

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ ВЕРШИНЫ СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНЫ

Введение

Проблема разрушения материалов и конструкций является центральной проблемой учения механики деформируемого твердого тела. В последнее время в связи с недостаточным уровнем достоверной оценки при прогнозировании возникновения и распространения трещин в современных конструкциях возрос интерес к изучению данных процессов [1]. Однако, несмотря на наличие большой информации о различных явлениях разрушения, механизм его известен далеко не полностью, и в литературных источниках остается крайне мало экспериментальных работ. Это обусловлено сложностью и дороговизной проведения подобных экспериментов, а также невозможностью подробно изучить процессы зарождения и дальнейшего развития трещин.

С учетом значительного увеличения возможностей вычислительной техники, развития методов численного моделирования и совершенствования пакетов прикладных программ наибольшее распространение получили методики расчета, основанные на использовании метода конечных элементов (МКЭ), реализованные в одном из сертифицированных программных комплексов [2, 3].

В данной работе рассмотрен анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) в районе вершины центральной трещины в металлической пластине при растяжении с использованием аналитических моделей и методов, основанных на использовании конечных элементов (КЭ), описывающих исследуемый объект.

Формирование исходных данных

Исследуемый объект (образец) представляет собой квадратную пластину размером $b \times b = 1 \times 1$ м с одиночной центральной поперечной трещиной длиной $2l = 0,2$ м. Этот образец растягивается равномерно распределенным усилием $\sigma = 1$ МПа перпендикулярно к линии трещины (рис. 1). Пластина изготовлена из изотропного материала со следующими физико-механическими характеристиками: $E = 72$ ГПа, $G = 28$ ГПа, $\mu = 0,3$, $\sigma_m = 290$ МПа. Толщина образца значительно меньше остальных ее габаритных размеров, поэтому можно заключить, что объект находится в условиях плоского напряженного состояния.

Коэффициент интенсивности напряжений

Расчет тела на прочность неразрывно связан с определением его НДС. Это необходимо не только в целях обнаружения опасных точек, но и для суждения о прочности материала на основании различных критериев наступления опасного состояния. Для многих тел определение НДС в опасной точке сводится к вычислению коэффициентов концентрации напряжений, которые представляют собой отношение максимального значения какой-либо компоненты напряжений к соответствующему номинальному значению и, таким образом, выражаются безразмерными числами.

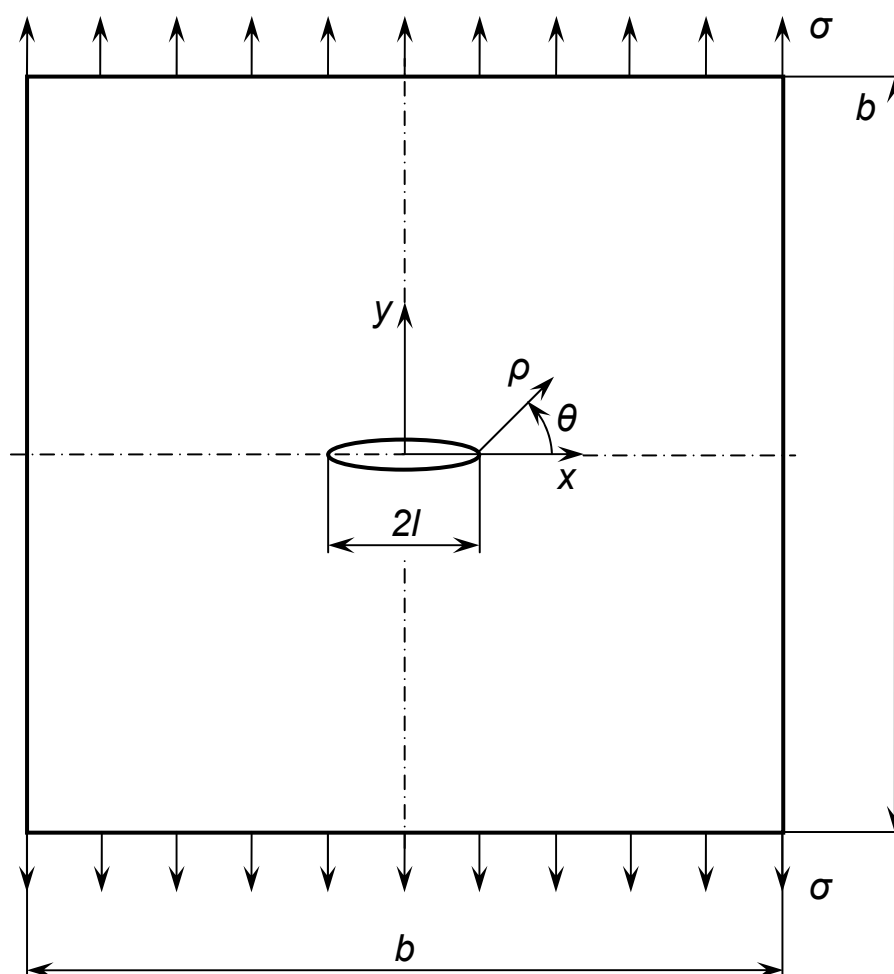


Рисунок 1 – Пластина с центральной поперечной трещиной при одноосном растяжении

При наличии в теле трещины для суждения о характере ее возможного распространения и, соответственно, о прочности тела также необходимо знание НДС в районе вершины трещины. Однако эта задача отличается от обычной задачи определения коэффициента концентрации напряжений тем, что линеаризованная постановка

краевых условий и физически линейная теория упругости приводят к бесконечным напряжениям вблизи вершины. При этом понятие коэффициента концентрации напряжений теряет смысл.

Картина распределения напряжений и деформаций в окрестностях вершины трещины не зависит от длины трещины, формы тела и схемы действующих нагрузок [4, 5]. Интенсивность же этого асимптотического распределения определяется только коэффициентом интенсивности напряжений (КИН) K , который не зависит от координат точек вблизи вершины. Следовательно, процессы разрушения материала возникают и определяются интенсивностью поля напряжений, окружающего вершину трещины, и характеризуются КИН. В отличие от коэффициента концентрации КИН является размерной величиной ($[K] = [\text{Па} \cdot \text{м}^{1/2}]$).

