

УДК 621.891

В. І. КРАВЦОВ, М. В. КІНДРАЧУК, О. В. РАДЬКО, М. А. ГЛОВИН

Національний авіаційний університет, Київ

МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ТРИБОСПРЯЖЕННЯ ПРИБУЖНОМУ ДЕФОРМУВАННІ ЕЛЕМЕНТІВ

На прикладі деформування елемента шорсткості у трибоспряженні представлено методика дослідження його пружного деформування відносно опорної поверхні при одночасній дії статичних розподілених і зосереджених навантажень з подальшою оптимізацією параметрів. Для цього коротко розглядається математична модель, що описує рівновагу та пружне деформування просторово викривленого елемента, його зовнішню та внутрішню геометрію. Представлено метод оптимізації параметрів трибоспряження за умовою деформівності при наявності різноманітних нелінійних обмежень-нерівностей на внутрішні зусилля, переміщення і геометричні характеристики подовжньої осі з використанням методів оптимального управління і нелінійного програмування.

Ключові слова: елемент шорсткості, опорна поверхня, деформування, диференціальні рівняння, оптимальне проектування, цільова функція, чисельний розв'язок.

Вступ. Проблему моделювання зношування в сучасній трибології не можна вважати завершеною. Відома безліч феноменів, що супроводжують цей процес, які поки неможливо укласти в рамки якої-небудь із запропонованих теорій. Велика кількість контрольованих характеристик якості трибоспряження вимагає виваженого та обґрунтованого підходу до вибору найбільш ефективних та економічних методів їх визначення. Стан поверхні конструкційного елемента оцінюється як правило, за набором одиничних або комплексних параметрів, які оцінюють якість поверхневого шару [1; 2].

Моделювання процесів тертя залишається дотепер актуальною науково-технічною задачею, незважаючи на те, що за останні 50 років сучасна наукова думка напрацювала практично вичерпний математичний апарат, який теоретично дозволяє розрахувати значення як сили (коефіцієнта) тертя, так і зношування. Але визначити всі ті фізико-механічні параметри, які входять у формули, і ще розрахувати змінювання їх значень у часі залежно від змін навантажень, швидкості, температури надзвичайно важко [3].

Очевидна складність аналізу цих процесів при аналітичному або експериментальному методах досліджень, які вимагають значних часових витрат. Тому поява нових математико-обчислювальних моделей дозволить значно скоротити час на впровадження сучасних триботехнологій. Розв'язок таких задач виявляється можливим тільки сучасними чисельними методами нелінійного аналізу, застосування яких спонукає до вибору модифікації розв'язальних рівнянь, які забезпечують алгоритмічність і ефективність використовуваних підходів [4].

Пружного деформування можуть зазнати як опорні поверхні, так і мікронерівності. У загальному випадку таке пружне деформування нелінійно й просторово. Крім того в міру зношування змінюється як геометрія розглянутих елементів тертя, так і діючі на них навантаження. Для урахування всіх перерахованих факторів у даній статті пропонується методика, що може відслідковувати змінювання одночасно декількох параметрів у роботі трибоспряження, а саме, зміну геометрії опорних поверхонь у часі (квазістатичне деформування),

зміну жорсткості опорних поверхонь за рахунок зносу, зміну окремих фізико-геометричних параметрів для оптимізації роботи підшипника тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. До теперішнього часу зазначені дослідження не одержали необхідного розвитку через відсутність достовірних математичних моделей, які досить просто й ефективно реалізуються у вигляді алгоритмів і програм для чисельного розв'язку даних задач. Існуючі сучасні математичні моделі дослідження напружено-деформованого стану (НДС) трибоспряження [1; 2; 5] дозволяють знаходити необхідні параметри НДС при завчасно заданих фізико-геометричних властивостях конструкції, але для їх оптимізації використовується, як правило, метод підбору.

