

ISSN 2304-7399

**ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ ОСЕРЕДОК  
НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ім. ШЕВЧЕНКА**



# **ПРИКАРПАТСЬКИЙ ВІСНИК НТШ**

## **Число**



# **1(17)-2012**



**SHEVCHENKO SCIENTIFIC SOCIETY  
DEPARTMENT OF IVANO-FRANKIVSK**

**PRECARPATHIAN BULLETIN  
OF THE SHEVCHENKO  
SCIENTIFIC SOCIETY**

**Number**

**1(17)-2012**

Ivano-Frankivsk  
2012

**НАУКОВЕ ТОВАРИСТВО ім. ШЕВЧЕНКА  
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ ОСЕРЕДОК**

**ПРИКАРПАТСЬКИЙ  
ВІСНИК НТШ**

**Число**

**1(17)-2012**

Івано-Франківськ  
2012

# ПРИКАРПАТСЬКИЙ ВІСНИК НТШ

Головний редактор – д.т.н. В. М. Мойсишин

## Число

У випусках серії «Число» публікуються наукові матеріали за напрямками:

- Математика та механіка
- Фізика і хімія твердого тіла
- Нафтогазова справа
- Інформаційні технології

**Редактори:** д.т.н., чл.-кор. НАНУ Є.І.Крижанівський, д.ф.-м.н, акад. НАНУ А.А.Мартинюк (Київ), д.ф.-м.н, чл.-кор. НАНУ Б.К.Остафійчук, д.х.н. Д.М.Фреїк

**Відповідальні секретарі:** к.ф.-м.н. М.М.Осипчук, О.Л.Соколов

### Редакційна колегія:

д.ф.-м.н. Д.І.Боднар (Тернопіль), д.ф.-м.н. А.В.Загороднюк, д.ф.-м.н. О.В.Лопушанський (Львів), д.ф.-м.н. А.М.Плічко (Кіровоград), к.ф.-м.н. Я.І.Савчук, д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ Ю.С.Самойленко (Київ);

д.ф.-м.н. О.Д.Артемович, д.ф.-м.н. Т.О.Банах (Львів), д.ф.-м.н. Р.І.Григорчук (Техас, США), д.ф.-м.н. Ю.А.Дрозд (Київ), д.ф.-м.н. М.М.Зарічний (Львів), д.ф.-м.н. Р.А.Заторський, д.ф.-м.н. В.К.Маслюченко (Чернівці), д.ф.-м.н. О.Р.Никифорчин, д.т.н. Ю.Є.Обжерін (Севастополь), д.ф.-м.н. А.П.Петравчук (Київ), д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ В.В.Шарко (Київ);

к.ф.-м.н. С.І.Гургула, д.ф.-м.н. І.І.Король (Ужгород), д.ф.-м.н., акад. НАНУ М.О.Перестюк (Київ), д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ Б.Й.Пташник (Львів), д.ф.-м.н. О.М.Станжицький (Київ), д.ф.-м.н. С.І.Трофимчук (Талька, Чилі);

д.ф.-м.н. Ю.В.Козаченко (Київ), д.ф.-м.н. Б.І.Копитко (Львів), д.ф.-м.н. М.М.Леоненко (Кардіф, Великобританія), д.ф.-м.н. В.І.Масол (Київ), д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ М.І.Портенко (Київ);

д.т.н. В.І.Векерик, д.т.н. І.В.Кузьо (Львів), д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ Кушнір Р.М. (Львів), к.т.н. К.Г.Левчук (Київ), д.т.н. М.В.Лисканич, д.ф.-м.н. Н.В.Нікітіна (Київ), д.ф.-м.н. Г.Т.Сулим (Львів), к.ф.-м.н. І.В.Цідило;

д.ф.-м.н. М.О.Галушак, д.ф.-м.н. Г.А.Ільчук (Львів), д.ф.-м.н. І.А.Климишин, д.ф.-м.н. Ю.А.Куницький (Київ), д.ф.-м.н. Г.Ю.Малашкевич (Мінськ, Білорусь), д.т.н. П.І.Мельник, д.ф.-м.н. М.А.Рувінський, д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ І.В.Стасюк (Львів), д.ф.-м.н. З.В.Стасюк (Львів), д.ф.-м.н. В.А.Шендеровський (Київ);

д.х.н. О.І.Аксментьєва (Львів), д.х.н. В.В.Лобанов (Київ), д.х.н. І.Ф.Миронюк, д.т.н. Г.О.Сіренко, д.х.н. В.М.Томашик (Київ), д.х.н. О.В.Шийчук;

д-р наук Т.Аіфа (Ренн, Франція), д.т.н. В.С.Бойко, д.т.н. В.М. Дорошенко (Київ), д.т.н. Ю.О.Зарубін (Київ), д.т.н. Р.М.Кондрат, д.т.н. Я.С.Коцкулич, д.т.н. М.А.Мислюк, д.т.н. Б.І.Навроцький, д.т.н. В.П.Овчінніков (Тюмень, Росія), д.т.н. В.М.Світлицький (Київ), д.т.н. Я.Б.Тарко, д.т.н. Б.О.Чернов, д.т.н. Р.С.Яремійчук;

д.т.н. Р.М.Говдяк (Київ), д.т.н. В.Я.Грудз, д.т.н. О.Т.Драганчук (Київ), д-р наук Я.Жуга (Будапешт, Угорщина), д.т.н. О.М.Карпаш, д.т.н. Б.В.Копей, д-р наук С.Нодж (Краків, Польща), д.т.н. Ю.Д.Петрина, д.т.н. М.Д.Середюк, д.т.н. Д.Ф.Тимків, д.т.н. Л.С.Шлапак;

д.т.н. Б.І.Адасовський (Київ), д.т.н. М.І.Горбійчук, д.т.н. Л.М.Заміховський, д.т.н. І.С.Кісіль, д.т.н. В.С.Костишин, д.т.н. А.П.Олійник, д.т.н. Л.С.Петришин, д.т.н. Г.Н.Семенцов, д.т.н. О.І.Солодовніков (Санкт-Петербург, Росія), д.т.н. С.Ф.Теленик (Київ), д.т.н. А.А.Турсунов (Душанбе, Таджикистан), д.т.н. В.М.Юрчишин.

ПРИКАРПАТСЬКИЙ  
ВІСНИК  
НАУКОВОГО  
ТОВАРИСТВА  
ім. ШЕВЧЕНКА  
1(17)-2012

Науковий журнал  
Видається у чотирьох  
серіях

**ЧИСЛО, СЛОВО,  
ДУМКА, ПУЛЬС**  
(по одному випуску  
кожної серії щороку)

Заснований у 2008 році  
Реєстраційне свідоцтво  
КВ № 14628-3599  
від 10 жовтня 2008 р.  
видане Міністерством  
юстиції України

**ЗАСНОВНИКИ:**

Івано-Франківський  
осередок Наукового  
товариства ім. Шевченка

Прикарпатський  
національний університет  
імені Василя Стефаника

Івано-Франківський  
національний технічний  
університет нафти і газу

Івано-Франківський  
національний медичний  
університет

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

**Р. М. Кушнір, А. В. Ясінський**

Оптимальне за швидкістю нагрівання  
термочутливих тіл за обмежень на темпе-  
ратуру середовища і пластичні деформа-  
ції ..... 9

**Ю. В. Токовий**

Тривимірний термонапружений стан  
пружного суцільного циліндра скінчен-  
ної довжини ..... 18

**М. М. Николишин, М. Й. Ростун**

Гранична рівновага виготовленої з функ-  
ціонально-градієнтного матеріалу цилін-  
дричної оболонки з внутрішньою тріщи-  
ною довільної конфігурації ..... 26

**К. Г. Левчук, І. В. Цідило**

Відхилення ротора гірокомпаса на рухо-  
мій основі ..... 35

**П. Я. Пукач, І. В. Кузьо**

Вплив руху рідини та кутової швидкості  
обертання колони для буріння свердло-  
вин на її нелінійні згинні коливання .. 48

