

НАПРЯЖЕНИЯ В КЛЕЕВОМ СОЕДИНЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Введение. В работе [1] для решения задачи о напряженном состоянии соединения при неравномерно приложенной нагрузке (например, приложенной локально к клееной пластине большой ширины) было предложено считать равными нулю перемещения несущих слоев в поперечном направлении, и в уравнениях равновесия учитываются только касательные напряжения в несущих слоях. Данный подход применим только при отсутствии изгиба в плоскости соединения, например, если соединение и нагрузка симметричны относительно продольной оси соединения. В настоящей работе предпринята попытка обобщить полученные ранее результаты и учесть поперечные перемещения склеиваемых слоев, которые обусловлены изгибом в плоскости соединения.

Для построения решения задачи используется введенная в работах [1, 2] гипотеза об абсолютной жесткости несущих слоев в поперечном направлении. Однако в данном случае несущие слои рассматриваются как балки, которые могут изгибаться в плоскости соединения. При этом поперечные перемещения вдоль ширины несущего слоя полагаются одинаковыми. Безусловно, данный подход позволяет лишь оценить напряжения в клее в поперечном направлении. Однако эти напряжения, как правило, меньше напряжений в продольном направлении, и поэтому точность предлагаемого подхода может быть достаточной для задач проектирования.

Можно отметить, что описанный подход использован для создания уточненной теории балок в работе [3]. Научная новизна работы заключается в применении данной модели для описания двухслойной пластинки с упругим соединительным слоем.

Постановка задачи. Рассмотрим клеевое соединение двух прямоугольных пластин ($L \times 2h$), показанное на рис. 1. Стороны $y = \pm h$ (в системе координат xOy) свободны от нагрузки. Несущие слои деформируются только в плоскости соединения, клеевой слой работает только на сдвиг, напряжения равномерно распределены по толщине слоев. Не уменьшая общности предлагаемого подхода, положим, что нагрузка приложена только ко второму слою вдоль стороны $x = 0$, а первый слой по стороне $x = L$ жестко закреплен.

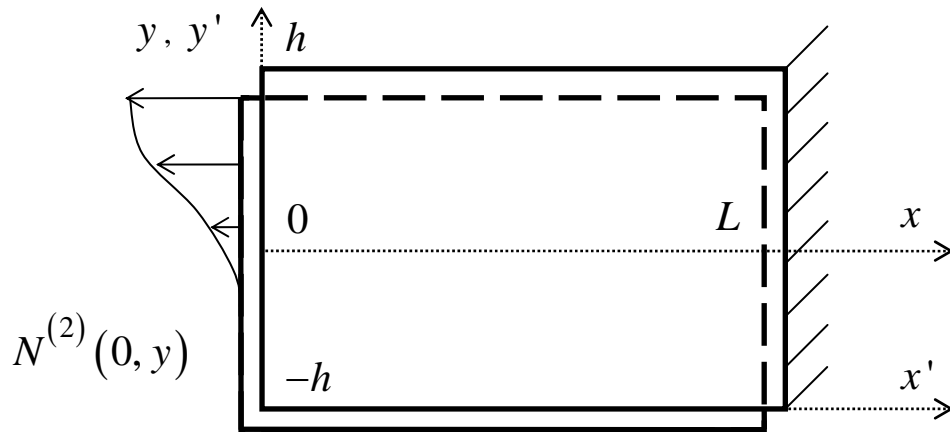


Рисунок 1 – Схема соединения

Уравнения равновесия несущих слоев в области склейки имеют вид [4]

$$\tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad -\tau_x + \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad -\tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где τ_x, τ_y – касательные напряжения в клеевом слое вдоль соответствующей оси; $q^{(1)}, q^{(2)}$ – касательные усилия в соответствующих несущих слоях; $N_x^{(1)}, N_y^{(1)}, N_x^{(2)}, N_y^{(2)}$ – нормальные усилия в несущих слоях.

Физический закон для внешних слоев имеет вид (эффект Пуассона не учитывается)

$$N_x^{(k)} = \delta^{(k)} E_x^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}; \quad q^{(k)} = \delta^{(k)} G^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \right), \quad (3)$$

где $k = 1, 2$; $u^{(k)}, v^{(k)}$ – перемещения слоя k в продольном и поперечном направлении соответственно; $\delta^{(k)}$ – толщина соответствующего несущего слоя;

Напряжения в клеевой прослойке пропорциональны разности перемещений слоев

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (u^{(1)} - u^{(2)}); \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (v^{(1)} - v^{(2)}), \quad (4)$$

где G_0 и δ_0 – соответственно модуль сдвига и толщина клеевого слоя.