Мета роботи та постановка задачі. Розглянемо задачу оптимального проектування трибоспряження на прикладі деформування елемента мікрошорсткості поверхневого шару. Перед тим як розв'язувати задачу оптимізації необхідно, звичайно, використати метод визначення характеристик, які підлягають оптимізації. Для урахування факторів, які підлягають оптимізації, у даній статті пропонується методика, що може відслідковувати змінювання одночасно декількох параметрів у роботі трибоспряження, а саме, зміну геометрії опорних поверхонь у часі (квазістатичне деформування), зміну жорсткості опорних поверхонь за рахунок зносу, зміну окремих фізико-геометричних параметрів тощо.

Виклад основного матеріалу. Докладно пропонується метод описано в [5]. Коротко його опишемо. Математична модель базується на відомих підходах Лагранжа і Ейлера, які описують рівновагу і пружне деформування елемента, його зовнішню та внутрішню геометрію. На підставі цих передумов сформована система розв'язальних рівнянь 18 порядку, які в загальному випадку нелінійні і які описують просторове деформування елемента. Методика чисельного розв'язку системи рівнянь заснована на спільному використанні методу продовження за параметром й методу Ньютона-Канторовича. Практична реалізація методу здійснюється у вигляді програм для чисельних розрахунків на ЕОМ. Для верифікації методу проведено ряд експериментів, що показує високий збіг результатів чисельного розрахунків і експерименту. Практичне використання обчислювального алгоритму встановило ряд переваг у порівнянні з відомими засобами реалізації інших методів аналогічного призначення.

Задачу оптимізації за умовою деформівності при наявності різноманітних нелінійних обмежень-нерівностей на внутрішні зусилля, переміщення і геометричні характеристики подовжньої осі будемо розв'язувати з використанням методів оптимального управління і нелінійного програмування. Складність задачі, що розв'язується, пояснюється високим порядком і істотною нелінійністю системи розв'язальних рівнянь, а також наявністю різноманітних обмежень.

Нехай є система, що складається з опорної поверхні (рис. 1.) і жорстко прикріпленого до нього елемента шорсткості у вигляді параболи, контур осі якої може являти собою викривлений в просторі пружний елемент. Загальний вигляд такої системи показано на рис. 1. Під дією сил, зображених на рис. 1 елемент шорсткості деформується, причому прогин осі в найбільш деформівній точці по довжині об'єкта в системі координат, жорстко пов'язаної з опорною поверхнею, досягає величини, сумірної з розмірами елемента. Метою розв'язання задачі оптимального проектування є зниження вказаного переміщення або максимальних внутрішніх силових факторів шляхом зміни геометрії подовжньої осі і (або) перерозподілу матеріалу (зміна геометричних розмірів поперечного перерізу при постійній масі).

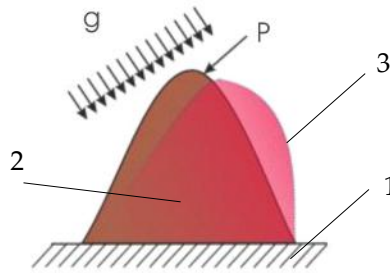


Рис. 1. Схема елемента шорсткості та його вигляд після деформування: 1 – опорна поверхня; 2 – елемент виступу в недеформованому стані; 3 – елемент виступу в деформованому стані (чисельний розрахунок)

За запропонованою методикою рівняння пружної рівноваги поздовжньої осі та кінематичні співвідношення зведені в систему звичайних диференціальних рівнянь 18 порядку, що описують нелінійне просторове деформування пружного елемента при дії довільного вектора статичних, квазістатичних або динамічних навантажень, що як завгодно розташовані та змінювані у просторі та часі [4]:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{f}(\mathbf{X}, s, \lambda) \quad (1)$$

де $\mathbf{X}(s)$ – вектор стану ($m=18$), \mathbf{f} – вектор-функція правих частин системи рівнянь; λ – параметр інтенсивності збурювання (навантаження), штрихом позначена похідна по s . Параметр λ , який може бути як дійсним, так і формальним, відображає кількісні характеристики задачі. При цьому пружні переміщення не зв'язуються ніякими геометричними обмеженнями і вважається, що лінії дії зовнішніх сил можуть зміщатися, повертатися і внаслідок цього функціонально або імовірно змінюватися.

