УДК 539.3:624.071.34

І.М. Чаюн, д-р техн. наук, проф., Одес. нац. політехн. ун-т

ЖОРСТКІСТЬ КОНСТРУКЦІЙ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТІВ

І.М. Чаюн. **Жорсткість конструкцій та їх елементів.** Введено поняття узагальненої жорсткості для елементів і конструкцій в цілому. Жорсткості стержнів при різних навантаженнях, їх перерізів, а також конструкцій в цілому визначено подвійно, а саме: диференціальними і енергетичним методами. Наведено приклади розрахунків стержневих систем, які включають визначення жорсткостей запропонованим енергетичним методом.

И.М. Чаюн. **Жесткость конструкций и их элементов**. Введено понятие обобщенной жесткости для элементов и конструкций в целом. Жесткости стержней при различных нагружениях, их сечений, а также конструкций в целом определено двояко, а именно: дифференциальными и энергетическим методами. Приведены примеры расчетов стержневых систем, которые включают определение жесткостей предложенным энергетическим методом.

I.M. Chayun. **Rigidity of constructions and their elements.** The concept of the generalized rigidity is introduced for elements and constructions on the whole. Rigidity of bars at different loads, of their sections, and also constructions on the whole is determined in two ways, namely, by the differential and by the energy methods. The examples of the bar systems calculations which include determination of rigidity by the offered energy method are cited.

Термін “жорсткість” використовується у визначенні багатьох понять. Тут його розглянуто стосовно конструкцій і їх елементів.

По-перше, жорсткість як властивість — це здатність тіла або конструкції чинити опір зміні форми або розмірів, тобто супротив утворенню деформації [1].

До другого вживання цього терміну віднесено жорсткість як характеристику перерізу елемента конструкції. Поперечний переріз стержня має шість жорсткостей, кожна з яких в пружній стадії деформування дорівнює добутку модуля пружності матеріалу і відповідної геометричної характеристики перерізу.

Третє використання даного терміна відноситься до жорсткості елемента і конструкції в цілому. Зокрема, розглянуто жорсткості прямих стержнів і стержневих систем. Аналогічно поняттю узагальненої сили введено поняття узагальненої жорсткості стержня.

На основі аналізу напружено-деформованого стану диференціальними методами узагальнена жорсткість стержня визначається характеристикою, що дорівнює узагальненій силі, яка забезпечує відповідне одиничне переміщення перерізу стержня. Характеристикою, протилежною жорсткості, є податливість. Природно, що частка від ділення узагальненої сили на відповідну жорсткість повинна дорівнювати відповідному переміщенню. Бути переміщенням відповідним — це означає відповідати виду сили (зосереджена, розподілена, пара); місцю її прикладання та характеру деформації (три лінійних і три кутових, тобто повороти перерізу стержня навколо нормалі і головних центральних осей).

У таблиці приведені жорсткості стержнів на переміщення лінійні (подовження, прогин) і кутові (поворот навколо нормалі z — жорсткість на кручення; поворот навколо головної центральної осі x — згинальна жорсткість). Формули складені на підставі вказаного визначення узагальненої жорсткості стержня. Вони являють собою як загальні вирази жорсткостей, тобто по будь-якому перерізу конкретного стержня, так і їх мінімальні значення. Максимальні значення жорсткостей в усіх випадках прагнуть до нескінченності. У позначенні жорсткостей перший символ вказує характер відповідного переміщення (лінійне за напрямком нормалі z і напрямком поперечної осі y або кутове, тобто жорсткість на поворот перерізу навколо нормалі z і навколо головної центральної осі x). Другий символ індексу позначає вид сили, якій відповідає дана жорсткість (F — зосереджена сила, Н; q — розподілена, Нм$^{-1}$; M — пара, Нм).

Другий шлях визначення жорсткостей — це енергетичний метод. Цим шляхом можна визначати як жорсткості перерізів, так і жорсткості самих стержнів, а також конструкцій в цілому [2, 3].