Однородные краевые условия:

$$\begin{aligned} u^{(1)} \Big|_{x=L} &= 0; v^{(1)} \Big|_{x=L} = 0; N_x^{(2)} \Big|_{x=L} = 0; \\ N_x^{(1)} \Big|_{x=0} &= 0; q^{(k)} \Big|_{y=\pm h} = 0; N_y^{(k)} \Big|_{y=\pm h} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

На левой боковой стороне задано нормальное усилие

$$N^{(2)} \Big|_{x=0} = F(y). \quad (6)$$

В силу введенной гипотезы об абсолютной жесткости соединяемых слоев в поперечном направлении, перемещения $v^{(k)}(x, y)$ будем полагать зависящими только от x , обозначив их $V^{(k)}(x)$. Продольные же перемещения складываются из двух составляющих: первая составляющая вычисляется согласно гипотезе плоских сечений и обусловлена перемещениями $V^{(k)}(x)$, вторая составляющая ($U^{(k)}(x, y)$) обусловлена взаимным сдвигом элементов несущих слоев в продольном направлении и вычисляется по методике, изложенной в работах [1, 2]. Если ось x проходит вдоль продольной оси симметрии соединения, как показано на рис. 1, то

$$u^{(k)}(x, y) = -y \cdot \frac{dV^{(k)}}{dx} + U^{(k)}(x, y). \quad (7)$$

Таким образом, поставленная задача распадается на две независимые подзадачи:

а) нахождение $V^{(k)}$, которые описывают деформацию несущих слоев согласно гипотезе плоских сечений;

б) нахождение $U^{(k)}$, которые описывают продольные перемещения несущих слоев без учета изгиба.

Продольные нормальные усилия, соответствующие перемещениям $V^{(k)}$ и $U^{(k)}$, обозначим соответственно $N_{V,x}^{(k)}$ и $N_{U,x}^{(k)}$.

Тогда $N_x^{(k)} = N_{V,x}^{(k)} + N_{U,x}^{(k)}$. Аналогичным образом разделим и касательные усилия в несущих слоях $q^{(k)} = q_V^{(k)} + q_U^{(k)}$.

Краевое условие (6) необходимо представить в виде суперпозиции линейно распределенного усилия, которое обуславливает чистый изгиб соединения и безмоментной нагрузки

$$F(y) = K \cdot y + N_0(y) \quad (8)$$

где K – коэффициент, определяемый из условия равенства изгибающих моментов $K \int_{-h}^h y^2 dy = \int_{-h}^h y \cdot F(y) dy$, где изгибающий

момент, действующий в сечении $M = \int_{-h}^h y \cdot F(y) dy$; $N_0(y)$ –

нагрузка, имеющая нулевой изгибающий момент и вследствие этого не вызывающая поперечных перемещений, $N_0(y) = F(y) - K \cdot y$.

Для задачи (а) в качестве краевого условия используется первое слагаемое (8), для задачи (б) – второе слагаемое. Необходимо отметить, что вторая задача решена в работе [1], а задача (а) решается впервые.

1. Перемещения, обусловленные изгибающим моментом.

Используя гипотезу плоских сечений, будем считать, что

$$N_{V,x}^{(k)} = -\delta^{(k)} E_x^{(k)} \frac{d^2 V^{(k)}}{dx^2} \cdot y; \quad (9)$$

$$\tau_x = -\frac{G_0}{\delta_0} y \left(\frac{dV^{(1)}}{dx} - \frac{dV^{(2)}}{dx} \right); \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right). \quad (10)$$

Подставив (9) и (10) в уравнения (1), проинтегрировав по y и удовлетворив условиям равенства нулю касательных напряжений на боковых сторонах соединения (5), получим

$$q_V^{(k)} = (-1)^k \frac{h^2 - y^2}{2} \left[\frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{dV^{(1)}}{dx} - \frac{dV^{(2)}}{dx} \right) - (-1)^k E_x^{(k)} \frac{d^3 V^{(k)}}{dx^3} \right]; \quad (11)$$