Чисельна реалізація розв'язку здійснюється у вигляді крокового процесу за параметром. Для цього запропоновано методику, що не пов'язана з попереднім зниженням порядку розв'язальної системи рівнянь і заснована на спільному застосуванні методу продовження за параметром розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь і методу Ньютона-Канторовича. Її відмінною рисою є те, що розв'язок послідовності лінеаризованих крайових задач при кроковому збільшенні параметра навантаження будується без попередньої лінеаризації вихідних нелінійних диференціальних рівнянь. При розв'язку можливі різні комбінації додатку навантажень на елементи трибоспряження в динаміці розвитку процесу тертя.

За такою методикою є можливим прослідкувати, як впливає на напружено-деформований стан опорної поверхні, наприклад, її жорсткість. Як відомо, з метою досягнення оптимальної роботи вузлів тертя постійно удосконалюється склад зносостійких антифрикційних сплавів [5]. Окрім багатьох факторів, що визначають доцільність використання того чи іншого сплаву, одним із суттєвих факторів є жорсткість опорної поверхні, яка, звичайно, змінюється в залежності від складу сплаву. Прослідкуємо, як впливає жорсткість на напружено-деформований стан опорної поверхні. Для цього у вхідні дані, при усіх рівних умовах, будемо задавати варіації різних жорсткостей навколо значення модуля пружності $E = 210 \text{ ГПа}$ ($E_1 = 210 \text{ ГПа}$, $E_2 = 190 \text{ ГПа}$, $E_3 = 230 \text{ ГПа}$).

На рис. 2 показано значення поздовжніх і поперечних зусиль у безрозмірних величинах за довжиною елемента.

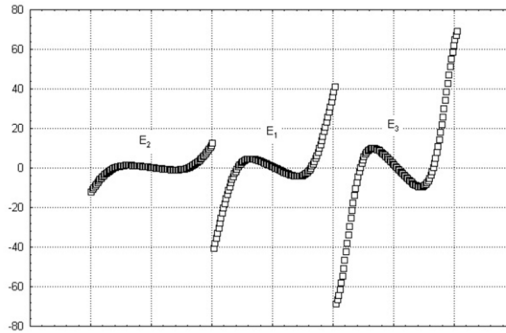


Рис. 2. Розподіл поперечних зусиль за довжиною опорної поверхні у розгорнутому вигляді на окремому кроці інтегрування в залежності від значень модуля пружності

Числовий розв'язок такої задачі (рис. 2) показує, що, наприклад, внутрішні зусилля зі збільшенням модуля пружності теж збільшуються. Цей факт може бути використаний для подальшого дослідження процесу тертя поряд з іншими факторами, але тоді така залежність, як на рис.2, може бути не очевидною, тобто, поряд з іншими факторами змінювання модуля пружності може бути не превалюючим для значень зусиль. Тому потрібно використовувати класичні методи оптимізації.

У такій задачі оптимального проектування управляючими функціями вибрано геометричні характеристики подовжньої осі приєднаного об'єкта і його поперечного перерізу. При цьому обмеження накладалися як на управляючі функції, так і на їх похідні по довжині. У цьому випадку рівняння стану (розв'язальні рівняння), що описують просторове деформування приєднаного об'єкта, доповнювалися наступним рівнянням:

$$\frac{da}{ds} = u, \quad (2)$$

де a – деяка геометрична характеристика осі або поперечного перерізу; u – управляюча функція. Нижче управляюча функція названа «управлінням».

Систему рівнянь стану представимо у вигляді

$$\frac{dx}{ds} = f(x(s), u(s)), \quad s_0 \leq s \leq s_s, \quad (3)$$

з крайовими умовами

$$g[x(s_0)] = g_0; \quad (4)$$

$$h[x\{s_s\}] = h_s \quad (5)$$

Кількість крайових умов (4) на лівому краю ($s = s_0$) $m = 9$, кількість крайових умов (5) на правому краю ($s = s_s$) $k = 6$; $u(s)$ - вектор-функція розмірністю r жорсткісних і геометричних характеристик, що визначаються з умови мінімуму функціонала

$$\Phi = \int_{s_0}^{s_s} V[x(s), u(s)] ds, \quad (6)$$

де в залежності від вимог до оптимального проекту мається на увазі маса або переміщення характерних точок об'єкта; $x(s)$ - вектор стану розмірністю n . Міцнісні і геометричні обмеження такі:

$$u_1 \leq u(s) \leq u_2; \quad (7)$$

$$\psi_1 \leq \psi[x(s), u(s)] \leq \psi_2 \quad (8)$$

Задача про визначення оптимального закону зміни $u(s)$ може бути сформульована як задача оптимального управління з геометричними і фазовими обмеженнями: потрібно знайти функцію $u(s) = u(s)_{\text{опт}}$, що мінімізує (6), задовольняє рівнянням стану з крайовими умовами (4), (5), обмеженням на міцність (8) і геометричним обмеженням (7).

Задача оптимізації сформульована як задача Лагранжа з паралелепіпедними і фазовими обмеженнями-нерівностями. Для її розв'язання залучено прямий метод.

Припустимо, що відомі деякий допустимий закон зміни управління $u_0(s)$ і відповідний вектор стану $x_0(s)$, що задовольняє граничним умовам (4),(5) і обмеженням (7), (8). Для побудови варіацій управляючої функції $u_0(s)$ і початкових умов $x_0(s_0)$, які зменшують значення цільового функціонала (6) при дотриманні (4), (5), (7), (8), лінеаризуємо (3)-(5):

$$\frac{d}{ds}(\delta x_0) = f(x(s)), \quad (9)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x(s_0)} \delta x_0(s_0) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial x(s_s)} \delta x_0(s_s) = 0 \quad (10)$$

Розв'язання рівняння у варіаціях (9) представимо в формі Коші:

$$\delta x_0(s) = [\Lambda^{-1}(s)] \delta x_0(s_0) + \int_{s_0}^s \Lambda(s, \zeta) \delta u_0(\zeta) d\zeta \quad (11)$$

де $\Lambda(s, \zeta) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} x_0(\zeta) \right)^T \Lambda(\zeta) \Lambda^{-1}(s) \right]^T$ – вектор чутливості до варіацій управляючої функції; $\Lambda(s)$ – розв'язання однорідного матричного рівняння, зв'язаного з рівнянням в варіаціях

$$\frac{d\Lambda}{ds} = \frac{df}{dx} \Lambda, \quad \Lambda(s_0) = E \quad (12)$$

(E – одинична матриця). Перевіривши виконання обмежень (7), (8) по всій області зміни незалежної змінної s з кроком Δs , виділимо дві безлічі вузлів, в яких обмеження є рівністю або порушуються з малим відхилом ε . Припустимо, що обмеження (7) – активно в N вузлах, а обмеження (8) – в M вузлах. Лінеаризуючи (7), (8), а також виключаючи з лінеаризованих крайових умов і обмежень варіації змінних стану $\delta x_0(s)$ з допомогою (11), отримаємо наступну систему обмежень на варіації початкових умов і управляючі функції:

$$B \delta x_0(s_0) + \int_{s_0}^{s_s} D(s) \delta u_0(s) ds = 0, \quad (13)$$

де B – матриця розміром $(3+3+M+N) \cdot 6$; $D(s)$ – вектор-функція розмірністю $(3+3+M+N)$.

Напряма найшвидшого зменшення цільового функціонала в просторі проектування ($u(s), x(s_0)$) визначається вектором функціонального антиградієнта: $-\nabla \Phi = -\text{grad}_{u(s), x_0(s)} \Phi$.

Проектуючи $\nabla \Phi$ на підпростір обмежень, запишемо наступні співвідношення для знаходження шуканих варіацій:

$$\delta u_0(s) = -\mu \left[\frac{\partial V}{\partial u} - D^\tau(s)C \right]; \quad \delta x_0(s_0) = \mu B^\tau C, \quad (14)$$

де C – вектор множників Лагранжа; $\mu > 0$ – скалярний множник, що підбирається з умови збіжності обчислювального процесу.