Аналитическое определение КИН

Под действием заданных нагрузок на рассматриваемый объект наблюдаются деформации при растрескивании типа «отрыв» (тип I), связанный с отрывным смещением, при котором поверхности трещины прямо расходятся одна от другой во взаимно противоположных направлениях [5].

На основании аналитического решения, полученного А. Гриффитсом в 1921 г. для бесконечной пластины с одиночной трещиной, можно определить величину КИН первого рода для рассматриваемой задачи [1, 4]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} . \quad (1)$$

Следует обратить внимание на то, что полученное решение в некоторой степени является приближенным. Это связано с тем, что для рассматриваемой пластины конечной ширины боковые стороны могут оказывать влияние на поле напряжений, возмущенное наличием трещины. Таким образом, необходимо использовать поправочный коэффициент Y , который учитывал бы влияние данного фактора:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \cdot Y . \quad (2)$$

На основании решения, полученного Ирвингом в 1958 г., величина поправочного коэффициента зависит от относительной ширины трещины:

$$\lambda = \frac{2l}{b} . \quad (3)$$

Величина поправочного коэффициента составляет [1, 4]:

$$Y_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi \lambda} \text{tg}(\pi \lambda)} . \quad (4)$$

В 1965 г. Исида получил эмпирическую формулу для определения поправочного коэффициента [1, 4]:

$$Y_2 = \frac{1,77 + 0,454\lambda - 2,04\lambda^2 + 21,6\lambda^3}{\sqrt{\pi}}. \quad (5)$$

Кроме того, в 1966 г. Федерсен получил еще один вариант нахождения поправочного коэффициента [4,6]:

$$Y_3 = \sqrt{\sec(\pi\lambda)}. \quad (6)$$

Определение КИН с использованием МКЭ

Применение аналитических решений для агрегатов сложной формы затруднительно, поэтому в настоящее время широкое распространение получили методы решения на основании МКЭ.

Для расчета пластины с центральной поперечной трещиной был использован один из программных комплексов КЭ-анализа, возможности которых позволяют решать широкий круг задач [2].

На основании исходных данных была сгенерирована КЭ-модель, максимально точно описывающая рассматриваемую квадратную пластину с вырезом. Для ее моделирования был использован 8-узловой плоский элемент для задач на плоское напряженное состояние. Вид конечно-элементной модели, представленной 10 000 элементами и 30 602 узлами, с соответствующими граничными условиями приведен на рис. 2.

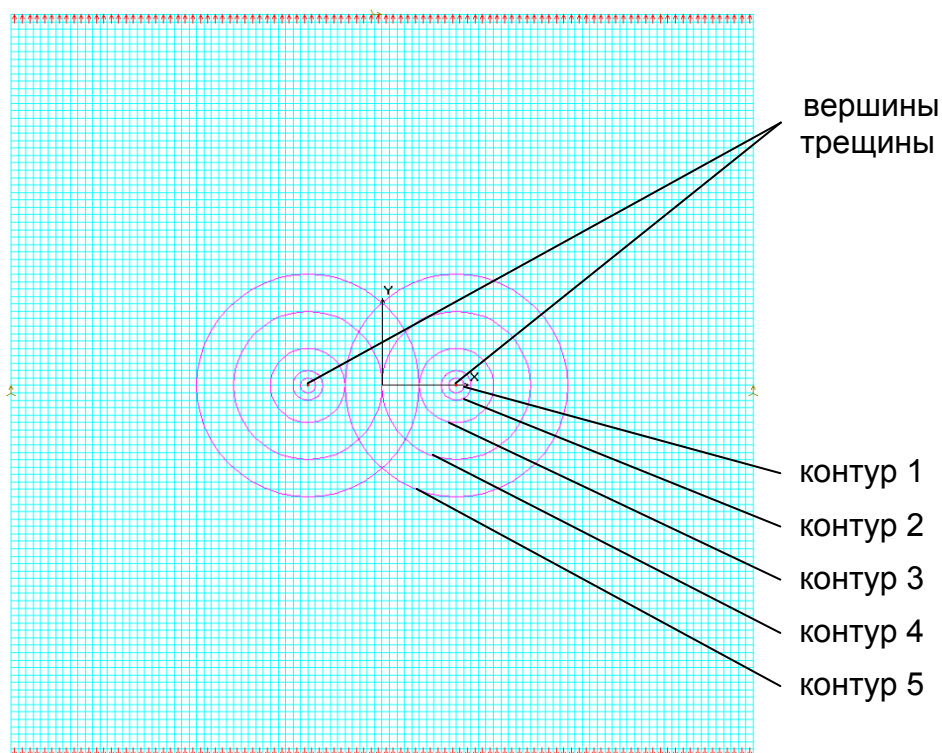


Рисунок 2 – Конечно-элементная модель пластины с трещиной

Поскольку генерация КЭ-сетки выполняется независимо для различных частей модели, то в ней будут присутствовать дублирующиеся узлы на общих граничных кривых. Из требований к совместимости они были «слиты», за исключением тех, которые формируют трещину (расположенные между ее вершинами).

Оценка НДС и КИН на основе использования МКЭ осуществляется двумя различными методиками: методом перемещений и на основании вычисления инвариантного J-интеграла [2].

Для расчета методом перемещений необходимо дополнительно определить вершины трещины (рис. 2). В этом случае на основании асимптотических формул, полученных Ирвингом в 1961 г., определяется НДС в окрестностях вершины трещины и КИН. Например, для первого типа деформаций эти выражения имеют следующий вид [1]:

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}; \quad (7)$$

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \left(3 - 4\mu - 1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(3 - 4\mu + 1 - 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{cases},$$

где r , θ – полярные координаты в окрестностях вершины трещины; G , μ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

Поскольку рассматриваемый объект является двумерным и однородным, то для определения КИН можно воспользоваться инвариантным J-интегралом, вычисленным по замкнутому контуру, описанному вокруг вершины трещины (рис. 2):

$$J = \oint_s \left(w dy - p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right), \quad (8)$$

где s – произвольный замкнутый контур, внутри которого должна располагаться вершина трещины; w – плотность энергии деформации; p_i – вектор распределенных усилий, действующих на внешнюю область, ограниченную контуром s ; u_i – вектор перемещений на контуре s .