**О. М. Пономаренко**

Концентрація напружень у пластині з  
отвором утвореним дугами двох кіл, що  
перетинаються, за дії чистого зсуву .. 55

**І. В. Цідило, К. Г. Левчук**

Деякі особливості плоскопаралельного  
руху тіла ..... 62

## АДРЕСА РЕДАКЦІЇ

76025

м. Івано-Франківськ,  
вул. Шевченка, 79  
Івано-Франківський  
осередок Наукового  
товариства ім. Шевченка  
тел. (380-3422) 72-71-31  
e-mail: [math@nung.edu.ua](mailto:math@nung.edu.ua)  
<http://pvntsh.org.ua>

Відповідальність за  
достовірність наведених  
у статтях даних несуть  
автори публікацій

Передрук – тільки  
з дозволу редакції

Друкується за ухвалою  
Президії Івано-  
Франківського осередку  
Наукового товариства  
ім. Шевченка

© Івано-Франківський  
осередок НТШ, 2012

© Видавництво “Плай”  
ЦІТ Прикарпатського  
національного універ-  
ситету імені Василя  
Стефаника

**А. В. Загороднюк, М. В. Марцінків,  
З. Г. Можировська**  
Гіперциклічні оператори на вільних бана-  
хових просторах ..... 76

**М. І. Патра, С. В. Шарин**  
Про операцію кроскореляції гіперфункції  
та дійсної аналітичної функції ..... 81

**О. Я. Микицей, О. Р. Никифорчин**  
Неперервність симетричних добутків гі-  
перпросторів включення та ємностей ... 85

**М. М. Осипчук**  
Про одну задачу оптимального управлін-  
ня вінеровим процесом ..... 89

**Я. І. Савчук**  
Про міру Хаусдорфа множини валіронівсь-  
ких дефектних векторів цілої кривої .... 97

**В. М. Гаврилків**  
Монотонні сім'ї на циклічних напів-  
групах ..... 102

**А. І. Bandura**  
The metric properties of a space of entire fun-  
ctions of bounded  $L$ -index in direction ... 113

**С. І. Гургула, Р. І. Собкович**  
Дослідження стійкості розв'язків дифе-  
ренціальних рівнянь з імпульсною дією  
другим методом Ляпунова ..... 120

**І. В. Федак**  
Турніри юних математиків та нерозв'я-  
зані проблеми математики ..... 127

## ФІЗИКА І ХІМІЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

**Г. Є. Малашкевич, Д. М. Фреїк, Я. С. Яворський**

Оптичні властивості топологія нанокристалічних структур на основі плумбум телуриду: модельні підходи ..... 131

**П. І. Мельник, М. В. Кіндрачук**

Залежність зносостійкості осажденного композитного покриття від дисперсності його наповнювача ..... 147

**Д. М. Фреїк, О. С. Криницький, О. М. Матківський**

Нанокompозитні термоелектричні матеріали: отримання, властивості використання (огляд) ..... 155

**Р. О. Дзумедзей**

Розрахунок та шляхи оптимізації термо-електричних параметрів сполук IV-VI (огляд) ..... 196

**С. П. Новосядлий, Л. В. Мельник**

Особливості проектування слухових апаратів на інтегральній елементній базі ..... 220

## НАФТОГАЗОВА СПРАВА

**В. І. Грицишин, С. Ф. Кучер**

Петрофізичні властивості нафтових і газових колекторів Передкарпаття ..... 237

**Л. І. Криштопа, С. І. Криштопа, І. Б. Прунько, І. М. Богатчук**

Нові методи оптимізації процесів тертя в гальмівних механізмах бурових установок ..... 256

**М. П. Возняк, Л. В. Возняк, Г. М. Кривенко,**

**С. О. Кривенко, Ю. Я. Мойсюк**

Дослідження впливу зовнішніх чинників на температурний та гідравлічний режими нафтопроводу ..... 263



**Й. В. Якимів, В. М. Кацаба**  
Мінімальні витрати електроенергії як критерій оптимізації режимів роботи магістральних нафтопроводів ..... 271

**О. М. Адаменко, Я. О. Адаменко, Л. Є. Шкіца, О. М. Мандрик, Л. В. Міщенко, Д. О. Зорін, А. В. Міщенко**  
Геоекологічна оцінка впливу магістральних газопроводів на долинні екосистеми Передкарпаття ..... 278

**О. П. Мельников**  
Підвищення ефективності використання струминних насосів у процесі буріння ..... 288

**Р. В. Іванків**  
Аналіз відмов морського противикидного обладнання ..... 294

## ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

**Л. М. Заміховський, М. Я. Николайчук, Ю. Я. Мойсюк**  
Організація апаратно-програмних засобів автоматизованих систем управління резервуарними парками рідких вуглеводнів ..... 299

**Р. М. Матвієнко, Л. О. Сав'юк**  
Особливості функціонування сучасних комп'ютерних тренажерних комплексів ..... 305

**О. Л. Заміховська**  
Автоматизовані інформаційні системи в індустрії готельного бізнесу та туризму на Україні ..... 309

**Л. О. Сав'юк, А. О. Рогач**  
Концепція створення віртуальних лабораторних практикумів з використанням Web-технологій ..... 321

## ІНФОРМАЦІЯ

Відомості про авторів ..... 324

# *Математика та механіка*

---

---

УДК 539.3

## **ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ НАГРІВАННЯ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА ОБМЕЖЕНЬ НА ТЕМПЕРАТУРУ СЕРЕДОВИЩА І ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ**

**Р. М. Кушнір, А. В. Ясінський**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, Львів, вул. Наукова, 3-б;  
e-mail: [dyrector@iapmm.lviv.ua](mailto:dyrector@iapmm.lviv.ua)*

*Сформульовано математичну постановку та розроблено алгоритм розв'язування одновимірних задач оптимального за швидкістю керування нагріванням термочутливих тіл канонічної форми. Визначено керування (температуру середовища, що оточує одну із граничних поверхонь або тепловий потік), яке за мінімальний час переводить тіло з початкового стану у кінцевий, що характеризується заданою середньо-інтегральною температурою. При цьому враховано обмеження як на функцію керування, так і на максимальне значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву.*

**Ключові слова:** *оптимальне керування, температурні напруження, обернена задача, пружнопластичний стан*

Технологічні процеси виготовлення та експлуатації елементів конструкцій часто передбачають їх термічну обробку. Підвищення продуктивності таких процесів та мінімізація енергетичних затрат тісно пов'язані з проблемою мінімізації часу нагрівання чи охолодження виробу на етапі термічної обробки [1-3]. Нерівномірний розподіл температури в тілі приводить до виникнення в ньому полів напружень, перевищення якими допустимих значень може зумовити появу і розвиток пластичних деформацій [4,5]. З метою забезпечення проектних функціональних властивостей елементів конструкцій при визначенні режимів їх найшвидшого нагрівання (охолодження) потрібно враховувати обмеження як на параметри теплового, так і напружено-деформованого станів [1-3,6,7]. Оскільки більшість таких процесів відбувається за умов інтенсивного теплового навантаження тіла та у широкому діапазоні тем-

ператур, то важливим є врахування залежності теплофізичних та механічних властивостей матеріалу від температури [5].

У цій роботі для випадку пружнопластичного деформування матеріалу сформульована математична постановка і на основі методу оберненої задачі термомеханіки [2,3] розроблено алгоритм числової побудови розв'язків задач оптимального за швидкодією керування нагріванням термочутливих тіл канонічної форми за обмежень на керування і максимальну величину накопиченої пластичної деформації зсуву.