Управляюча функція $u_0(s) + \delta u_0(s)$ і вектор початкових умов $x_0(s_0) + \delta x_0(s_0)$ в результаті лінеаризації призводить до порушення крайових умов (5) і обмежень (8). Для уточнення розв'язку та усунення відхилів R визначимо коректуючі варіації $\delta u_R(s)$ і $\delta x_R(s_0)$, що мінімальні за нормою, і запишемо співвідношення

$$\delta u_R(s) = -D^\tau(s)\Gamma^{-1}R; \quad \delta x_R(s_0) = -B\Gamma^{-1}, \quad (15)$$

де Γ – функція Гауса.

Прийнявши $u_1(s) = u_0(s) + \delta u_0(s) + \delta u_R(s)$, $x_1(s_0) = x_0(s_0) + \delta x_0(s_0) + \delta x_R(s_0)$ як породжуючий розв'язок, побудуємо наступні наближення тощо до досягнення з заданою точністю необхідних умов оптимальності:

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial u} - D^\tau(s)C \right\| \leq \varepsilon_1; \quad \|B^\tau C\| \leq \varepsilon_1, \quad (16)$$

доповнених умовами Куна-Таккера для обмежень-нерівностей.

Для збільшення ефективності обчислювального процесу відхил k -го ітераційного кроку коректується на $k+1$ -м кроці спуску, що дозволяє отримати такі вирази методу неортогонального проектування:

$$\delta u_{k+1} = -\mu \left[\frac{\partial V}{\partial u} - D^\tau(s)\bar{C} \right]; \quad \delta x_{k+1}(s_0) = \mu B^\tau C. \quad (17)$$

Описана методика реалізована у вигляді комплексу програм для ЕОМ. Для інтегрування рівнянь стану використовується метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Визначені інтеграли обчислюються за правилом Симпсона. Складання списку індексів активних обмежень-нерівностей проводиться з урахуванням знаків відповідних множників Лагранжа.

Для вибору початкового вектора стану $x_0(s)$ визначався напружено-деформований стан деформівного елемента за допомогою методу продовження по параметру. З метою перевірки виконання обмежень проводилися прямі обчислення за допомогою описаного раніше числового методу.

Щоб встановити оптимальний закон зміни кривизни $q(s)$, як початковий вектор стану було прийнято вектор стану $x_0(s_0)$. При цьому величина найбільшого прогину становила $0,51s_0$.

Результати чисельного розв'язання задачі представлені на рис. 3.

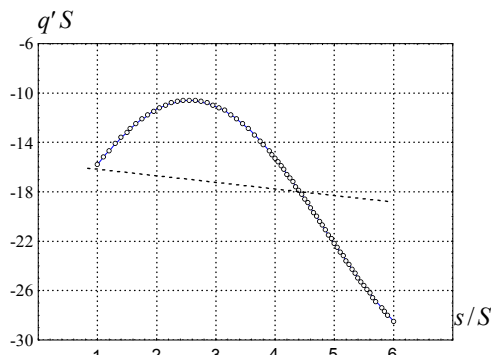


Рис. 3. Результат розв'язання задачі оптимізації

Кривою зображено закон зміни кривизни $q'(s)$ елемента з оптимальним контуром осі. Вказана залежність представлена для ділянки від точки прикріплення до опорної і до точки з дуговою координатою $s=S$. Кривизна початкового стану нанесена штриховою лінією.

З використанням описаної методики і комплексу програм для прийнятого закону дослідження системи можна розв'язувати наступні задачі оптимального проектування:

1) визначення оптимального закону зміни кривизни $q'(s)$ елемента трибоспряження;

2) встановлення оптимального закону змінювання коефіцієнта подібності $\phi(s)$ між розмірами поперечного перерізу;

3) визначення оптимального закону змінювання коефіцієнта подібності $\phi(s)$ поміж розмірами поперечного перерізу, що має оптимальний контур осі.

Висновки. Проведені розрахунки свідчать про те, що для елемента шорсткості, що має оптимальний контур осі, максимальний прогин у вказаній точці становить $0,388S_0$, що на 25% менше прогину в тій же точці неоптимізованого елемента. При цьому інтегральне обмеження-нерівність- активне, а площа фігури, що охоплюється подовжньою віссю в недеформованому стані, становить $0,965$ від вихідного. Внутрішні зусилля в поперечному перерізі змінюються незначно. Визначення чинників, що впливають на забезпечення встановлених параметрів роботи трибоспряження та встановлення шляхів цілеспрямованого керування цими чинниками дозволить скоротити і оптимізувати дослідження щодо покращення їх якості.