Характерной особенностью J-интеграла является его независимость от формы и размеров контура s (контур может быть как очень малым, так и совпадать с границей тела) [4]. Для увеличения достоверности результатов, полученных вследствие проведения

численного эксперимента, было определено несколько контуров обхода, центр которых совпадает с вершинами трещин.

В результате проведения анализа были определены основные компоненты НДС пластины с трещиной. На рис. 3 показана картина линейных результирующих перемещений, что характеризует ее деформированное состояние.

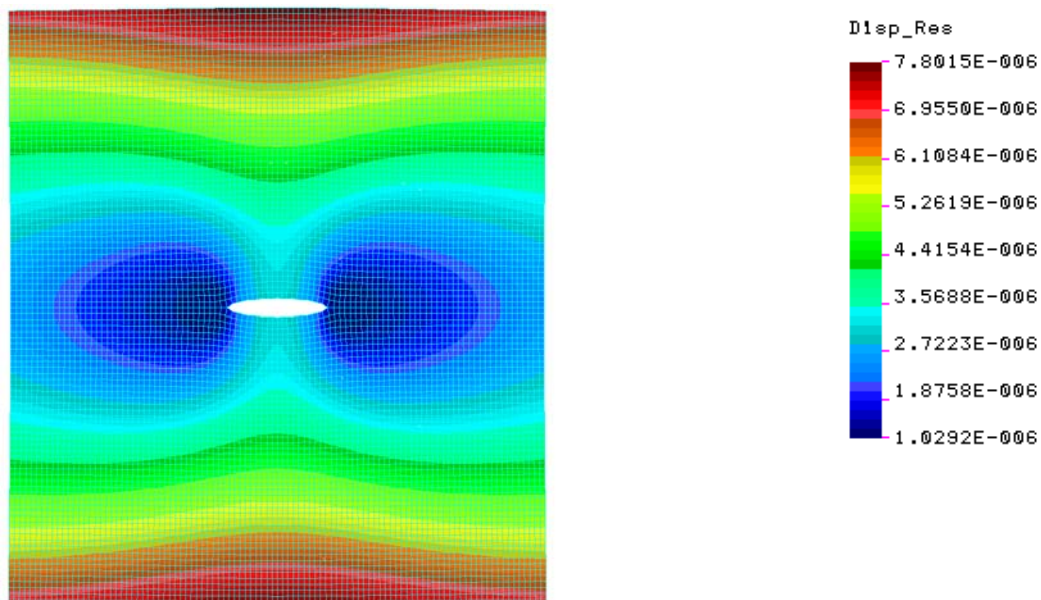


Рисунок 3 – Деформированное состояние пластины.

Масштабный коэффициент $K_{масш} = 6000$

На рис. 4 показана картина распределения эквивалентных напряжений по Мизесу в пластине. Данные картины характеризуют общее напряженное состояние в любой точке исследуемого объекта и позволяют судить об интенсивности напряженного состояния и о распределении силового потока в нем.

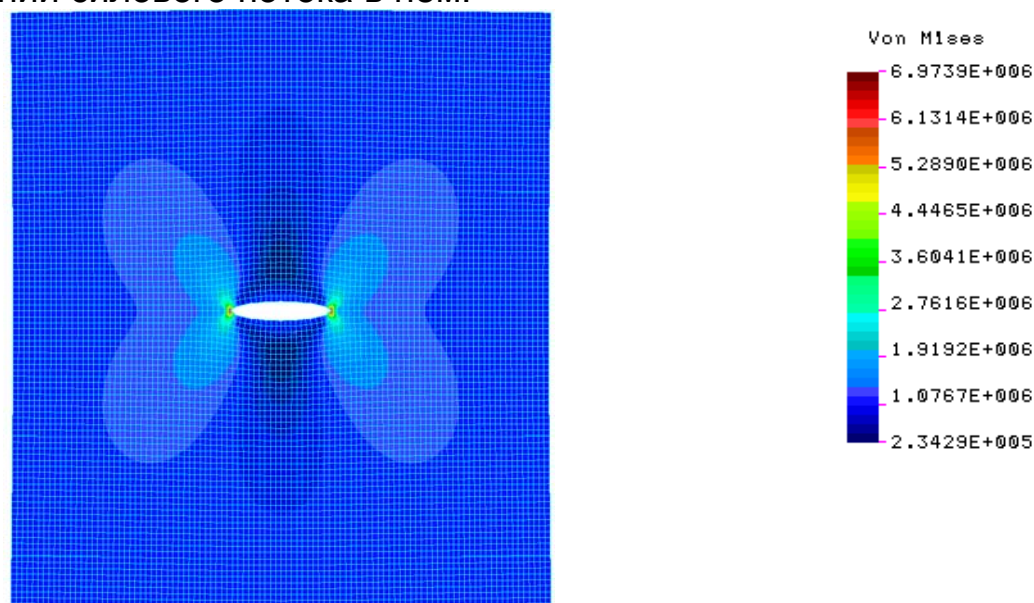


Рисунок 4 – Картина распределения приведенных напряжений в пластине, Па

В результате проведения численного эксперимента было установлено следующее:

- максимальное результирующее перемещение узлов пластины $f_{max} = 7,8015 \cdot 10^{-6}$ м;
- максимальное приведенное напряжение в пластине $\sigma_{max} = 6,974$ МПа;
- величина КИН первого рода, определенного с использованием метода перемещений, $K_{ID} = 0,563$ МПа·м^{1/2};
- величина КИН первого рода, определенного с использованием инвариантного J-интеграла:
 - для контура 1 $K_{IJ1} = 0,543$ МПа·м^{1/2};
 - для контура 2 $K_{IJ2} = 0,589$ МПа·м^{1/2};
 - для контура 3 $K_{IJ3} = 0,592$ МПа·м^{1/2};
 - для контура 4 $K_{IJ4} = 0,593$ МПа·м^{1/2};
 - для контура 5 $K_{IJ5} = 0,595$ МПа·м^{1/2}.