### 1. Постановка задачі оптимізації.

Розглянемо вільне від зовнішнього силового навантаження ізотропне термочутливе тіло, яке займає деяку область  $V$  з границею  $\Sigma$ . Нехай зміна температури тіла відбувається внаслідок конвективного теплообміну з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Температурне поле тіла  $T(x, \tau_*)$ , коли в ньому відсутні внутрішні теплові джерела і можна знехтувати теплоутворенням від деформування, задовольняє рівняння теплопровідності

$$\operatorname{div}(\lambda_* \operatorname{grad} T(x, \tau_*)) = c_V^* \frac{\partial T(x, \tau_*)}{\partial \tau_*}, \quad (1)$$

де  $\lambda_* = \lambda_*(T)$  – коефіцієнт теплопровідності;  $c_V^* = c_V^*(T)$  – питома об'ємна теплоємність;  $x$  – точка з області  $V$ ;  $\tau_*$  – час.

Вважатимемо, що можна керувати температурою середовища  $u(x, \tau_*)$ , яке оточує деяку частину граничної поверхні тіла  $\Sigma_u$ , тобто на частині граничної поверхні  $\Sigma_u$  теплообмін

$$\lambda_* \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_u (T - u) = 0 \quad (x \in \Sigma_u) \quad (2)$$

є керований, а на решті  $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \Sigma_u$  – заданий

$$\lambda_* \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_\theta (T - \theta) = 0 \quad (x \in \Sigma_0). \quad (3)$$

Тут  $\alpha_u, \alpha_\theta$  – коефіцієнти теплообміну на поверхнях  $\Sigma_u$  і  $\Sigma_0$  відповідно;  $\theta(x, \tau_*)$  – задана температура середовища, яке оточує частину граничної поверхні  $\Sigma_0$ ;  $n$  – зовнішня нормаль до поверхні  $\Sigma$ .

Задача оптимізації полягає у визначенні такого керування  $u(x, \tau_*)$ , яке задовольняючи умови

$$U_1(x, \tau_*) \leq u(x, \tau_*) \leq U_2(x, \tau_*) \quad (x \in \Sigma_u) \quad (4)$$

$$\max_{x \in V} \Gamma_p \leq \Gamma_p^* \quad \left( \Gamma_p = \int_0^{\tau_*} \left( \mathcal{E}_{ij}^{(p)} \mathcal{E}_{ij}^{(p)} \right)^{1/2} d\tau_* \right) \quad (5)$$

за мінімальний час  $\tau_0 = \min \tau_*$  переведе тіло із початкового стану

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (x \in \bar{V}) \quad (6)$$

у кінцевий, що характеризується заданою середньоінтегральною температурою

$$T_c(\tau_0) = \frac{1}{V_*} \int_V T(x, \tau_0) dV = T_* \quad (7)$$

Тут  $U_i(x, \tau_*)$  ( $i = 1, 2$ ) – відповідно нижня ( $i = 1$ ) та верхня ( $i = 2$ ) границі обмеження на функцію керування;  $\Gamma_p$  – накопичена пластична деформація зсуву;  $\epsilon_{ij}^{(p)}$  – похідна за часом від компонент девіатора пластичних деформацій [5];  $\Gamma_p^*$  – гранично допустиме значення накопиченої пластичної деформації зсуву;  $T_0(x)$  – початкова температура тіла;  $V_*$  – об'єм області  $V$ ;  $T_*$  – задана середньоінтегральна температура;  $\bar{V} = V \cup \Sigma$ .

При побудові розв'язків сформульованих задач оптимізації припускається керованість розглядуваного процесу, тобто вважається, що функції  $U_i(x, \tau_*)$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Gamma_p^*$ ,  $T_0(x)$  та стала  $T_*$  задані так, що можливим є досягнення кінцевої мети нагрівання (7).

Зазначимо, що за функцію керування може бути вибраний також тепловий потік на поверхні  $\Sigma_u$ , оскільки з граничної умови третього роду (2) можна отримати граничну умову другого роду.

## 2. Алгоритм розв'язування задачі оптимізації.

Для побудови розв'язку сформульованої задачі оптимізації використаємо метод оберненої задачі термомеханіки [2, 3]. Згідно з ним оптимальне за швидкодією керування приймаємо рівним верхній межі гранично допустимого обмеження

$$u(x, \tau_*) = U_2(x, \tau_*) \quad (x \in \Sigma_u, \tau_* \geq 0) \quad (8)$$

або таким, що забезпечує виконання рівності

$$\max_{x \in \bar{V}} \Gamma_p = \Gamma_p^* \quad (9)$$

Це означає, що найшвидше нагрівання тіла за обмежень (4) та (5) здійснюється по верхній межі одного із обмежень. Через це розв'язання задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням тіла здійснюємо поетапно.

*Етан 1.* На першому етапі припускаємо, що початковий розподіл температури  $T_0(x)$  задовольняє умову (5) і розв'язуємо пряму задачу термопластичності за умови (8). Якщо в процесі нагрівання тіла за законом (8) умова (5) завжди виконується, то оптимальне за швидкодією керування визначаємо із умови (8) до моменту досягнення кінцевої мети нагрівання (7).

Оскільки задача теплопровідності (1)-(3), (6) є нелінійною, то її розв'язок визначаємо чисельно за допомогою методу скінченних елементів [8].

Пружнопластичне деформування тіла досліджуємо в межах теорії неізотермічного деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини [5]. Відповідно до цієї теорії за основну систему диференціальних рівнянь вибираємо рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (10)$$

та рівняння сумісності Сен-Венана

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} + \varepsilon_{ik,jm} + \varepsilon_{jm,ik} = 0 \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3), \quad (11)$$

де  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненти тензора напружень і повних деформацій.

Компоненти тензора напружень задовольняють однорідні граничні умови

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (12)$$

де  $n_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні тіла у відповідній точці.

Визначальні фізичні рівняння, які пов'язують між собою компоненти тензора напружень і деформацій матимуть вигляд [5]

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} - \frac{s_{ij}}{2G^2} \frac{\partial G}{\partial T} dT + de_{ij}^{(p)} \quad (13)$$

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{d\Gamma_p}{S} s_{ij} = (F_S dS + F_T dT) s_{ij}$$

де  $F_S$  і  $F_T$  визначаємо на основі миттєвої термомеханічної поверхні  $\sigma = f(\varepsilon, T)$  [5]. Тут  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$ ,  $e_{ij}^{(p)} = \varepsilon_{ij}^{(p)}$  – відповідно компоненти девіатора повних і пластичних деформацій;  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  – компоненти тензора пластичних деформацій;  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3$  – середнє видовження;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  – компоненти девіатора напружень;  $\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  – середнє напруження;  $\delta_{ij}$  – дельта-символ Кронекера;  $G$  – модуль зсуву.

Оскільки сформульована вище задача термопластичності є нелінійною, то для її розв'язання використовуємо метод додаткових деформацій [5]. З цією метою, аналогічно до задачі теплопровідності, процес деформування елементів тіла розбиваємо на ряд малих етапів за часом. Інтегруючи співвідношення (13) вздовж усього шляху деформування і сумуючи прирости пластичних деформацій за етап, в кінці  $m$ -го етапу навантаження отримаємо залежності

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_0} \left( (1 + \nu_0) \sigma_{ij} - 3\nu_0 \sigma_0 \delta_{ij} \right) + \varepsilon_T \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^0 \quad (14)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{E(1 + \nu_0)}{E_0(1 + \nu)} \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^{(p)} + \left( 1 - \frac{E(1 + \nu_0)}{E_0(1 + \nu)} \right) \times \\ \times \left( \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij} \right) + \left( 1 - \frac{E(1 - 2\nu_0)}{E_0(1 - 2\nu)} \right) (\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \delta_{ij}$$

$\varepsilon_T = \alpha_T (T - T_0)$  – теплова деформація;  $\varepsilon_T = \alpha_T (T)$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення;  $E_0, \nu_0$  – значення відповідно модуля Юнга  $E(T)$  і коефіцієнта Пуассона  $\nu(T)$  при початковій температурі;  $\Delta_k e_{ij}^{(p)}$  – приріст компонент девіатора пластичних деформацій за етап.