Подставив (11) в (2) и проинтегрировав по y , получим

$$N_y^{(k)} = (-1)^k y \frac{G_0}{\delta_0} \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) + f_k(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - h^2 y \right) \left[\delta^{(1)} E_x^{(1)} \frac{d^4 V^{(k)}}{dx^4} - (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right) \right]; \quad (12)$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ находим из условий (5) $N_y^{(k)} \Big|_{y=h} = 0$:

$$f_1 = \frac{h^3}{3} E_x^{(1)} \delta^{(1)} \frac{d^4 V^{(1)}}{dx^4} + \frac{G_0}{\delta_0} \left[\frac{h^3}{3} \left(\frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} \right) - h \left(V^{(2)} - V^{(1)} \right) \right];$$

$$f_2 = \frac{h^3}{3} E_x^{(2)} \delta^{(2)} \frac{d^4 V^{(2)}}{dx^4} - \frac{G_0}{\delta_0} \left[\frac{h^3}{3} \left(\frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} \right) - h \left(V^{(2)} - V^{(1)} \right) \right].$$

Краевые условия на второй боковой стороне $N_y^{(k)} \Big|_{y=-h} = 0$

приводят к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -\delta_0 \delta^{(1)} \frac{E_x^{(1)}}{G_0} \frac{d^4 V^{(1)}}{dx^4} + \left(\frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} + \frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} \right) - \frac{3}{h^3} \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) = 0; \\ -\delta_0 \delta^{(2)} \frac{E_x^{(2)}}{G_0} \frac{d^4 V^{(2)}}{dx^4} + \left(\frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} + \frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} \right) + \frac{3}{h^3} \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

В матричной форме система (1.12) имеет вид

$$\mathbf{A}_4 \frac{d^4 \vec{V}}{dx^4} + \mathbf{A}_2 \frac{d^2 \vec{V}}{dx^2} + \mathbf{A}_0 \vec{V} = 0, \quad (14)$$

где

$$\vec{V} = \left(V^{(1)}; V^{(2)} \right)^T; \quad \mathbf{A}_4 = -\frac{\delta_0}{G_0} \begin{pmatrix} \delta^{(1)} E_x^{(1)} & 0 \\ 0 & \delta^{(2)} E_x^{(2)} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_0 = \frac{3}{h^3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение системы (14) ищем в виде вектор-функции $\vec{V} = e^{\theta x} \vec{H}$. Подставив в (15), получим систему линейных однородных уравнений

$$\left(\mathbf{A}_4 \theta^4 + \mathbf{A}_2 \theta^2 + \mathbf{A}_0 \right) \vec{H} = 0, \quad (15)$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$\det \left(\mathbf{A}_4 \theta^4 + \mathbf{A}_2 \theta^2 + \mathbf{A}_0 \right) = 0. \quad (16)$$

Уравнение представляет собой уравнение 8-й степени, четыре корня которого равны нулю, а четыре – отличны от нуля.

Следовательно, общее решение (14) можно представить в виде

$$\vec{V} = \sum_{n=1}^4 S_n x^{(n-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^4 S_{n+4} e^{\theta_n x} \vec{H}_n, \quad (17)$$

где \vec{H}_n – решения матричного уравнения (16), определяемые с точностью до постоянного множителя S_n .

В формулы поперечных перемещений слоев (17) входит 8 констант интегрирования, которые определяются из краевых условий

$$V_1(L) = \left. \frac{dV_1(x)}{dx} \right|_{x=L} = \int_{-h}^h q^{(1)}(0, y) dy = \left. \frac{d^2V^{(1)}}{dx^2} \right|_{x=0} = 0;$$

$$\int_{-h}^h q^{(2)}(0, y) dy = 0; \quad \left. \frac{d^2V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{M}{E_x^{(2)} I^{(2)}};$$

$$\int_{-h}^h q^{(2)}(L, y) dy = 0; \quad \left. \frac{d^2V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=L} = 0.$$

Здесь $I^{(2)}$ – момент инерции, $I^{(2)} = \frac{2}{3} \delta_2 h^3$.

Указанные условия приводят к системе восьми линейных уравнений относительно констант S_1, \dots, S_8 .