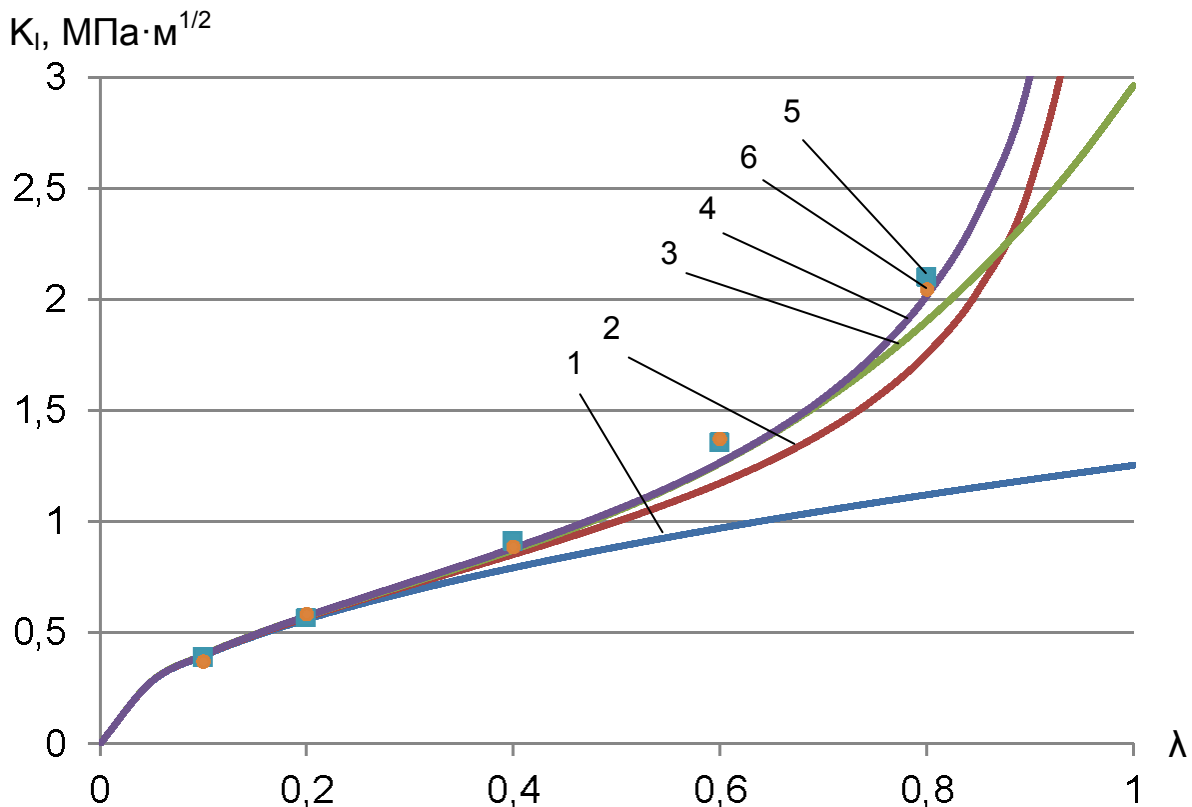
Полученные значения КИН первого рода, определенного с использованием инвариантного J-интеграла, необходимо усреднить:

$$K_{IJ} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 K_{IJi} = 0,582 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}. \quad (9)$$

Для оценки влияния относительной ширины трещины на величину КИН первого рода необходимо провести серию численных экспериментов и аналитических расчетов для различных величин этого параметра. Результаты расчетов для удобства сведены в табл. 1 и показаны на рис. 5.

Таблица 1 – Величина КИН первого рода для рассматриваемого образца

Относительная ширина трещины λ	КИН первого рода K_I , МПа·м ^{1/2}					
	Аналитическое решение				Решение МКЭ	
	Гриффитс	Ирвинг	Исида	Федерсен	Метод перемещений	J-интеграл
0,1	0,396	0,398	0,4	0,399	0,387	0,370
0,2	0,560	0,570	0,574	0,575	0,563	0,582
0,4	0,793	0,852	0,873	0,881	0,910	0,884
0,6	0,971	1,173	1,263	1,266	1,353	1,317
0,8	1,121	1,754	1,902	2,017	2,098	2,043



1 – аналитическое решение Гриффитса; 2 – аналитическое решение Ирвинга; 3 – аналитическое решение Исиды; 4 – аналитическое решение Федерсона; 5 – решение МКЭ методом перемещений; 6 – решение МКЭ на основании J-интеграла

Рисунок 5 – Зависимость КИН первого рода от относительной ширины трещины

На основании полученных зависимостей можно сделать вывод о том, что результаты, полученные в ходе проведения серии численных экспериментов, хорошо согласуются с аналитическими решениями, которые учитывают конечность пластины (рис. 5, кривая 2 – 4). Решение Гриффитса для бесконечной пластины (рис. 5, кривая 1) имеет достаточную точность лишь в том случае, когда область, возмущенная наличием трещины, не выходит за пределы объекта. Размер этой области можно определить из следующей зависимости [4]:

$$a = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma^2}, \quad (10)$$

или с учетом выражения (1)

$$a = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma^2} = \frac{(\sigma\sqrt{\pi l})^2}{2\pi\sigma^2} = \frac{l}{2}, \quad (11)$$

т.е. в диапазоне $0 < \lambda < \frac{2}{3}$ решение Гриффитса применимо для рассматриваемого объекта с трещиной.

Таким образом, к исследуемому образцу с центральной трещиной, относительная ширина которой составляет $\lambda = 0,2$, может быть применена модель бесконечной пластины, растягиваемой равномерно распределенными усилиями.

Аналитическое определение НДС пластины

Для суждения о возможности превращения неподвижного разреза в растущую трещину, а также в целях исследования механических свойств образцов с трещинами необходимо иметь данные о его напряженном состоянии. При этом наиболее важными являются сведения о напряженном состоянии в окрестности вершины трещины.

Для оценки полей напряжений вблизи вершины трещины применяют так называемые асимптотические формулы (7), которые дают хорошие приближения в области, где координата r мала по сравнению с длиной трещины (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 \pm \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}.$$
(12)

При этом напряжения вдоль линии разреза ($\theta = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}; \tau_{xy} = 0.$$
(13)

Для большинства реальных материалов перед вершиной трещины возникает пластическая область. Если протяженность этой области не превышает 20% от длины трещины, то поле напряжений все еще может быть определено в рамках линейной теории упругости с использованием асимптотических формул. Если же пластическая зона выходит за пределы указанного диапазона, то для оценки НДС тела следует использовать другие подходы, например методы теории пластичности.