Співвідношення (14) виражають узагальнений закон Гука для ізотропного однорідного тіла зі сталими параметрами пружності та додатковими деформаціями  $\varepsilon_{ij}^0$ , що враховують як пластичне деформування матеріалу, так і залежність механічних характеристик від температури [5].

Отже, розв'язання задачі термопластичності зведено до розв'язання на кожному етапі навантаження послідовності задач термопружності для однорідного ізотропного тіла з додатковими деформаціями, що залежать від напружено-деформованого стану і температури.

*Етап 2.* В момент часу  $\tau_* = \tau_k$ , коли порушується умова (5), здійснюємо перемикання керування (8) на керування, яке забезпечує виконання умови (9). Ця умова служить умовою спряження температурних режимів, визначених на першому та другому етапах керування, і використовується для визначення часу перемикання  $\tau_k$ . Отже, починаючи з моменту часу  $\tau_k$ , переходимо до розв'язання оберненої задачі термопластичності: за заданим допустимим обмеженням (9) визначаємо відповідну теплову дію – функцію керування  $u(x, \tau_*)$ .

Для визначення керування дискретний аналог відповідної задачі теплопровідності з невідомою тепер, крім температури, функцією  $u(x, \tau_*)$ , доповнюємо умовою (9), яка замикає цю систему рівнянь. Умову (9) записуємо через розподіл температури і додаткових деформацій на основі розв'язку задачі термопружності з додатковими деформаціями.

Невідомий в момент часу  $\tau_* = \tau_k$  розподіл пластичної деформації, а, отже, і керування, визначаємо методом послідовних наближень. За початкове наближення для розрахунку пластичних деформацій у мо-

мент часу  $\tau_* = \tau_k$  приймаємо розподіл пластичних деформацій у момент часу  $\tau_* = \tau_{k-1}$ . За формулами для  $\varepsilon_{ij}^0$  визначаємо початкове наближення додаткових деформацій і розв'язуємо розширену систему рівнянь (1)–(3), (6), (9), тобто визначаємо початкові наближення функції керування і температурного поля у тілі. За знайденим наближенням функції керування на основі розв'язку прямої задачі термопластичності визначаємо перше наближення розподілу пластичних деформацій  $\left(\varepsilon_{ij}^{(p)}\right)^{(k)}$ , а за формулами для  $\varepsilon_{ij}^0$  – перше наближення додаткових деформацій у момент часу  $\tau_* = \tau_k$ . У результаті розв'язання оберненої задачі за знайденим наближенням додаткових деформацій визначаємо нове наближення функції керування і температурного режиму. Процес послідовних наближень для моменту часу  $\tau_* = \tau_k$  продовжуємо до збігання з наперед заданою точністю двох послідовних наближень керування.

При досягненні функцією керування гранично допустимого значення здійснюємо перехід на перший етап алгоритму розв'язання задачі керування. З умови (8) визначаємо момент перемикання керування. Обчислення припиняємо при досягненні кінцевої мети нагрівання (7).

### 3. Числові результати.

Розглянуто реалізацію запропонованого алгоритму на прикладі оптимізації температурного режиму для довгого порожнистого циліндра, виготовленого із сталі EI-437 [5]. Приймали, що теплоізолюваний по внутрішній поверхні циліндр нагрівається через зовнішню поверхню тепловим потоком, який вибрано за функцію керування.

Величина  $\Gamma_p$  – міра накопиченої пластичної деформації в точці і компоненти девіатора пластичних деформацій  $e_{ij}^{(p)}$  взаємопов'язані. Зокрема, взаємозв'язок між їх приростами задається співвідношенням (13). Тому умова (15) задає також обмеження на величини  $e_{ij}^{(p)}$  і навпаки – обмеження на максимальне значення абсолютної величини однієї з компонент девіатора пластичних деформацій може бути виражене через обмеження (9) на  $\Gamma_p$ .

Відповідно до описаного вище алгоритму, побудову розв'язку задачі оптимізації здійснюємо поетапно.

На рисунках 1,2 наведено числові результати розв'язування задачі оптимізації для циліндра з внутрішнім безрозмірним радіусом  $k = R_1/R_2 = 0,5$ , де  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) – відповідно його внутрішній та зовнішній радіуси. Кривою 1 (суцільна лінія) на рис. 1 зображено поведінку в часі оптимального керування, коли  $\Gamma_p^* = 0,001$ ,  $T_* = 270^\circ\text{C}$  і  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,

а кривою 2 (суцільна лінія) – поведінку в часі максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, що відповідає знайденому керуванню. Тут  $\tau = \lambda_0 \tau_* / (c_V^0 R_2^2)$  – безрозмірний час;  $\lambda_0, c_V^0$  – значення коефіцієнта теплопровідності і питомої об’ємної теплоємності за початкової температури. Штрихова лінія 2 на рис. 1, яка продовжує суцільну, зображає поведінку в часі максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву у випадку, коли тепловий потік приймає гранично допустиме значення (штрихова лінія 1 на рис. 1) протягом усього процесу нагрівання і обмеження на інтенсивність накопиченої пластичної деформації зсуву відсутнє.

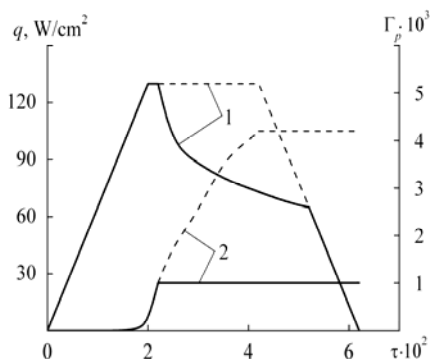


Рис.1. Поведінка за часом функції керування (лінія 1) та максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву (лінія 2) у циліндрі

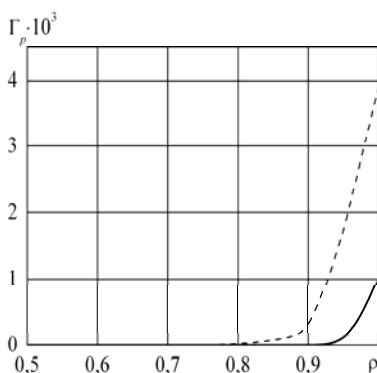


Рис.2. Розподіл за радіальною координатою інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву у циліндрі після зняття теплового навантаження

Розподіл за радіусом інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву після зняття теплового навантаження зображено на рис.2. Суцільна лінія відповідає режиму оптимального керування нагріванням



циліндра за наявності обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, а штрихова – режиму за відсутності цього обмеження. Як видно із рисунка, наявність обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву приводить також і до зменшення величини пластичної зони. Тут  $\rho = r/R_2$  – безрозмірна радіальна координата;  $r$  – радіальна координата.

Як показують дослідження, наявність обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву обмежує також і максимальне значення залишкових напружень, що дозволяє опосередковано керувати цією величиною.

Аналіз величин радіусів кривини траєкторій деформування максимально навантаженої точки циліндра, побудованих у двовимірному просторі Ільюшина [5], підтвердив правомірність використання для розрахунку напружено-деформованого стану циліндра визначальних співвідношень теорії процесів деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини.