2. Перемещения, обусловленные безмоментной продольной нагрузкой. Согласно предложенной модели нагрузка $N_0(y)$ (8) обуславливает только продольные перемещения несущих слоев $U^{(k)}$ (7). Данная задача решена и подробно описана в работах [1, 2], поэтому приведем решение в краткой форме.

Для удобства построения решения второй подзадачи введем систему координат $x'Oy'$, начало которой находится в одном из углов прямоугольной области (рис. 1). Очевидно, что $x = x'$ и $y = y' - h$.

В работе [1] показано, что перемещения $U^{(k)}$ можно представить в виде суммы $U^{(k)} = W^{(k)}(x') + V^{(k)}(x', y')$, где $W^{(k)}(x')$ представляет собой классическое одномерное решение Фолькерсена, а $V^{(k)}(x', y')$ имеет вид разложения в ряд Фурье и находится с помощью метода разделения переменных. В частности, если внешние

слои соединения обладают свойством $\frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2}$, то перемещения $U^{(k)}$

имеют вид

$$U^{(k)} = C_0 x' + D_0 + \gamma_k \left(A_0 \frac{\text{ch } \xi_0 x'}{\text{sh } \xi_0 L} + B_0 \frac{\text{ch } \xi_0 (x' - L)}{\text{sh } \xi_0 L} \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y'}{2h} \left[C_n \frac{\text{ch } \chi_n x'}{\text{sh } \chi_n L} + D_n \frac{\text{ch } \chi_n (x' - L)}{\text{sh } \chi_n L} +$$

$$+ A_n \gamma_k \frac{\text{ch } \xi_n x}{\text{sh } \xi_n L} + B_n \gamma_k \frac{\text{ch } \xi_n (x - L)}{\text{sh } \xi_n L} \right]. \quad (18)$$

Здесь $\lambda_n = \alpha_4 \frac{\pi n}{2h}$; $\chi_n = \sqrt{\mu} \frac{\pi n}{2h}$; $\xi_n = \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3}$; $\lambda_n = \alpha_4 \frac{\pi n}{2h}$;

$$\alpha_3^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}; \quad \alpha_4^2 = \mu \alpha_3^2; \quad \alpha_1 = E_1 \delta_1 \frac{\delta_0}{G_0}; \quad \alpha_2 = E_2 \delta_2 \frac{\delta_0}{G_0}; \quad \mu = \frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2};$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Продольные усилия в несущих слоях находим, используя (3)

$$N_{V,x}^{(k)} = \delta_1 E_1 \left[C_0 + \gamma_k \xi_0 \left(A_0 \frac{\text{sh } \xi_0 x'}{\text{sh } \xi_0 L} + B_0 \frac{\text{sh } \xi_0 (x' - L)}{\text{sh } \xi_0 L} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y'}{2h} \left[\chi_n \left(C_n \frac{\text{sh } \chi_n x'}{\text{sh } \chi_n L} + D_n \frac{\text{sh } \chi_n (x' - L)}{\text{sh } \chi_n L} \right) + \right.$$

$$\left. + \gamma_k \xi_n \left(A_n \frac{\text{sh } \xi_n x'}{\text{sh } \xi_n L} + B_n \frac{\text{sh } \xi_n (x' - L)}{\text{sh } \xi_n L} \right) \right].$$

Коэффициенты A_0 , C_0 , B_0 , D_0 и A_n , C_n , B_n , D_n найдем, разложив функцию $N_0(y')$ (8) в ряд Фурье

$$N_0(y') = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos \frac{\pi n y'}{2h}.$$

Система уравнений относительно A_0 , C_0 , B_0 , D_0 имеет вид

$$C_0 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} B_0 = 0; \quad C_0 - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} B_0 = \frac{v_0}{2\delta_2 E_2};$$

$$C_0 L + D_0 + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} A_0 = 0; \quad C_0 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} A_0 = 0.$$

Для $n > 0$ получаем уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} -D_n \chi_n - B_n \frac{\alpha_3^2 \xi_n}{\alpha_1 + \alpha_2} = 0; \\ -D_n \chi_n - B_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n = \frac{v_n}{\delta_2 E_2}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C_n + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} A_n = 0; \\ C_n \chi_n + A_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n = 0. \end{array} \right.$$

Таким образом, процесс расчета напряженного состояния соединения при несимметричной нагрузке заключается в следующем

- 1) Вычисляются K , M и N_0 (8).
- 2) Находятся поперечные перемещения $V^{(k)}(x)$ (17).
- 3) Зная N_0 , находят продольные перемещения $U^{(k)}$ (18).
- 4) Находим перемещения $u^{(k)}$ (7), нормальные усилия в несущих слоях $N_x^{(k)} = N_{V,x}^{(k)} + N_{U,x}^{(k)}$ и напряжения в клее (4).

