

ОСОБЕННОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ НИЗКОГО УРОВНЯ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

К.В. Дікусар, В.С. Ситніков. Особливості граничних циклів низького рівня в цифрових фільтрах. Розглянуті граничні цикли низького рівня в цифрових фільтрах верхніх і нижніх частот при зміні частоти зрізу для зосередженої і розподіленої структурних схем. Зроблені висновки по особливостям появи граничних циклів при різному порядку цифрових фільтрів нижніх і верхніх частот.

Е.В. Дикусар, В.С. Ситников. Особенности предельных циклов низкого уровня в цифровых фильтрах. Рассмотрены предельные циклы низкого уровня в цифровых фильтрах верхних и нижних частот при изменении частоты среза для сосредоточенной и распределенной структурных схем. Сделаны выводы по особенностям появления предельных циклов при различном порядке цифровых фильтров нижних и верхних частот.

K.V. Dikusar, V.S. Sitnikov. Features of limit cycles of low level in digital filters. The limit cycles of low level are considered in the high- and low-pass digital filters of various kinds in changing the cut-off frequency for concentrated and distributed flow diagrams. Conclusions are made on the features of appearance of limit cycles at the different order of low- and high-pass digital filters.

В системах цифровой обработки сигналов возникает необходимость округления коэффициентов цифровых фильтров и результатов вычислений. Ошибки округления при вычислениях могут приводить к нежелательным отклонениям в работе цифрового фильтра — появлению периодических колебаний — предельных циклов низкого уровня, при которых в устойчивом фильтре возникают неустойчивые состояния [1]. Отсутствие таких колебаний может быть установлено с помощью различных критериев отсутствия автоколебаний, которые обеспечивают асимптотическую абсолютную устойчивость системы [2]. Для решения этой проблемы используют много методик, но большая часть из них имеет довольно сложный математический аппарат и дает лишь общие рекомендации, которые не в полной мере учитывают влияние разных классов и типов структур фильтров [2].

Предлагается исследование особенностей предельных циклов низкого уровня, которые возникают в рекурсивных цифровых фильтрах нижних (ФНЧ) и верхних частот (ФВЧ), в зависимости от их порядка, структурной схемы реализации, а также разрядности представления коэффициентов и результатов вычислений.

Возникновение предельных циклов в рекурсивных цифровых фильтрах связано с наличием обратных связей. Исследованы предельные циклы в фильтрах первого и второго порядков в зависимости от значений их коэффициентов с учетом того, что предельные циклы возникают только, если округление фактически приводит к появлению полюсов на единичной окружности [3]. Подход к проблеме возникновения предельного цикла при этом состоит в попытке линеаризации существенно нелинейной задачи, поэтому полученные результаты являются в определенной степени неточными. Известен ряд других подходов к решению этой задачи, в которых определяются границы амплитуд предельного цикла, которые часто необходимы для определения числа разрядов при представлении сигнала. Известен метод, обеспечивающий определение границ с приемлемой точностью и сравнительно простой в применении [3]. Существующие методы не позволяют устранить предельные циклы низкого уровня, а направлены лишь на выявление возможного их возникновения.

Сформулирован и доказан критерий отсутствия автоколебаний, который в дальнейшем послужил отправной точкой для многочисленных работ по теории абсолютной устойчивости [2]. Применяя этот критерий для импульсных и цифровых систем, можно показать, что периодические колебания с относительным периодом M будут отсутствовать, если для всех целых неотрицательных $l \leq [M/2]$ существует такое $\alpha \geq 0$, что

$$\operatorname{Re}\{W^*(j\omega l)[1 + \alpha(1 - e^{-j\omega l})]\} + \frac{1}{k} \geq 0,$$

либо существует такое $\alpha < 0$, что

$$\operatorname{Re}\{W^*(j\bar{\omega}l)[1 + \alpha(e^{j\bar{\omega}l} - 1)]\} + \frac{1}{k} \geq 0,$$

где T_0 — период свободных колебаний,

T — период дискретизации,

l — целые числа, $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{M}$,

$M = T_0 / T$ — относительный период;

$W^*(j\bar{\omega}l)$ — передаточная функция фильтра,

k — зависит от нелинейных операций квантования и ограничения над сигналами, при усечении $k = 1$, при округлении $k = 2$.