Жорсткість перерізів визначається на основі такого твердження (теореми). Друга частинна похідна від питомої потенційної енергії деформування по деформації дорівнює відповідній жорсткості перерізу стержня. Ефективність вживання цієї теореми показана в дослідженні напружено-деформованого стану канатів, кабелів і інших виробів з витого дроту [4]. Жорсткість самого стержня і конструкції в цілому дорівнює другій частинній похідній від потенційної енергії деформування за відповідним переміщенням:

$$G_{ii} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i^2};\ \ G_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \Delta_j}, \tag{1}$$

де G_{ii} і G_{ij} — головні жорсткості і жорсткості впливу.

Для прямого стержня довжиною l при розтяганні (стисканні) зосередженою силою потенційна енергія, записана через переміщення Δ крайнього перерізу,

$$U = \frac{1}{2}\frac{N^2 l}{EA} = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}\Delta^2, \tag{2}$$

де N — подовжня сила.

При крученні

$$U = \frac{1}{2}\frac{GI_k}{l}\varphi_z^2, \tag{3}$$

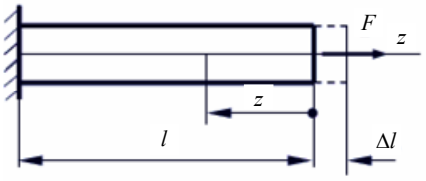
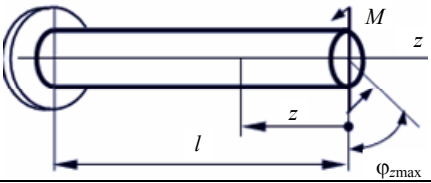
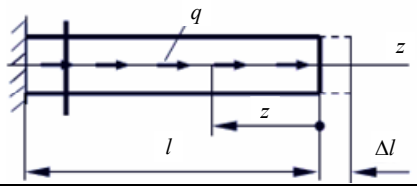
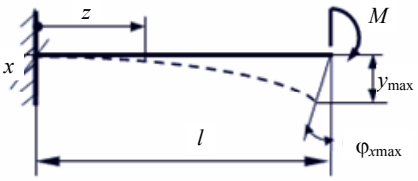
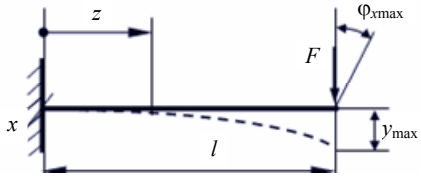
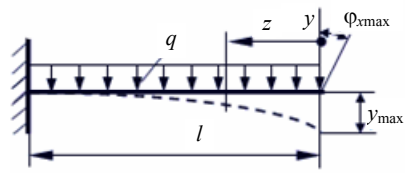
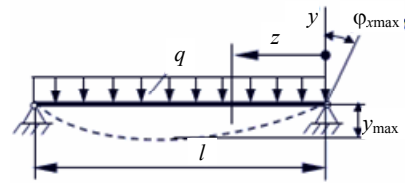
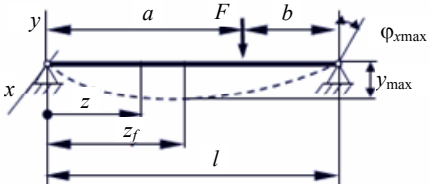
де φ_z — кут закручування крайнього перерізу (поворот довкола нормалі z).

При чистому згинанні

$$U = \frac{1}{2}\frac{EI_x}{l}\varphi_x^2, \tag{4}$$

де φ_x — поворот крайнього перерізу довкола його головної центральної осі x.