### *Література*

1. Андреев Ю.Н. Оптимальное проектирование тепловых агрегатов / Ю.Н. Андреев. – М.: машиностроение, 1981. – 231 с.
2. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями / В.М.Вигак. – Киев: Наукова думка, 1988. – 312 с.
3. Kushnir R.M. Optimal heating control of thermosensitive rectangular domain under restrictions on stresses in a plastic zone / R.M.Kushnir, A.V.Yasinsky // J. Thermal Stresses. – 2010. – Vol.33. – P. 251-261.
4. Гудрамович В.С. Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями / В.С.Гудрамович, А.Ф.Деменков. – К.: Наукова думка, 1991. – 176 с.
5. Шевченко Ю.Н. Термовязкопластичность / Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко. – К.: Наукова думка, 1987. – 263 с.
6. Ashida F. Control of transient thermoelastic displacement in a composite disk / F. Ashida, T.R. Tauchert // J. Thermal Stresses. – 2002. – Vol. 25. – P. 99-121.
7. Nyashin Y. Control of thermal stresses and strain / Y.Nyashin, V.Kiryukhin, F.Ziegler // J. Thermal Stresses. – 2000. – Vol. 23. – P. 309-326.
8. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О.Зенкевич, К.Морган. – М.: Мир, 1986. – 319 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,  
д.ф.-м.н., професором **Сулимом Г.Т.** (м. Львів)*

---

**OPTIMAL HEATING RATE IN THERMAL SENSITIVE BODIES  
BY RESTRICTIONS ON ENVIRONMENT TEMPERATURE  
AND ON PLASTIC STRAINS****R. M. Kushnir, A. V. Yasinsky**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova str., 3-b;  
e-mail: director@iapmm.lviv.ua*

*In this talk, the mathematical formulation and a solution algorithm for one-dimensional optimal speed-processing-control problem of heating thermo-sensitive bodies of the canonical shape is presented. A control function (the temperature of surrounding contacting with a part of the limiting surface, or the heat flux) is determined for transmitting the body from an initial thermal state into a required final one, which is characterized by an integral-average temperature, in the minimum time under constrains for both the control function and the maxim value of accumulated plastic shear-deformation.*

**Key words:** *optimal control, thermal stresses, inverse problem of thermo-mechanics, elasto-plastic state.*

## ТРИВИМІРНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНОГО СУЦІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ

**Ю. В. Токовий**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, Львів, вул. Наукова, 3-б;  
e-mail: [tokovyy@iapmm.lviv.ua](mailto:tokovyy@iapmm.lviv.ua)*

*Запропоновано методику побудови аналітичного розв'язку тривимірної задачі термопружності для циліндра скінченної довжини з вільною від зовнішніх силових навантажень поверхнею. З використанням термопружного потенціалу вихідну задачу зведено до відповідної задачі теорії пружності для циліндра під дією зовнішніх зусиль на торцях та бічній поверхні. Для побудови аналітичного розв'язку отриманої задачі використано метод перехресної суперпозиції.*

***Ключові слова:** пружний скінченний циліндр, температурні напруження, метод перехресної суперпозиції*

### **Вступ**

Побудова точних аналітичних розв'язків тривимірних задач теорії пружності й термопружності для обмежених тіл з кутовими точками викликає ускладнення для застосування відомих на сьогодні методів механіки деформівного твердого тіла у зв'язку з потребою задоволення крайових умов на частинах поверхні, відокремлених кутовими точками (лініями). У випадку таких тіл канонічної форми (частини поверхні яких є паралельними до координатних поверхонь відповідної системи координат [1,2]) кутові точки (лінії) можна трактувати як такі, у яких крайові умови, задані для певних компонент тензора напружень чи вектора переміщень на одній частині поверхні, змінюються на крайові умови для, взагалі кажучи, інших компонент вказаних тензора та вектора на іншій частині поверхні, що вносить ускладнення математичного характеру. З фізичної точки зору кутові точки є точками зламу граничної поверхні, що призводить до локального збурення напруженого стану. До таких задач, зокрема, належить задача про пружну рівновагу циліндра скінченної довжини під дією зрівноважених силових чи температурних факторів навантаження [3,4].

У випадку осьової симетрії навантаження чи закріплення, загальні тривимірні задачі для кругових циліндрів можна звести до двовимірних осесиметричних задач, які виявляються значно простішими з точки зору побудови їх аналітичних розв'язків [1,3,5-8]. Натомість задачі про визначення пружної рівноваги скінченного циліндра у тривимірному випадку вивчено значно гірше, а відомі аналітичні методи дозволяють за-

довольняти крайові умови на певній частині поверхні циліндра наближено (див., наприклад, [9] для огляду досліджень).

У даній роботі розглянуто застосування методу перехресної суперпозиції [1,2,6,7] до побудови розв'язку тривимірної задачі термо-пружності для суцільного циліндра з твірною скінченної довжини з вільною від зовнішніх навантажень повною поверхнею. Напружений стан циліндра спричинено нерівномірним стаціонарним розподілом температурного поля. З використанням потенціалу Папковича-Гудьєра [6] задачу зведено до розв'язання задачі теорії пружності для циліндра тієї ж конфігурації за заданих на його торці та бічній поверхні зовнішніх силових навантажень. Для побудови розв'язку отриманої задачі застосовано метод перехресної суперпозиції із використанням розв'язків Дуголла для періодичного навантаженого по бічній поверхні довгого суцільного циліндра та безмежного шару. Отриманий у такий спосіб розв'язок задачі точно задовольняє вихідні рівняння, а також володіє достатньою кількістю ступенів вільності (довільних констант) для задоволення крайових умов на повній поверхні циліндра [9].

#### **Постановка задачі термopружності для циліндра скінченної довжини та зведення її до відповідної задачі теорії пружності**

Розглянемо задачу про пружну рівновагу суцільного циліндра скінченної довжини  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $|z| \leq h$ , віднесеного до безрозмірної циліндричної системи координат  $r, \theta, z$ . Задача описується рівнянням Ляме у векторній формі [6]

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T = 0, \quad (1)$$

де

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \operatorname{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\operatorname{div} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z},$$

$\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  – вектор пружних переміщень,  $\lambda$  та  $\mu$  – сталі Ляме,  $T = T(r, \theta, z)$  – заданий розподіл температурного поля,  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення. Торці та бічна поверхня циліндра є вільними від силових навантажень:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, \theta, z) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(a, \theta, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(a, \theta, z) = 0, \\ \sigma_z(r, \theta, \pm h) = 0, \quad \sigma_{\theta z}(r, \theta, \pm h) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, \theta, \pm h) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $\sigma_i, \sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень ( $i, j = \{r, \theta, z\}$ ), які пов'язані з переміщеннями наступними співвідношеннями:

$$\sigma_r = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \Theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \quad \sigma_\theta = \frac{2\mu}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \lambda \Theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T,$$

$$\sigma_z = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \Theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{\theta z} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right),$$

$$\text{де } \Theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Розв'язок рівняння (1) будемо шукати у наступному вигляді:

$$\vec{u} = \vec{u}^* + \vec{u}^{(T)}, \quad (4)$$

де  $\vec{u}^*$  – загальний «пружний» розв'язок однорідного (без урахування температурного члена) рівняння (1),  $\vec{u}^{(T)}$  – частковий «термопружний» розв'язок неоднорідного рівняння (1). Останній нескладно знайти з використанням потенціалу Папковича-Гудьєра [6] у вигляді

$$\vec{u}^{(T)} = \text{grad } \Phi, \quad (5)$$

який, у свою чергу, знайдемо по заданій температурі із рівняння

$$\nabla^2 \Phi = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha T.$$

У такий спосіб розв'язання задачі (1)-(3) зводиться до відшукування вектора переміщень  $\vec{u}^*$  чи компонент відповідного тензора напружень  $\sigma_i^*$ ,  $\sigma_{ij}^*$ , які, внаслідок (2), повинні задовольняти наступні крайові умови:

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(a, \theta, z) &= f(\theta, z), & \sigma_{r\theta}^*(a, \theta, z) &= g(\theta, z), \\ \sigma_{rz}^*(a, \theta, z) &= q(\theta, z), & \sigma_{rz}^*(r, \theta, \pm h) &= k^\pm(r, \theta), \\ \sigma_z^*(r, \theta, \pm h) &= l^\pm(r, \theta), & \sigma_{\theta z}^*(r, \theta, \pm h) &= t^\pm(r, \theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\begin{aligned} f(\theta, z) &= -\sigma_r^{(T)}(a, \theta, z), & g(\theta, z) &= -\sigma_{r\theta}^{(T)}(a, \theta, z), \\ q(\theta, z) &= -\sigma_{rz}^{(T)}(a, \theta, z), & l^\pm(r, \theta) &= -\sigma_z^{(T)}(r, \theta, \pm h), \\ t^\pm(r, \theta) &= \sigma_{\theta z}^{(T)}(r, \theta, \pm h), & k^\pm(r, \theta) &= -\sigma_{rz}^{(T)}(r, \theta, \pm h), \end{aligned}$$

а компоненти тензора напружень із верхнім індексом «(Т)» пов'язані з переміщенням (5) з урахуванням (3) та (4).