Анализ этих неравенств показывает, что для любого α должно выполняться неравенство

$$\operatorname{Re}W^*(j\bar{\omega}l) - \alpha \sin(\bar{\omega}l) \operatorname{Im}W^*(j\bar{\omega}l) + \frac{1}{k} \geq 0,$$

позволяющее найти ограничение на разрядность коэффициентов ФНЧ, при которых возможно появление предельных циклов.

Ошибки квантования коэффициентов приводят к нарушению расположения нулей и полюсов передаточной функции фильтра [1], что проявляется в искажении частотной характеристики. Ошибки же квантования результатов вычислений могут рассматриваться как источники шума, увеличивающие выходной шум. Поскольку эти ошибки различны, зачастую более выгодным оказывается использование различного числа разрядов для представления коэффициентов фильтра и величин сигналов. В известной схеме, где $u[n]$ — входной сигнал, $v[n]$ — выходной сигнал, $x[n]$ — сигнал обратной связи, $y[n]$ — квантованный сигнал обратной связи, a, b — постоянные коэффициенты, Z^{-1} — задержка на такт, \otimes — умножители, присутствует квантование лишь результатов вычислений [2], поэтому предлагается дополнить ее квантователями коэффициентов: Q_1 на выходе первого умножителя и Q_2, Q_3 на выходе блоков a и b , соответственно (рис. 1).

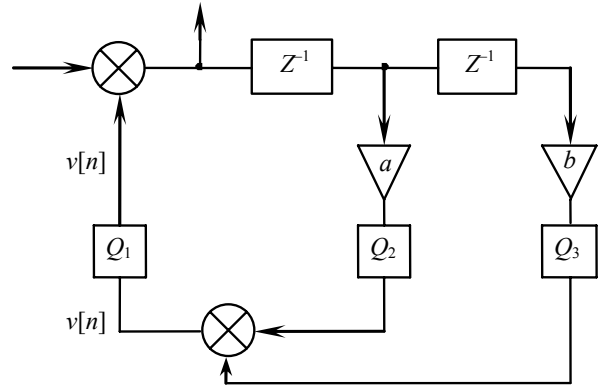


Рис. 1. Предлагаемая схема фильтра второго порядка

Для проверки возможности возникновения предельных циклов в квантованных фильтрах нижних и верхних частот служит команда “limitcycle”, встроенная в математический пакет Matlab 7.5 [1], с помощью которой задают случайные начальные состояния фильтра по методу Монте-Карло и анализируют его поведение при входном сигнале $u[n] = 0$. Однако разрядность используемых коэффициентов и результатов вычислений фиксирована, что не позволяет провести необходимые исследования предельных циклов. Для проведения исследований разработан алгоритм (рис. 2).