Вирази жорсткостей стержнів: загальні і мінімальні

№ пор.	Схема навантаження	Узагальнені жорсткості
1		$G_{zF}=\frac{EA}{l(1-\overline{z})};\ \min G_{zF}=\frac{EA}{l};$ EA — подовжня жорсткість перерізу, $\overline{z}=z/l$ — відносна координата перерізу
2		$G_{\varphi z}=\frac{GI_k}{l(1-\overline{z})};\ \min G_{\varphi z}=\frac{GI_k}{l};$ GI_k — крутна жорсткість перерізу, EI_x — згинальна жорсткість перерізу
3		$G_{zq}=\frac{2EA}{l^2(1-\overline{z}^2)};\ \min G_{zq}=\frac{2EA}{l^2}$
4		$G_{yM}=\frac{2EI_x}{l^2\overline{z}^2};\ \min G_{yM}=\frac{2EI_x}{l^2};$ $G_{\varphi xM}=\frac{EI_x}{l\overline{z}};\ \min G_{\varphi xM}=\frac{EI_x}{l}$
5		$G_{yF}=\frac{EI_x}{\frac{l}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3};\ \min G_{yF}=\frac{3EI_x}{l^3};$ $G_{\varphi xF}=\frac{EI_x}{lz-\frac{z^2}{2}};\ \min G_{\varphi xF}=\frac{2EI_x}{l^2}$
6		$G_{yq}=\frac{EI_x}{l^4(1-2\overline{z}+\overline{z}^2)};\ \min G_{yq}=\frac{8EI_x}{l^4};$ $G_{\varphi xq}=\frac{6EI_x}{l^3(3\overline{z}^2-3\overline{z}+\overline{z}^3)};\ \min G_{\varphi xq}=\frac{6EI_x}{l^3}$
7		$G_{yq}=\frac{24EI_x}{l^4\overline{z}(1-2\overline{z}^2+\overline{z}^3)};\ \min G_{yq}=\frac{384EI_x}{5l^4};$ $G_{\varphi xq}=\frac{24EI_x}{l^3(1-6\overline{z}^2+4\overline{z}^3)};\ \min G_{\varphi xq}=\frac{24EI_x}{l^3}$
8		$G_{yF}=\frac{6EI_x}{l^3\overline{b}\overline{z}(\overline{a}^2+\overline{a}\overline{b}-\overline{z}^2)};\ \min G_{yF}=\frac{9\sqrt{3}EI_x}{l^3\overline{b}(1-\overline{b}^2)};$ $G_{\varphi xF}=\frac{6EI_x}{l^2\overline{b}(\overline{a}^2+2\overline{a}\overline{b}-3\overline{z}^2)};\ \min G_{\varphi xF}=\frac{16EI_x}{l^2}$

При поперечному згинанні консольної балки зосередженою силою (див. таблицю, № пор. 5)

$$U = \frac{3\delta^2 EI_x}{2l^3}, \tag{5}$$

де $\delta = y_{\max}$ — переміщення (прогин) вільного кінця балки.

Другі частинні похідні від потенційної енергії (2)…(5) за переміщеннями дають відповідні жорсткості стержнів:

$$\frac{\partial^2}{\partial\Delta^2}\left(\frac{EA}{2l}\Delta^2\right) = \frac{EA}{l}; \quad \frac{\partial^2}{\partial\varphi_z^2}\left(\frac{GI_k}{2l}\varphi_z^2\right) = \frac{GI_k}{l}; \quad \frac{\partial^2}{\partial\varphi_x^2}\left(\frac{EI_x}{2l}\varphi_x^2\right) = \frac{EI}{l}; \quad \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left(\frac{3EI}{2l^3}\delta^2\right) = \frac{3EI_x}{l^3}.$$

Як видно, вони збігаються з виразами, приведеними в таблиці під №№ 1…3 і 5, які складені на основі диференціальних методів. Диференціальні і енергетичні методи не суперечать, а взаємно доповнюють один одного.

Природно, що через жорсткості стержнів переміщення їх перерізів визначаються як результат ділення діючої зовнішньої сили на відповідну жорсткість.