У такий спосіб вихідну задачу термопружності для циліндра із вільною від навантажень поверхнею, яка полягає у розв'язанні неоднорідного рівняння (1) з однорідними умовами (2) та врахуванням співвідношень (3), зведено до розв'язання задачі теорії пружності, яка полягає у розв'язанні однорідного рівняння (1) з неоднорідними крайовими умовами (6) та співвідношеннями (3). Побудову розв'язку загальної силової задачі з використанням методу перехресної суперпозиції наведено у ро-

боті [9]. Нижче розглянемо застосування цього ж підходу до отриманої задачі з крайовими умовами (6).

### Розв'язання задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченної довжини

Будемо шукати компоненти тензора напружень у вигляді

$$f = f_0 + f^I + f^{II},$$

де  $f$  позначає одну з компонент тензора напружень, складова з індексом «0» є елементарною частиною напружень, а верхніми індексами «I» та «II» позначено частини напружень, які дозволяють задовольнити крайові умови на бічній циліндричній поверхні та плоских торцях циліндра, відповідно.

Для визначення складових з верхнім індексом «I» напружень застосуємо подання Дуголла [10, с.900]:

$$u_r^I = r \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + \frac{\partial \omega^I}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^I}{\partial \theta}, \quad u_\theta^I = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega^I}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi^I}{\partial r},$$

$$u_z^I = -\frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \varphi^I}{\partial r} + 4(1-\nu) \varphi^I \right) + \frac{\partial \omega^I}{\partial z}$$

де

$$\nabla^2 \varphi^I(r, \theta, z) = 0, \quad \nabla^2 \omega^I(r, \theta, z) = 0, \quad \nabla^2 \psi^I(r, \theta, z) = 0, \quad (7)$$

а  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона. З використанням співвідношень (3) відповідні компоненти тензора напружень запишемо у вигляді:

$$\frac{\sigma_r^I}{\mu} = 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi^I) - 2\nu \varphi^I \right) + 2 \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^I}{\partial \theta} \right),$$

$$\frac{\sigma_\theta^I}{2\mu} = (1-2\nu) \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega^I}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^I}{\partial \theta} \right),$$

$$\frac{\sigma_z^I}{2\mu} = -2(2-\nu) \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} - r \frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial r \partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial z^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\sigma_{rz}^I}{\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( 2r \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial \theta^2} - 4(1-\nu) \frac{\partial \varphi^I}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial \theta \partial z},$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}^I}{\mu} = \frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial \theta \partial z^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega^I}{\partial \theta} \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^I}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\sigma_{\theta z}^I}{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \left( \frac{2\omega^I}{r} - \frac{\partial \varphi^I}{\partial r} - 4 \frac{1-\nu}{r} \varphi^I \right) - \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial r \partial z}.$$

Для спрощення викладу розглянемо крайові умови (6) у вигляді:

$$l^\pm(r, \theta) = l(r, \theta), \quad t^\pm(r, \theta) = k^\pm(r, \theta) = 0,$$

$$f(\theta, z) = g(\theta, z) = q(\theta, z) = 0, \quad (9)$$

де  $l(r, \theta)$  – парна функція  $\theta$ . За допомогою відокремлення змінних у рівняннях (7) з урахуванням співвідношень (6) та умов (9) знаходимо наступні вирази для потенціальних функцій:

$$\begin{aligned} \varphi^I &= A_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^I \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^I \cos m\theta r^m + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}^I \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \cos m\theta \cos k_n z, \\ \omega^I &= C_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^I \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^I \cos m\theta r^m + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm}^I \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \cos m\theta \cos k_n z, \\ \psi^I &= \sum_{m=1}^{\infty} E_m^I \sin m\theta r^m + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}^I \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \sin m\theta \cos k_n z, \end{aligned}$$

де  $k_n = n\pi / h$ ;  $I_m$  – модифіковані функції Бесселя першого роду порядку  $m$ ;  $A_0^I, C_0^I, A_m^I, C_m^I, E_m^I, B_n^I, D_n^I, B_{nm}^I, D_{nm}^I, F_{nm}^I$  – довільні сталі коефіцієнти. Підстановкою отриманих виразів у співвідношення (8) отримаємо розв'язання компонент тензора напружень у ряди Фур'є за координатами  $z$  та  $\theta$ . Отримані у такий спосіб вирази для компонент тензора напружень точно задовольняють вихідні рівняння задачі і володіють достатньою кількістю вільних коефіцієнтів для задоволення крайових умов (9) на бічній поверхні циліндра  $r = a$ .

Для визначення складових «II» розв'язку (5) скористаємося поданням Дуголла [11, с. 141]:

$$\begin{aligned} u_r^{II} &= \frac{2}{r} \frac{\partial \psi^{II}}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega^{II}}{\partial r} + (3-4\nu) \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial r} + 2z \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial r \partial z}, \\ u_{\theta}^{II} &= -2 \frac{\partial \psi^{II}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega^{II}}{\partial \theta} + \frac{3-4\nu}{r} \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial \theta} + \frac{2z}{r} \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial \theta \partial z}, \\ u_z^{II} &= \frac{\partial \omega^{II}}{\partial z} - (3-4\nu) \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

де функції  $\varphi^{II}(r, \theta, z)$ ,  $\omega^{II}(r, \theta, z)$ ,  $\psi^{II}(r, \theta, z)$  задовольняють рівняння (7). Відповідні компоненти тензора напружень мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^{II}}{\mu} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( (3-4\nu) \varphi^{II} + 2z \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + \omega^{II} \right) - 8\nu \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{\psi^{II}}{r} \right), \\ \frac{\sigma_{\theta}^{II}}{\mu} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( (8\nu-6) \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial r} - 4 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\psi^{II}}{r} \right) \right) - 6 \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4z}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial \omega^{II}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial \theta^2} \right), \\
& \frac{\sigma_z^{II}}{\mu} = 4z \frac{\partial^3 \varphi^{II}}{\partial z^3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\omega^{II} - \varphi^{II}), \\
& \frac{\sigma_{rz}^{II}}{\mu} = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial \theta \partial z}, \\
& \frac{\sigma_{r\theta}^{II}}{\mu} = 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( (3-4\nu) \frac{\varphi^{II}}{r} + \frac{2z}{r} \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + \frac{\omega^{II}}{r} \right) - 4 \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial z^2}, \\
& \frac{\sigma_{\theta z}^{II}}{\mu} = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial \theta \partial z} - 2 \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial r \partial z}
\end{aligned} \tag{10}$$

Після відокремлення змінних у рівняннях (7) функції Дуголла знаходимо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
\varphi^{II} &= A_0^{II} z + B_0^{II} + \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j}^{II} \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z J_0(\lambda_j r)}{\operatorname{sh} \lambda_j h J_0(\lambda_j a)} + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{mj}^{II} \frac{\operatorname{ch} \mu_{mj} z J_m(\mu_{mj} r)}{\operatorname{sh} \mu_{mj} h J_m(\mu_{mj} a)} \cos m\theta, \\
\omega^{II} &= C_0^{II} z + B_0^{II} + \sum_{j=1}^{\infty} C_{0j}^{II} \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z J_0(\lambda_j r)}{\operatorname{sh} \lambda_j h J_0(\lambda_j a)} + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{mj}^{II} \frac{\operatorname{ch} \mu_{mj} z J_m(\mu_{mj} r)}{\operatorname{sh} \mu_{mj} h J_m(\mu_{mj} a)} \cos m\theta, \\
\psi^{II} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{mj}^{II} \frac{\operatorname{ch} \mu_{mj} z J_m(\mu_{mj} r)}{\operatorname{sh} \mu_{mj} h J_m(\mu_{mj} a)} \sin m\theta,
\end{aligned}$$