Модельная задача. Рассмотрим клеевое соединение алюминиевых пластинок ($E_1 = E_2 = 70$ ГПа, $G_1 = G_2 = 25$ ГПа), имеющих размеры $L = 5$ см, $2h = 3$ см, $\delta_1 = 2$ мм, $\delta_2 = 3$ мм. Толщина клеевого слоя $\delta_0 = 0,3$ мм, модуль сдвига $G_0 = 0,8$ ГПа. Полагаем, что продольная нагрузка (6) распределена по закону

$$F(y) = \begin{cases} F_0 [H/m], & y \geq h/2; \\ 0, & y < h/2. \end{cases}$$

Поперечные перемещения несущих слоев согласно предложенной модели не зависят от координаты y , поэтому касательные напряжения τ_y постоянны по ширине детали. Расчеты показывают что в данном случае эти напряжения не велики ($\tau_y / F_0 < 5 [m^{-1}]$)

График напряжений τ_x (4), для построения которого перемещения $u^{(k)}$ вычислялись согласно (7), показан на рис. 2.

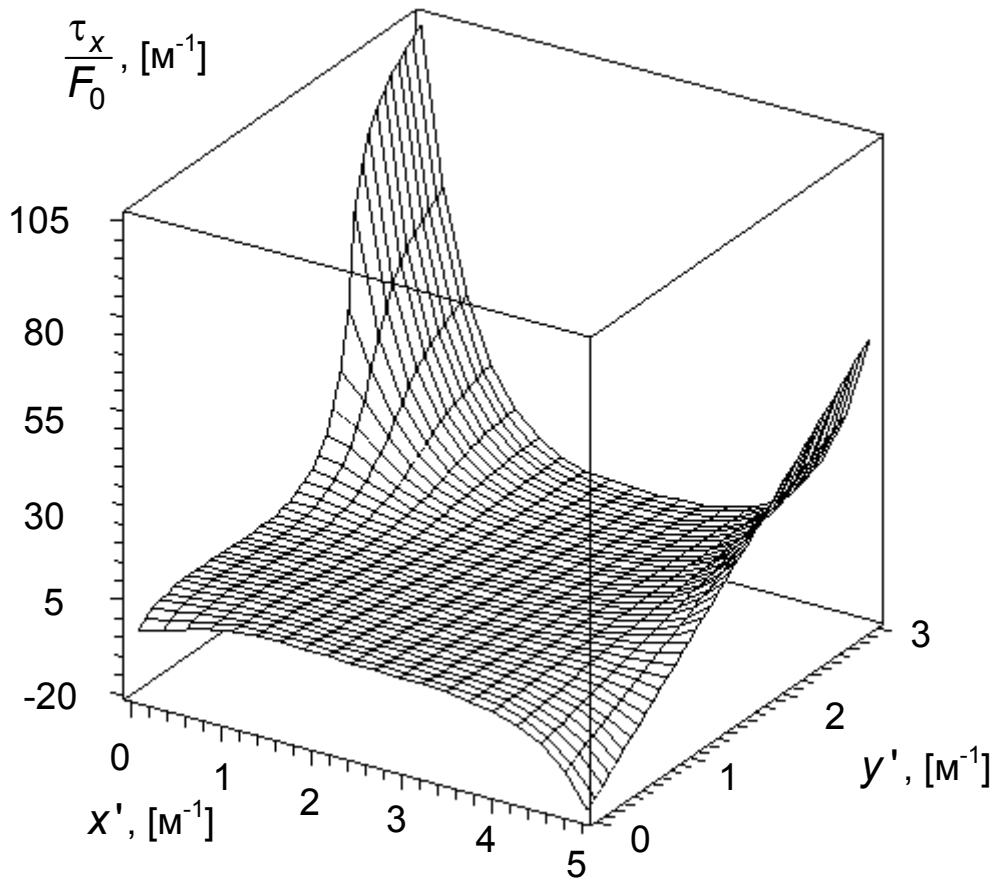


Рисунок 2 – Напряжения τ_x

Перемещения слоев под воздействием нагрузки (не в масштабе) показаны на рис. 3.