В разі стержневої системи переміщення визначаються на основі її матриці жорсткості, яка є квадратною і симетричною відносно головної діагоналі, а розмір відповідає числу переміщень. Наприклад, в разі просторової фермової конструкції, для якої необхідно визначити переміщення деякого вузла, матриця жорсткості має вигляд

$$\left|\mathbf{G}\right| = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix},$$

де G_{11}, G_{22}, G_{33} — головні жорсткості;

$G_{12} = G_{21}$, $G_{13} = G_{31}$, $G_{23} = G_{32}$ — жорсткості впливу.

Всі жорсткості визначаються за формулою (1). А саме переміщення вузла

$$\left|\Delta\right| = \begin{vmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{vmatrix} = \left|\mathbf{G}\right|^{-1}\left|\mathbf{F}\right|,$$

де Δ_1, Δ_2, Δ_3 — три ортогональні складові переміщення;

$\left|\mathbf{F}\right|$ — вектор навантаження.

Після визначення переміщень обчислюються зусилля і напруження в елементах конструкції або необхідні розміри їх поперечних перетинів. Використання даної методики можна розглянути на конкретних прикладах.

Приклад 1. Визначити площу поперечного перерізу стержнів, на яких підвішена абсолютно жорстка балка *ABC* (рис. 1, *а*), навантажена силою *F=150* кН. Матеріал стержнів сталь ст.3, межа текучості σ_T = 240 МПа, нормативний коефіцієнт запасу міцності $[n_T]$=1,5.

Виконання. В даній конструкції зусилля в стержнях зумовлюються двома переміщеннями балки *ABC*: Δ_1 — лінійне переміщення; Δ_2 — кут повороту балки (рис. 1, *б*).

Подовження-укорочення стержнів виражаються через переміщення Δ_1 і Δ_2

$$\Delta l_1 = \Delta_1 + 3\Delta_2; \quad \Delta l_2 = \Delta_1 + 1{,}5\Delta_2; \quad \Delta l_3 = \Delta_1.$$

Потенційна енергія деформації системи

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{E_i A_i}{l_i}\Delta l_i^2 = \frac{EA}{2l}(3\Delta_1^2 + 9\Delta_1\Delta_2 + 11{,}5\Delta_2^2).$$

Матриця жорсткості

$$\left|\mathbf{G}\right| = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix};$$

$$G_{11}=\frac{\partial^2 U}{\partial\Delta_1^2}=\frac{3EA}{l};\quad G_{22}=\frac{\partial^2 U}{\partial\Delta_2^2}=11{,}5\frac{EA}{l};$$

$$G_{12}=G_{21}=\frac{\partial^2 U}{\partial\Delta_1\partial\Delta_2}=4{,}5\frac{EA}{l}.$$

Переміщення балки ABC

$$|\mathbf{G}|=\begin{vmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{vmatrix}=|\mathbf{G}|^{-1}F\begin{vmatrix}1\\ 1{,}875\end{vmatrix};\quad \Delta_1=0{,}208\frac{Fl}{EA};$$

$$\Delta_2=0{,}0833\frac{Fl}{EA}\ ,$$

де F — зовнішня сила, що забезпечує вектор навантаження.

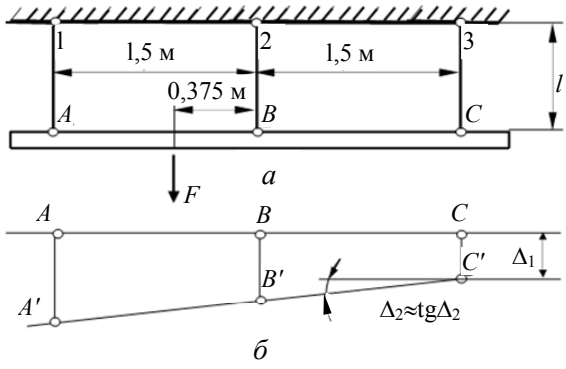


Рис. 1. Стержнева система

Зусилля в стержнях

$$N_1=\frac{E_1A_1}{l}\Delta l_1=\frac{EA}{l}\frac{Fl}{EA}\left(0{,}208+3\cdot 0{,}0833\right)=0{,}473F;\quad N_2=0{,}328F;\quad N_3=0{,}208F.$$