де  $\mu_{mj}$  – корені рівняння

$$\left. \frac{dJ_m(\mu r)}{dr} \right|_{r=a} = 0;$$

$\lambda_j \equiv \mu_{0j}$ ;  $A_0^{II}$ ,  $B_0^{II}$ ,  $C_0^{II}$ ,  $D_0^{II}$ ,  $A_{0j}^{II}$ ,  $C_{0j}^{II}$ ,  $A_{mj}^{II}$ ,  $C_{mj}^{II}$ ,  $E_{mj}^{II}$  – довільні сталі коефіцієнти;  $J_m$  – функції Бесселя першого роду порядку  $m$ . Внаслідок властивостей функції Бесселя, власні значення  $\mu_{mj}$ ,  $m$ ,  $j=1,2,\dots$  задовольняють умову

$$\mu_{mj} a J_{m\pm 1}(\mu_{mj} a) = m J_m(\mu_{mj} a).$$

Шляхом підстановки отриманих виразів для потенціальних функцій Дуголла в співвідношення (10), знайдемо вирази для компонент тензора напружень у вигляді розвинень в ряди Бесселя та Фур'є відповідно



за радіальною та коловою координатами. Знайдені у такий спосіб напруження дозволяють задовольнити крайові умови (9) на торцях  $z = \pm h$  циліндра.

Вирази для напружень із індексом «0» знаходять у вигляді поліномів радіальної та осьової координат, які відповідають несамозрівноваженим частинам зусиль (9).

Таким чином, розв'язок задачі зведено до визначення наборів довільних коефіцієнтів у виразах для напружень з верхніми індексами «I» та «II» із крайових умов. Внаслідок взаємозалежності отриманих виразів, визначення вказаних коефіцієнтів здійснюється на основі безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь, які отримано безпосередньою підстановкою виразів (8), (10) у крайові умови (9). Розв'язок отриманої системи можна отримати з використанням алгоритму простої редукції [9].

### *Література*

1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т.Гринченко. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. Гринченко В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. / В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко. – К.: Наукова думка, 1985 – Т. 3. – 280 с.
3. Колтунов М.А. Упругость и прочность цилиндрических тел / М.А.Колтунов, Ю.Н.Васильев, В.А.Черных. – М.: Высшая школа, 1975. – 526 с.
4. Байда Э.Н. Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре / Э.Н.Байда. – М.-Л.: Госстройиздат, 1961. – 63 с.
5. Вігак В.М. Точний розв'язок осесиметричної задачі пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини / В.М.Вігак, Ю.В.Токовий // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55-60.
6. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д.Коваленко. – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с.
7. Мелешко В.В. Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини / В.В.Мелешко, Ю.В.Токовий, Д.Р.Барбер // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С.120-137.
8. Соляник-Красса К.В. Осесимметричная задача теории упругости / К. В. Соляник-Красса. – М.: Стройиздат, 1987. – 336 с.
9. Токовий Ю.В. Зведення тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь / Ю.В.Токовий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, №1. – С. 49-60.
10. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section / J.Dougall // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1914. – 49, No.17. – P. 895-978.

11. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate / J.Dougall // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – 41, No.8. – P. 129-228.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,  
д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України **Кушніром Р.М.** (м. Львів),*

### **THREE-DIMENSIONAL THERMAL STRESSES IN A SOLID ELASTIC CYLINDER OF FINITE LENGTH**

**Yu. V. Tokovyy**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova str., 3-b;  
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua*

*An analytical technique for solution of the three-dimensional thermoelasticity problem for a solid elastic cylinder of finite length with force-free boundary is presented. By making use the thermal potential technique, the original problem of thermoelasticity is reduced to the corresponding elasticity problem for the cylinder exposed to force loadings on its plane and cylindrical boundaries. To solve the obtained problem, we employ the method of cross-wise superposition.*

**Key words:** *elastic cylinder of finite length, thermal stresses, the method of cross-wise superposition*

**ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ВИГОТОВЛЕНОЇ  
З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ  
ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ  
ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ**

**М. М. Николишин, М. Й. Ростун**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б;  
e-mail: mrostun@iapmm.lviv.ua*

*Проблема граничної рівноваги пружно-пластичного функціонального градієнтного матеріалу (ФГМ) циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною довільної конфігурації зведена до сумісного розв'язання системи інтегральних рівнянь числовим методом механічної квадратури.*

***Ключові слова:** ФГМ, циліндрична раковина, зовнішня тріщина, зони пластичності, цілочисельні вирівнювання.*

У сучасній техніці часто елементи конструкцій працюють в таких умовах, що одна їх поверхня знаходиться в агресивному середовищі з певними фізико-хімічними параметрами, а друга – в середовищі з іншими. У таких випадках доцільно використовувати функціонально градієнтні матеріали (ФГМ), тобто композитні матеріали мікроскопічної неоднорідності, в яких механічні властивості змінюються неперервно за товщиною тіла. Найчастіше ці матеріали виготовляються з кераміки та металу. Почали розробляти ФГМ для космічних кораблів, як матеріали, що витримують надвисокі температури. У даний час такі матеріали набувають більш широкого застосування, що зумовлює необхідність проводити не лише температурний аналіз, а й досліджувати їх напружено-деформований стан, міцність тощо. Перші публікації про нерівномірний розподіл температури та зумовлених нею напружень в тілі з ФГМ з'явилися в Японії [1]. Результати досліджень розподілу напружень у циліндричній та сферичній оболонках, а також у порожнистому циліндрі з ФГМ, зумовлених температурою або силовим навантаженням, приведені в [2-5]. Нижче досліджується вплив ФГМ на граничну рівновагу циліндричної оболонки, ослабленої поздовжньою поверхневою тріщиною.

**Постановка задачі.** Розглянемо виготовлену з ФГМ безмежну кругову циліндричну оболонку, ослаблену поздовжньою або поперечною тріщиною довільної конфігурації завдовжки  $2l$ . Глибину тріщини задано двома гладкими кривими  $d_1(x)$  і  $d_2(x)$  (рис.1). У циліндричній системі координат  $\alpha\beta\gamma$  на випадок поздовжньої тріщини  $x \equiv \alpha$ , а на випадок поперечної –  $x \equiv \beta$ . Початок координат вибрано в центрі

тріщини. Вважатимемо, що оболонка і береги тріщини завантажені лише симетричними відносно площини тріщини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують. Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що біля тріщини по всій глибині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, відповідно до аналога  $\delta_c$  – моделі [6], зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розрив пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої чи внутрішньої поверхонь оболонки, тобто відповідно в області  $x \in ]-x_0; x_0[$ ,  $\gamma \in [-h + d_2; h] \cup [d_2; h]$  ( $x_0 = l/R$ ,  $2h$  – товщина оболонки,  $R$  – радіус її серединної поверхні), діють постійні напруження  $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$ , де  $\sigma_B$  – границя міцності, а  $\sigma_T$  – поріг текучості ФГМ. У пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині, тобто в областях  $\gamma \in [-h; h]$ ,  $|x| \in [x_0; x_0 + x_p]$  ( $\alpha_p = l_p/R$ ,  $l_p$  – довжина пластичної зони), діють невідомі нормальні зусилля  $N$  та згинний момент  $M$ , які протидіють розкриттю тріщини та задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок [7].