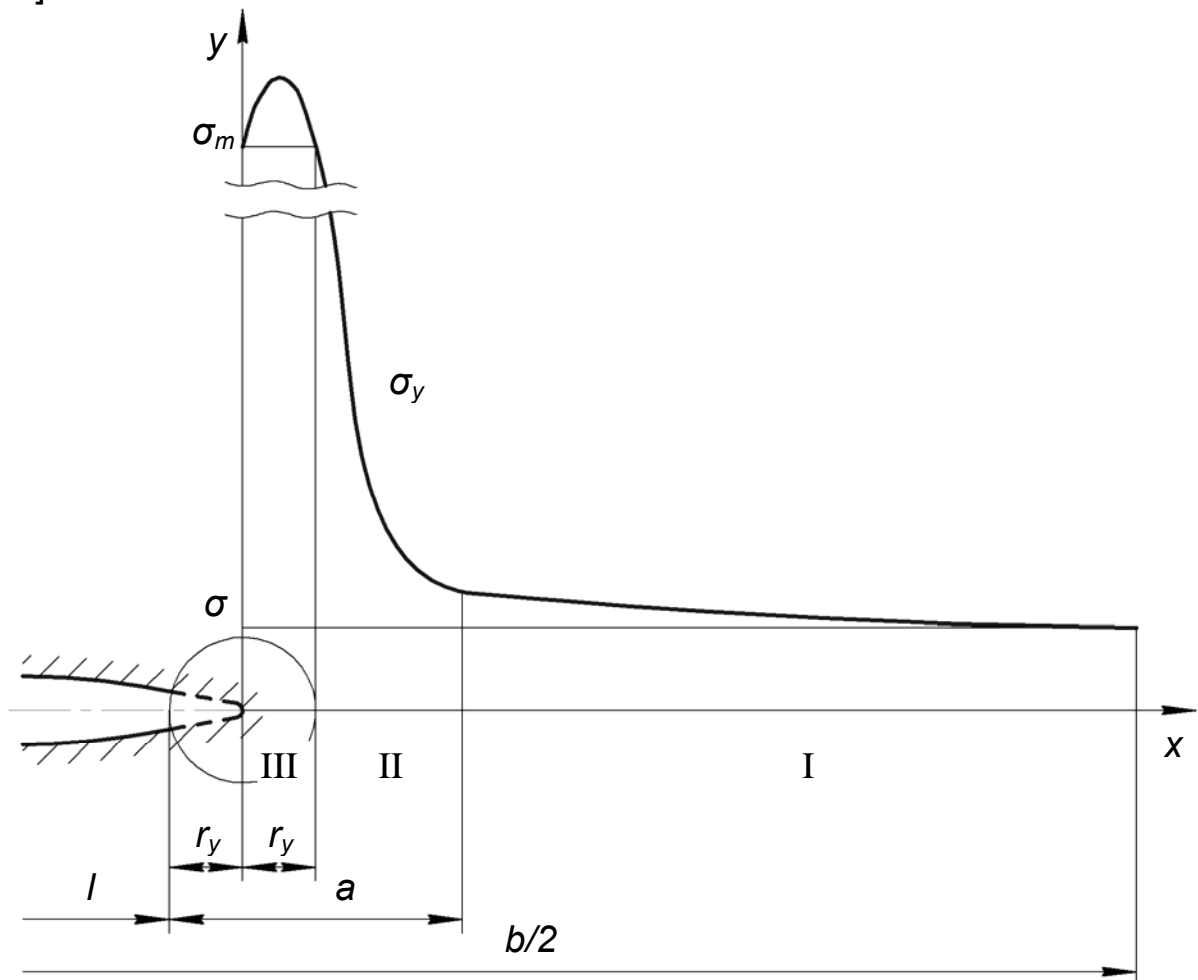
Если размеры пластической области малы по сравнению с длиной трещины, то ее наличие можно учесть приближенно [4]:

$$d_y = 2r_y = \frac{K_I^2}{\pi \sigma_m^2} = \frac{0,56 \cdot 10^6}{2\pi \cdot (290 \cdot 10^6)^2} = 1,189 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$
(14)

Для справедливости положений линейной механики развития трещин при вычислении КИН следует искусственно увеличить длину трещины на половину длины пластической области (ввести пластическую поправку Ирвинга) (рис. 6):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi(l + r_y)} = 1 \cdot \sqrt{\pi(0,2 + 0,595 \cdot 10^{-6})} = 0,561 \text{ (МПа} \cdot \text{м}^{1/2}\text{)}.$$
(15)

Таким образом, следует обратить внимание на то, что приведенные выше асимптотические выражения(12) применимы только в области, возмущенной наличием трещины, т.е. при $r_y < r < a$ (рис. 6) [1, 4].



I – область номинальных напряжений; II – область справедливости асимптотических формул; III – область больших нелинейных деформаций и реализации механики разрушения

Рисунок 6 – Распределение напряжений перед вершиной трещины

Для более точной оценки напряженного состояния в районе вершины трещины можно воспользоваться так называемым точным решением, основанным на концепции Гриффитса – Орована – Ирвина. В этом случае напряжения вдоль линии трещины для заданных граничных условий можно определить следующим образом[4]:

$$\sigma_x = \sigma \left(\frac{x/l}{\sqrt{(x/l)^2 - 1}} - 1 \right); \quad \sigma_y = \sigma \frac{x/l}{\sqrt{(x/l)^2 - 1}}; \quad (16)$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Определение НДС пластины с использованием МКЭ

На основании результатов, полученных в ходе проведения серии численных экспериментов для прямоугольной пластины с одиночной центральной поперечной трещиной длиной $2l = 0,2$ м, были получены картины распределения напряжений по объекту (рис. 6 – 8).