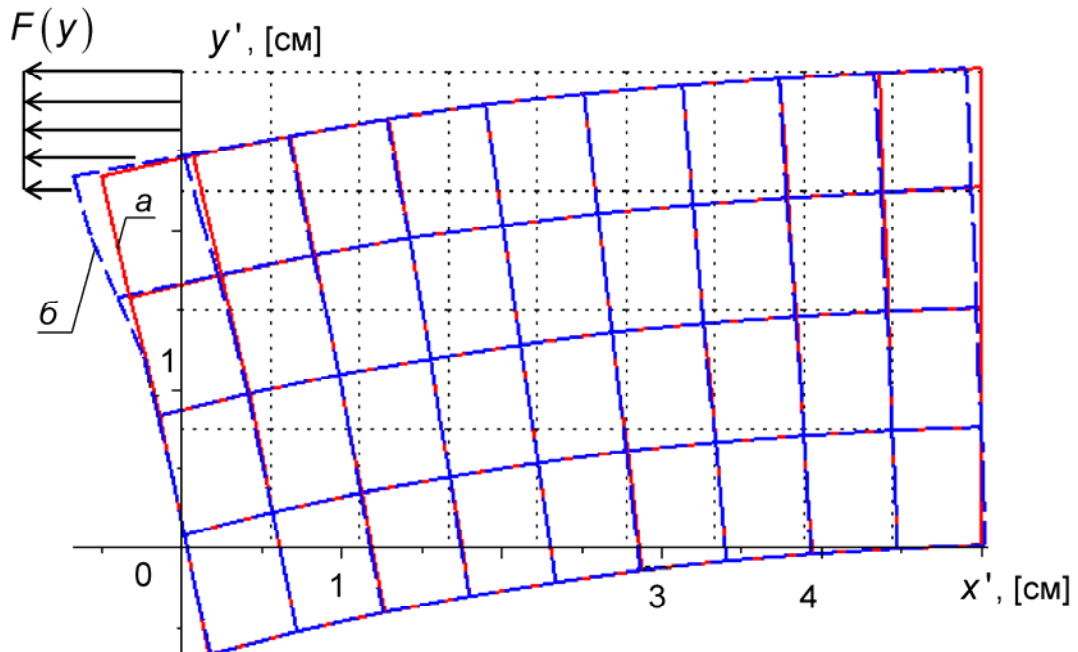


Рисунок 3 – Перемещения первого слоя (а), второго слоя (б) относительно исходного положения под воздействием нагрузки

Расчеты показывают, что даже для данной геометрии соединения вклад перемещений $V^{(k)}$ в продольные касательные напряжения τ_x является существенным – напряжения, обусловленные перемещениями $V^{(k)}$, достигают порядка половины суммарных напряжений.

Выводы. Ранее предложенная упрощенная двумерная модель клеевого соединения [1, 2] обобщена на учет поперечных перемещений несущих слоев, которые вычисляются согласно балочной теории. Поскольку в поперечном направлении несущие слои полагаются абсолютно жесткими, соответствующие напряжения в клее (τ_y) равномерно распределены по ширине соединения. Безусловно, эта идеализация достаточно груба, однако она позволяет оценить величину напряжений в продольном направлении (τ_x), которые значительно превосходят поперечные напряжения. Это позволяет использовать данную модель для задач проектирования.

Список использованных источников

1. Куреннов, С.С. Упрощенная двумерная модель клеевого соединения. Учет неравномерного приложения загрузки [Текст] / С.С. Куреннов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2014. – Вып. 2 (78). – С. 45 – 56.
2. Куреннов, С.С. Напряженное состояние клеевого соединения пластин разной ширины. Аналитическое решение [Текст] / С.С. Куреннов, Е.В. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2014. – Вып. 4 (80). – С. 113 – 123.
3. Васильев, В.В. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы [Текст] / В.В. Васильев, С.А. Лурье // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 4. – С. 40 – 49.
4. Mathias J.D. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches [Text] / Mathias J.D., Grédiac M., Balandraud X. // Int. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 6921 – 6947.

Поступила в редакцию 09.02.2015.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*