amplitudes is investigated.

Keywords: principle of Hamilton – Ostrogradsky; piezoceramic cylinder; electric load; forced oscillation; spline approximation; resonant frequencies; energy dissipation; tangents of losses.

In this paper, we solve the problem of forced oscillations of a piezoceramic radially polarized cylinder of limited length, taking into account electromechanical energy losses using the variational-spline method [1]. The account of energy losses (mechanical, electrical, piezo-electric) in the problems of electroelasticity in the monoharmonic approximation is performed using the procedure of introduction of complex material constants [6, 7]. Losses in the material are determined ambiguously, depending on the load frequency and work temperature, as well as the conditions of manufacturing of a particular sample, so we will vary the value of loss tangents. The relationship between the magnitude of the loss tangents and the amplitude of oscillations on the first two resonances is investigated.

The proposed approach to problem solving is based on a system of oscillation equations of a piezoceramic cylinder, that follows from the stationarity conditions of functional (7). Taking into account the Cauchy relations (2), gradient dependences for the electric potential (3) and material dependences (4), the functional of the axisymmetric oscillations of the piezoelectric cylinder (7) with radial polarization takes the form (10). The solving equations system (12) for finding the displacements and the electric potential follows from the stationarity conditions of functional (11). The matrices in (12) have a tape shape, which simplifies finding a numerical solution. To exclude from the equations system of unknown quantities in the contour points, a difference form for boundary conditions is used.

We analyze the oscillations of a radially polarized hollow cylinders made of PZT-4 ceramics [8] under a potential difference load applied to electroded cylindrical surfaces. The oscillations of the cylinders with clamped shorted ends and with membrane fixed shorted ends were compared. The dependence of the outer surface oscillations from the load frequency for cylinders of constant length with different internal radii was studied. There are determined resonant frequencies for them. The dependence of the amplitude displacements of the outer surfaces points of the cylinders from the magnitude of the loss tangents was studied.

The results obtained in this paper illustrate the mechanisms of vibration damping in piezoceramics and can be used for studying of actual oscillations of real piezoceramic cylinders on resonant modes.

REFERENCES

1. **Bezverkhyi O.I., Grigoryeva, L.O.** Variational-Spline Method in Research of Axially Symmetric Piezoceramic Bodies Vibrations // Strength of Materials and Theory of Structures. 2017. Vol. 98. C. 149–161. (in Russian).
2. **Washizu, K.** Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, 1982. 542 p. (in Russian).
3. **Dubenets V.H., Savchenko O.V., Derkach O.L.** Nonstationary Vibrations of a Beam with Electro-Viscoelastic Dissipative Patches // Visnyk of Chernihiv State Technological University 2013. No 3 (67). P. 53–61. (in Russian).
4. **Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.** Methods of spline functions. Moscow: Nauka, 1980. 352 p. (in Russian).
5. **Karlash V.L.** Once again on the energy loss in the piezoceramic acoustic // Acoustic bulletin. 2015. Vol. 17. No 1. P. 34–47. (in Russian).

6. **Karnaukhov V.G., Mikhailenko V.V.** Termomechanics of piezoelectrical nonlinear nonelastic bodies at monoharmonical loading. Zhytomyr: ZHSTU, 2005. 428 p. (in Russian).
7. **Parton V.Z., Kudriavcev B.A.** Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electroconductive bodies. Moscow: Nauka, 1988. 472 p. (in Russian).
8. **Shul'ga M.O., Karlash V.L.** Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates [in Ukrainian]. Kyiv: Naukova Dumka, 2008. 272 p. (in Russian).
9. **Sharapov V.M. Sotula Zh.V., Kunitskaya L.G.** Electroacoustic transducers / Ed. V.M. Sharapov. Moscow: Technosphere, 2013. 296 c. ISBN 978-5-94836-357-8. (in Russian).
10. **Bezverkhyi O.I., Grigoryeva L.O.** Comparative Analysis of Two Methods Used for the Investigation of Harmonic Vibrations of Piezoceramic Cylinders // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 240. No 2, July. DOI 10.1007/s10958-019-04342-6.
11. **Ikeda T.** Fundamentals of Piezoelectricity. Oxford University Press, Oxford, 1996.
12. **Uchino K., Zhuang Y. and S.O. Ural.** Loss Determination Methodology for a Piezoelectric Ceramic: New Phenomenological Theory and Experimental Proposals // Journal of Advanced Dielectrics. 2011. Vol. 1. No 1. P.17–31. DOI: 10.1142/S2010135X11000033

Друкується за рекомендацією програмного комітету IX Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», Online 11-14 червня 2020 р. м. Запоріжжя.

¹*Київський національний університет
будівництва і архітектури,
Київ,
Україна;*

²*Національний транспортний університет,
Київ,
Україна*

Надійшло до редколегії 11.05.2020