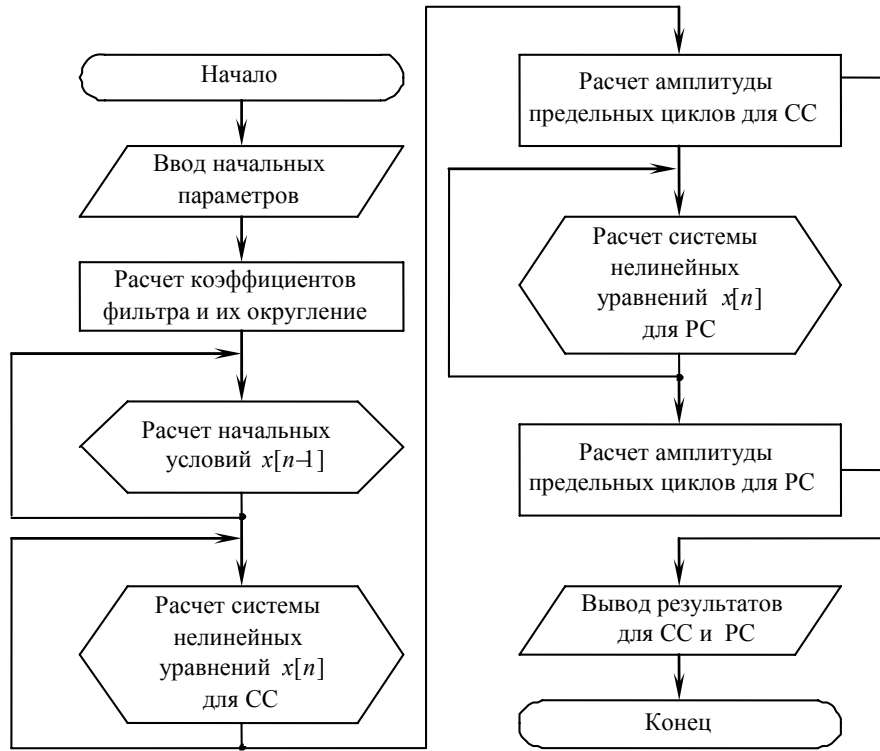


Рис. 2. Алгоритм анализа предельных циклов в цифровых фильтрах

В соответствии с алгоритмом производится расчет сосредоточенной (СС) и распределенной (РС) структурных схем цифровых фильтров различных порядков. Графы состояний структурных схем ФНЧ и ФВЧ четвертого порядка приведены на рис. 3.

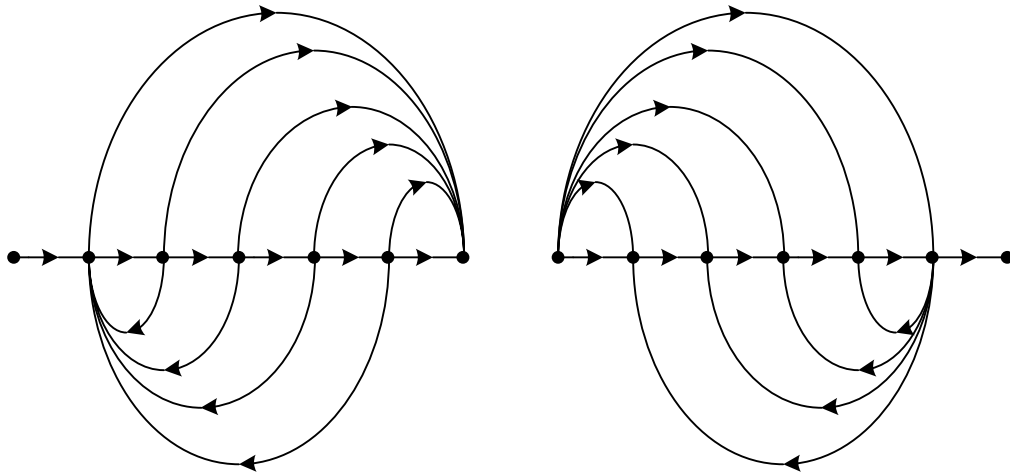


Рис. 3. Графы состояний для сосредоточенной (а) и распределенной (б) структурных схем фильтра нижних или верхних частот четвертого порядка

Амплитуда предельных циклов низкого уровня в квантах для сосредоточенной и распределенной структурных схем фильтров нижних и верхних частот

Структура фильтра	Класс фильтра	Порядок фильтра	Тип фильтра			
			Баттерворта	Чебышева	Инверсный Чебышева	Эллиптический
Нормированная частота среза, f_n						