Список літератури

1. Кравцов В.І. Оцінювання показників якості технічних систем/ Альманах науки, №5/2(14)-2018.

2. Кравцов В.І., Кіндрачук М.В. Оцінювання показників якості поверхонь тертя/М.В. // Проблеми тертя та зношування, №1(78) – 2018, с. 93–100.

3. Кравцов В.І., Кіндрачук М.В., Діденко О.Л., Бурбела Ю.Б. Деформування опорної поверхні підшипника ковзання турбокомпресора в залежності від її жорсткості// Проблеми трибології, №4– 2015.

4. Kravtsov V. I., Sadeghidgalal A.M. Numerical calculation of elastic deformation of friction surfaces elements // European Applied Sciences. – № 2–1. – Stuttgart : ORT Publishing, 2013.

5. Кравцов В.І, Садегіджалал А. М., Бурбела Ю. Б. Оптимізація жорсткості гнучкого кільця, що обертається навколо свого діаметра Вісник інженерної академії України. – 2012. – № 3–4.

Стаття надійшла до редакції 09.10.2018.

Кравцов Віктор Іванович – доктор техн. наук, професор, професор кафедри машинознавства Національного авіаційного університету. Напрямок наукової діяльності - нелінійна механіка у прикладних задачах машинознавства.

Кіндрачук Мирослав Васильович – доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри машинознавства Національного авіаційного університету. Напрямок наукової діяльності – триботехніка.

Радько Олег Віталійович – канд. техн. наук, доцент кафедри машинознавства Національного авіаційного університету – триботехніка.

Гловин Михайло Андрійович – студент Національного авіаційного університету.

V. I. KRAVTSOV, M.V. KINDRACHUK, O.V. RADKO, M. A. GLOVIN

THE METHOD OF OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF THE FRICTION UNIT DURING ELASTIC DEFORMATION OF THE ELEMENTS

An example of the deformation of a rough element in a friction unit is given, and a technique is presented for studying the elastic deformation of this element relative to the surface on which it rests, with the simultaneous action of distributed and concentrated loads. In this case, further optimization of the deformation process with the refinement of the friction unit parameters is carried out. To accomplish the solution of the optimization problem, it is necessary first of all to have a technique that allows you to determine the stress-strain state of all the elements that are present in the friction unit. For this, a mathematical model is considered which describes the equilibrium and the elastic deformation of a spatially curved single element from which a friction unit can be composed. A method is presented for optimizing the parameters of a friction assembly under the condition of elastic deformation and in the presence of various nonlinear inequality constraints on internal forces, displacements and geometric characteristics of the longitudinal axis. It uses methods of optimal control and nonlinear programming. The results of numerical calculation, which show the capabilities of the proposed method, are obtained.

Key words: element of roughness, bearing surface, deformation, differential equations, optimal design, target function, numerical solution.

References

1. Kravtsov V.I. Otsinyuvannya pokaznikiv yakosti tekhnichnikh sistem/ Almanakh nauki. №5/2(14)-2018.
2. Kravtsov V.I., Kindrachuk M.V. Otsinyuvannya pokaznikiv yakosti poverkhon tertya/M.V. // Problemi tertya ta znoshuvannya. №1(78)- 2018. s. 93-100.
3. Kravtsov V.I., Kindrachuk M.V., Didenko O.L., Burbela Yu.B. Deformuvannya opornoï poverkhni pidshipnika kovzannya turbokompresora v zalezhnosti vid її zhorstkosti// Problemi tribologii. №4- 2015.
4. Kravtsov V. I., Sadeghidgalal A.M. Numerical calculation of elastic deformation of friction surfaces elements // European Applied Sciences. – № 2–1. – Stuttgart : ORT Publishing, 2013.
5. Kravtsov V.I., Sadegidzhalal A. M., Burbela Yu. B. Optimizatsiya zhorstkosti gnuchkogo kiltlya. shcho obertaetsya navkolo svogo diametra Visnik inzhenernoï akademii Ukraïni. – 2012. – № 3–4.