Необхідна площа поперечного перерізу стержнів

$$A=\frac{N_1}{[\sigma]}=\frac{0{,}473\cdot 150\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}5}{240}=4{,}43\cdot 10^{-4}\text{м}^2=443\ \text{мм}^2.$$

Приклад 2. Порівняти жорсткість на вертикальне переміщення вільного перерізу консольної балки (рис. 2) з максимальним значенням відповідної жорсткості ферми (рис. 3).

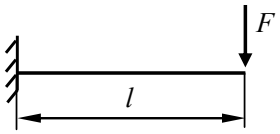


Рис. 2. Консоль

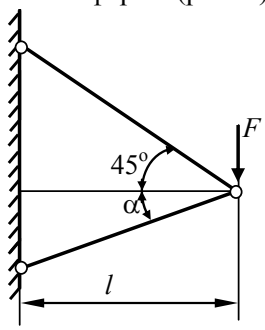


Рис. 3. Ферма

Жорсткість балки

$$G_{yF}^{\delta}=\frac{3EI}{l^3}.$$

Жорсткість ферми

$$G_{yF}^{\varphi}=\frac{\partial^2 U(\alpha)}{\partial\Delta^2}=\frac{\partial^2}{\partial\Delta^2}(0{,}1768+0{,}5\sin^2\alpha\cos\alpha)\frac{EA}{l}\Delta^2=\frac{EA}{l}(0{,}3535+\sin^2\alpha\cos\alpha)\ ,$$

де U — потенційна енергія деформації ферми, виражена через вертикальне переміщення Δ шарніру.

Порівняння жорсткостей цих двох систем — через їх відношення

$$\overline{G}_{yF}^{\varphi}=\frac{G_{yF}^{\varphi}}{G_{yF}^{\delta}}=\frac{Al^2}{3I}(0{,}3535+\sin^2\alpha\quad\cos\alpha)\ . \tag{6}$$

Рівняння, одержане на основі відношення (6) для визначення екстремуму, має вигляд

$$2\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=0.$$

Дійсний корінь $\alpha=55°$. Кількісна оцінка відношення жорсткостей (6) виконана при таких даних: переріз елементів діаметром $d=20$ мм і $l=1$ м. При цих конструктивних значеннях ві-

дношення (6) становить $9{,}8\cdot10^3$. При $\alpha = 0$ відношення (6) дорівнює $4{,}7\cdot10^3$. Отже, в забезпеченні жорсткості системи деформування її елементів розтяганням-стисканням в багато разів ефективніше, ніж згинанням.

Література

1. Политехнический словарь. — М.: Сов. энцикл., 1977. — 607 с.
2. Чаюн, И.М. Исследование упруго-пластического деформирования и расчет статической несущей способности канатов при растяжении: автореф. дис…. канд. техн. наук / И.М. Чаюн. — Одесса, 1971. — 19 с.
3. Тимошенко, С.П. Механика материалов / С.П. Тимошенко, Дж. Гере. — М.: Мир, 1976. — 670 с.
4. Чаюн, И.М. Несущая способность подъемных канатов и лент / И.М. Чаюн. — Одесса: Астропринт, 2003. — 233 с.
5. Орлов, П.И. Основы конструирования. В 2 кн. / П.И. Орлов. — Кн. 1. — М.: Машиностроение, 1977. — 618 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. політехн. ун-ту Дащенко О.Ф.

Надійшла до редакції 14 червня 2010 р.