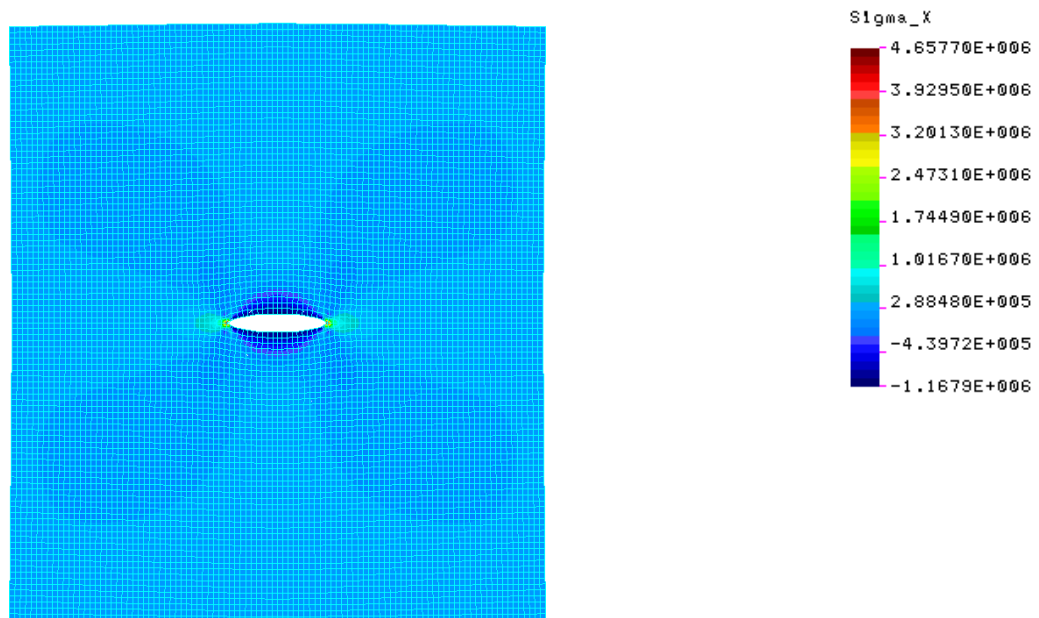


Рисунок 7 – Картина распределения нормальных напряжений вдоль трещины (σ_x) в пластине, Па

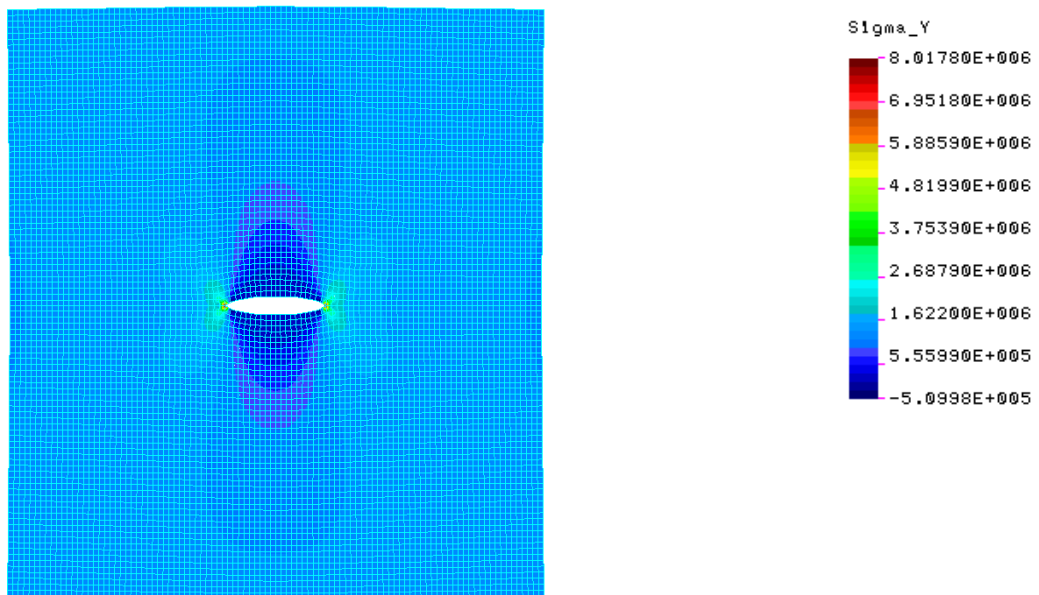


Рисунок 8 – Картина распределения нормальных напряжений поперек трещины (σ_y) в пластине, Па