			0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,6	0,8		
С	Ф Н Ч	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
		4	0	0	0	2	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	2	-1	
		5	0	0	1	2	0	0	1	1	1	0	0	2	2	2	2	2	3	
		6	0	0	0	2	0	0	0	3	2	0	1	3	3	2	3	3	5	
	Ф В Ч	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
		4	2	0	0	0	1	1	0	0	+1	0	0	1	1	2	0	0	0	
		5	2	1	0	0	1	1	1	0	3	0	0	2	3	2	2	2	2	
		6	-2	0	0	0	3	0	0	0	3	0	0	2	5	3	2	3	3	
	Р С	Ф Н Ч	2	+1	0	0	0	0	0	1	1	-1	+1	-1	0	-1	0	0	0	1
			4	4	0	1	6	8	1	2	1	8	2	1	7	12	4	4	4	6
			5	12	1	1	7	31	1	2	13	20	1	2	16	74	16	5	83	
			6	-2	1	1	46	226	6	2	29	19	4	3	107	325	32	66	229	
Ф В Ч		2	0	0	0	1	1	+1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	
		4	6	1	0	4	1	2	1	8	7	1	2	8	6	4	4	4	12	
		5	7	1	1	12	13	2	1	31	16	2	1	25	83	5	15	83		
		6	46	0	1	2	29	2	6	229	107	1	4	18	229	68	30	331		

Системы нелинейных уравнений структурных схем для ФНЧ и ФВЧ четвертого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1[n] = S[n]; \\ x_2[n] = x_3[n-1]; \\ x_3[n] = x_4[n-1]; \\ x_4[n] = x_5[n-1]; \\ x_5[n] = x_6[n-1]; \\ x_6[n] = x_1[n] + (-a_1)x_5[n] + (-a_2)x_4[n] + (-a_3)x_3[n] + (-a_4)x_2[n]; \\ x_7[n] = b_0x_6[n] + b_1x_5[n] + b_2x_4[n] + b_3x_3[n] + b_4x_2[n], \end{array} \right. , \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1[n] = S[n]; \\ x_2[n] = x_3[n-1] + b_0x_1[n]; \\ x_3[n] = x_4[n-1] + b_1x_1[n] + (-a_1)x_2[n]; \\ x_4[n] = x_5[n-1] + b_2x_1[n] + (-a_2)x_2[n]; \\ x_5[n] = x_6[n-1] + b_3x_1[n] + (-a_3)x_2[n]; \\ x_6[n] = b_4x_1[n] + (-a_4)x_2[n]; \\ x_7[n] = x_2[n], \end{array} \right. , \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3[n-1] = 0; \\ x_4[n-1] = 0; \\ x_5[n-1] = 0; \\ x_6[n-1] = 0, \end{array} \right.$$

где $a_1 \dots a_4$ — коэффициенты знаменателя передаточной функции цифрового фильтра;

$b_0 \dots b_4$ — коэффициенты числителя передаточной функции цифрового фильтра;

$S[n]$ — единичный входной импульс;

$x_1[n-1] \dots x_6[n-1]$ — состояние цифрового фильтра в $(n-1)$ момент времени;

$x_1[n] \dots x_7[n]$ — состояние цифрового фильтра в n момент времени.

Результаты проведенных исследований сведены в таблицу, где f_n — нормированная частота среза.

Анализ полученных результатов показывает, что:

— в сосредоточенной структурной схеме ФНЧ и ФВЧ автоколебания меньше, чем в распределенной;

- в ФНЧ и ФВЧ второго и четвертого порядков предельные циклы отсутствуют либо очень малы и наблюдаются лишь в эллиптическом фильтре и фильтре Чебышева;
- в сосредоточенной структурной схеме ФНЧ шестого порядка отсутствуют автоколебания в фильтрах Баттерворта и Чебышева;
- в сосредоточенной структурной схеме ФВЧ в полосе частот, при которой частота среза определяется в соответствии с выражением $0,4f_n \leq f_{cp} \leq 0,6f_n$, автоколебания наблюдаются в эллиптическом фильтре;
- при $f_{cp} \leq 0,2f_n$ и $f_{cp} \geq 0,8f_n$ предельные циклы низкого уровня имеются в инверсном фильтре Чебышева;
- при $f_{cp} \leq 0,4f_n$ и $f_{cp} \geq 0,6f_n$ автоколебания по амплитуде в распределенной структурной схеме существенно возрастают, а в полосе средних частот имеют малую амплитуду.

Литература

1. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко — СПб.: Питер, 2002. — 608 с.
2. Баркин, А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования / А.И. Баркин. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
3. Антонью, А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование / А. Антонью: пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. акад. пищевых технологий Хобин В.А.

Поступила в редакцию 8 октября 2009 г.