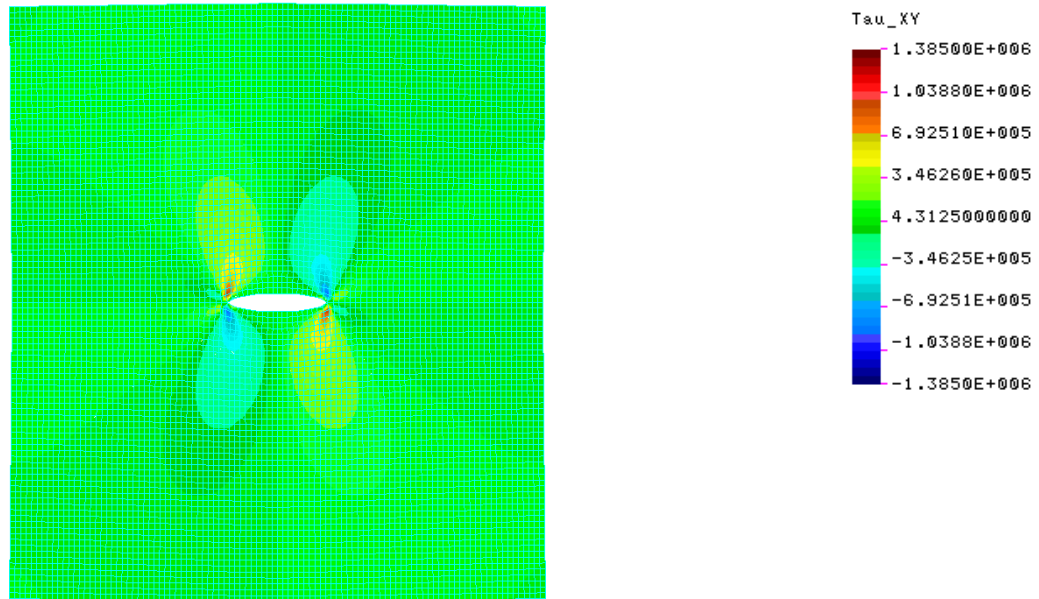
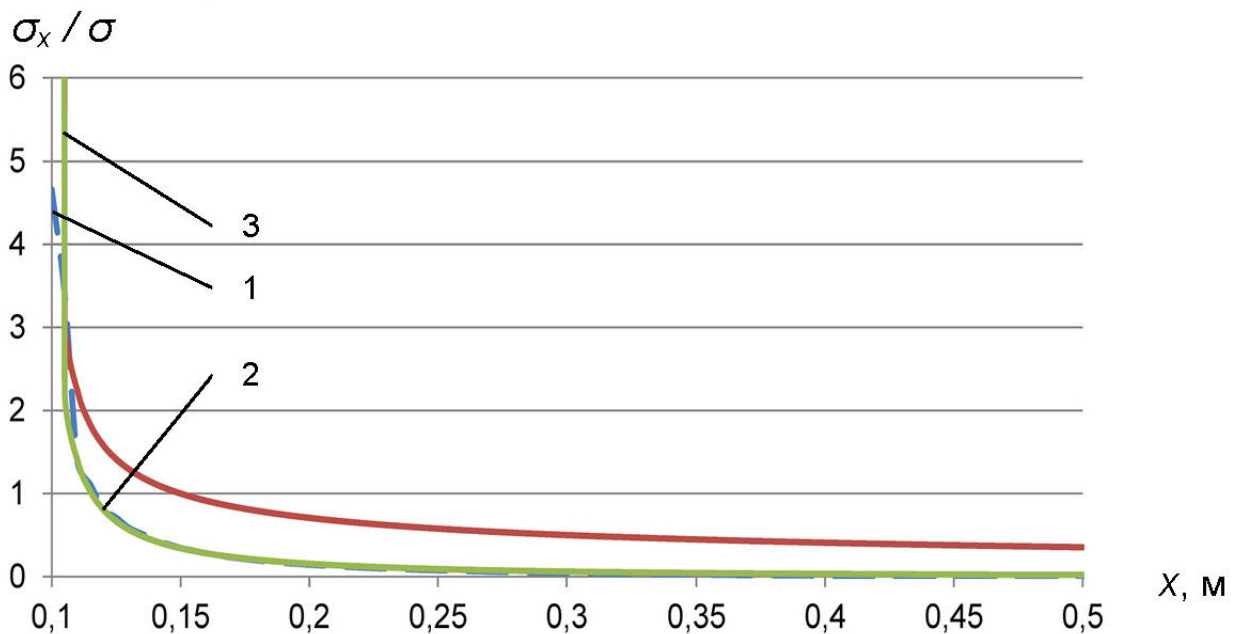


Рисунок 9 – Картина распределения касательных напряжений(τ_{xy}) в пластине, Па

Анализ полученных результатов

Для анализа полученных результатов необходимо графически сопоставить итоги проведения численного эксперимента и аналитических решений.



1 – решение МКЭ; 2 – асимптотическое аналитическое решение;
3 – точное аналитическое решение

Рисунок 9 – Зависимость нормальных напряжений вдоль трещины в безразмерной форме от расстояния до центра пластины

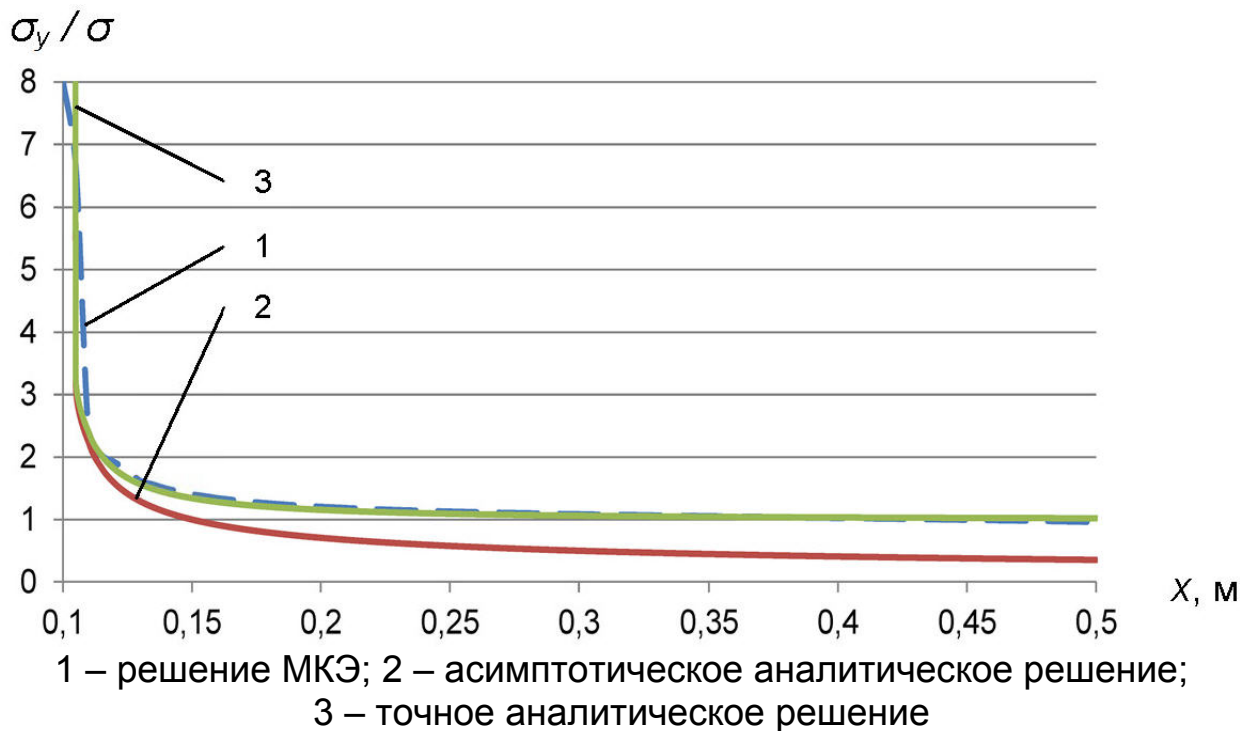


Рисунок 10 – Зависимость нормальных напряжений поперек трещины в безразмерной форме от расстояния до центра пластины

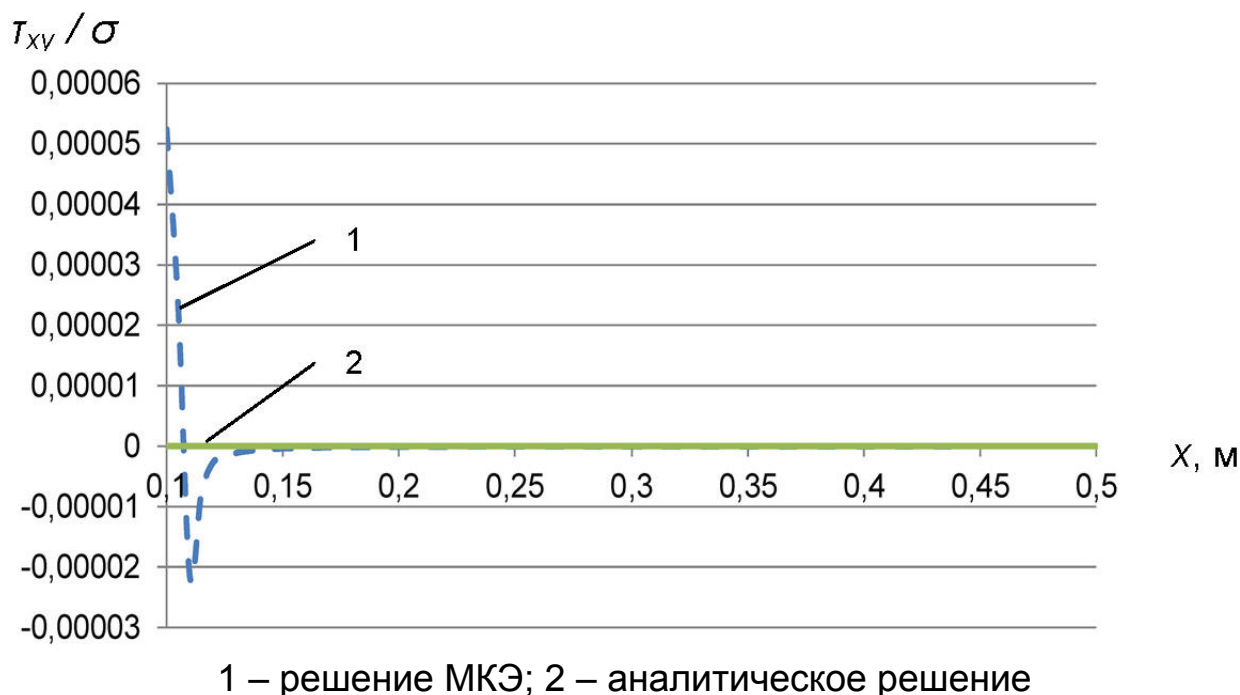


Рисунок 11 – Зависимость касательных напряжений в безразмерной форме от расстояния до центра пластины

Полученные зависимости (рис. 9 – 11) свидетельствуют о том, что результаты проведения численных экспериментов хорошо согласуются с асимптотическими решениями в упругой области, возмущенной наличием трещины. Точное же решение описывает НДС тела с

трещиной не только в этой области, но и в области номинальных напряжений.

Для более точной оценки НДС в бесконечно малой окрестности вершины трещины необходимо воспользоваться решениями теории пластичности. В рамках линейной теории упругости напряжения в пластической области принимаются равными пределу текучести материала, а в аналитические решения вводится так называемая поправка Ирвинга [4].

Выводы

Последние разработки ведущих производителей программных комплексов, реализующих МКЭ для анализа НДС твердых тел, свидетельствуют о том, что расчет объектов с трещиной является актуальной и востребованной задачей для современных инженеров. Однако следует обратить внимание на то, что в большинстве случаев единственным решением, которое может быть получено, является величина КИН. Для оценки же НДС тела с трещиной, применения критериев разрушения и предсказания вероятностного направления ее развития необходимо использовать различные аналитические методы и решения.

Для рассмотренного объекта с одиночной центральной поперечной трещиной, который растягивается равномерно распределенным усилием перпендикулярно линии трещины, были определены величины КИН и получена картина распределения напряжений и перемещений с использованием различных аналитических методов и в ходе проведения серии численных экспериментов. Полученные зависимости свидетельствуют о достаточно высоком совпадении полученных результатов.

Список использованных источников

1. Пестриков, В.М. Механика разрушения твердых тел [Текст] : курс лекций / В.М. Пестриков, Е.М. Морозов.– СПб.: Профессия, 2002. – 320 с.
2. COSMOS/M 2.7 User's Guide.– Structural Research & Analysis Corp., 2001. – 770 с.
3. Морозов, Е.М. ANSYS в руках инженера [Текст] : Механика разрушения / Е.М. Морозов, А.Ю. Муйземник, А.С. Щадский.– М.: ЛЕНАНД, 2010. – 456 с.
4. Партон, В.З. Механика упругопластического разрушения [Текст] / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
5. Брок, Д. Основы механики разрушения [Текст]: пер. с англ. – М.: Высш. шк., 1980. – 368 с.

6. Разрушение [Текст]: т. 7, ч. 1: Разрушение неметаллов и композиционных материалов. Неорганические материалы: пер. с англ. / под. ред. Ю.Н. Работнова. – М.: Мир, 1976. – 635 с.

7. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2 т. Т. 1 [Текст] : пер. с англ. / под. ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 448 с.

8. Слепян, Л.И. Механика трещин [Текст] / Л.И. Слепян. – Л.: Судостроение УРСС, 1990. – 296 с.

9. Адлуцкий, В.Я. Конечно-элементное моделирование процесса распространения трещин при изгибе пластин с повреждениями [Текст] / Я.В. Адлуцкий // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб.наук. праць Дніпропетр. нац. ун-ту імені Олеся Гончара. – Вып. 11. – Д., 2010. – С. 3 – 10.

Поступила в редакцию 19.02.2015.

*Рецензент: канд. техн. наук, проф. В.В. Кириченко,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*