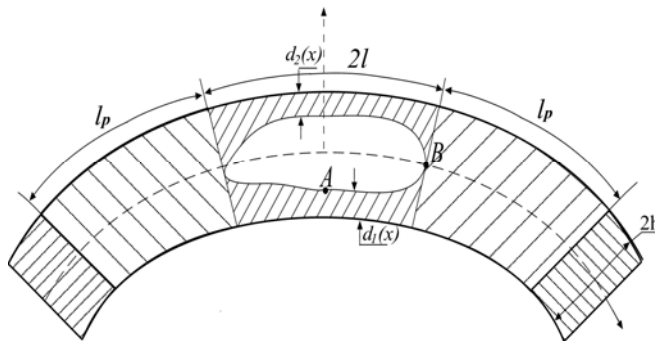


Рис.1

Таким чином, у рамках прийнятого аналога  $\delta_c$  – моделі пружно-пластичну задачу про граничну рівновагу оболонки з внутрішньою тріщиною заданої довжини  $2l$  зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з фіктивною наскрізною тріщиною невідомої довжини  $2l_1 = 2(l + l_p)$ , на берегах якої виконуються умови:

$$N_2(\alpha) = \begin{cases} N_2^{(1)} + N^l - N_2^0, & |x| < x_0; \\ N - N_2^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1; \end{cases} \quad M_2(\alpha) = \begin{cases} M_2^{(1)} + M^l - M_2^0, & |x| < x_0; \\ M - M_2^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $x_1 = l_1/R$ ,  $N_2^{(1)}$ ,  $M_2^{(1)}$  – зусилля та момент, прикладені до бере-

гів реальної тріщини;  $N_2^0, M_2^0$  – ці ж параметри на лінії тріщини в суцільній оболонці, зумовлені зовнішнім навантаженням;  $N^l, M^l$  – нормальне зусилля та згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під внутрішньою тріщиною та які згідно з прийнятими припущеннями про напруження в цих зонах визначаються за формулами:

$$N^l = \int_{-h}^{d_1(x)} \sigma_0 d\gamma + \sigma^0 \int_{d_2(x)}^h \sigma_0 d\gamma, \quad M^l = \int_{-h}^{d_1(x)} \sigma_0 \gamma d\gamma + \int_{d_2(x)}^h \sigma_0 \gamma d\gamma, \quad (2)$$

**Основні співвідношення неоднорідних за товщиною оболонок з тріщиною.** Оболонка виготовлена з ФГМ є неоднорідною за товщиною. Тобто модуль пружності та коефіцієнт Пуассона є функціями нормальної до серединної поверхні координати  $\gamma$

$$E = E(\gamma), \quad \nu = \nu(\gamma). \quad (3)$$

Залежності (3) такі, що характеристики матеріалу оболонки задовольняють узагальнений закон Гука і справедлива гіпотеза недеформованих нормальних елементів [8]. Система ключових рівнянь для такої оболонки з поздовжньою наскрізною тріщиною завдовжки  $2l_1$  має вигляд [6]

$$L_{ij} u_i = q_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Тут  $u_i$  – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки;

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (C_{11} - C_{66} + \frac{K_{11}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ L_{13} &= L_{31} = C_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{K_{11}}{R} \left( \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right), \\ L_{22} &= \left[ C_{11} + \frac{1}{R} (2K_{11} - \frac{1}{R} D_{11}) \right] \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left[ C_{66} + \frac{1}{R} (2K_{66} + \frac{4}{R} D_{66}) \right] \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\ L_{23} &= L_{32} = \left( C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{R} \left[ K_{11} + \frac{D_{12} + 4D_{66}}{R} \right] \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \\ &\quad \frac{1}{R} \left( K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}, \\ L_{33} &= C_{11} - \frac{2}{R} \left( K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \frac{1}{R^2} D_{11} \nabla^2 \nabla^2, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad q_1 = R \frac{\partial}{\partial \alpha} (C_{12} \varepsilon_{22}^0 + K_{12} \kappa_{22}^0), \\ q_2 &= \frac{\partial}{\partial \beta} (RC_{12} + K_{11}) \varepsilon_{22}^0 + (RK_{11} + D_{11}) \kappa_{22}^0, \end{aligned}$$

$$q_3 = R(C_{11}\varepsilon_{22}^0 + K_{11}\kappa_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(K_{12}\varepsilon_{22}^0 + D_{12}\kappa_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(K_{11}\varepsilon_{22}^0 + \kappa_{22}^0 D_{11}),$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{R}[u_2(\alpha)]\delta(\beta), \quad \kappa_{22}^0 = -\frac{1}{R}[\theta_2(\alpha)]\delta(\beta) \quad (5)$$

$$C_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma)d\gamma, \quad K_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma)\gamma d\gamma, \quad D_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma)\gamma^2 d\gamma,$$

$$B_{11}(\gamma) = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad B_{12}(\gamma) = \nu B_{11}, \quad B_{66}(\gamma) = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$[u_2(\alpha)]$ ,  $[\theta_2(\alpha)]$  – стрибки переміщень та кута повороту.

Враховуючи співвідношення (5), а також той факт, що функції переміщень  $u_i(\alpha, \beta)$  ( $i=1,2,3$ ) при переході через тріщину мають скачок, а функції зусиль та моментів неперервні, запишемо формули для визначення збурених нормального зусилля  $N_2$  та згинного моменту  $M_2$  в довільній точці оболонки

$$N_2 = \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left(C_{11} + \frac{K_{11}}{R}\right) \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{1}{R} \left[ C_{11} + \frac{1}{R} \left( K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right] u_3 - \frac{1}{R} \left( C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \varepsilon_{22}^0,$$

$$M_2 = \frac{K_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left( K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{1}{R} \left[ K_{11} + \frac{1}{R} \left( D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right] u_3 - \frac{1}{R^2} D_{11} \varepsilon_{22}^0. \quad (6)$$

На випадок поперечної тріщини в системі (4) потрібно поміняти  $L_{ij}$  та  $q_j$ , співвідношення (5) приймають вигляд

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{R}[u_1(\beta)]\delta(\alpha), \quad \kappa_{11}^0 = -\frac{1}{R}[\theta_1(\beta)]\delta(\alpha), \quad (5')$$

а замість виразів для  $N_2$  та  $M_2$  (6) записуємо аналогічні вирази для  $N_1$ ,  $M_1$

**Інтегральні рівняння задачі.** Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь (4) операторним методом [9] і враховуючи (5), для визначення переміщень  $u_i$  отримуємо формули

$$u_i = L_i \varphi_2 + P_i \psi_2, \quad i=1,2,3 \quad (7)$$

де  $L_i$ ,  $P_i$  – диференціальні оператори не вищого порядку [10], а функції  $\varphi_2(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_2(\alpha, \beta)$  задовольняють рівняння

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^0; \quad D\psi_2 = \kappa_{22}^0, \quad (8)$$

$$D = D^0 + \frac{4R}{d_1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[ (C_{11}K_{66} - C_{66}K_{11}) * \nabla^2 \nabla^2 + RC_{66}(C_{11} - K_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right];$$

$$d_1 = C_{11}D_{11} - K_{11}^2; \quad D^0 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2.$$

На основі побудованого з допомогою інтегрального перетворення Фур'є фундаментального розв'язку рівнянь (8) [6] та операції згортки запишемо інтегральне представлення ключових функцій

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) \cos(n\beta) \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} [u_2(\xi)] [\Phi_n^0(\xi - \alpha) - \Phi_n^*(\xi - \alpha)] d\xi;$$

$$\psi_2(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) \cos(n\beta) \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} [\theta_2(\xi)] [\Phi_n^0(\xi - \alpha) + \Phi_n^*(\xi - \alpha)] d\xi. \quad (9)$$

Тут  $\Phi_n^*(z) = \Phi_n(z) - \Phi_n^0(z)$ ,

$$\Phi_n^0(z) = \frac{1}{96n!} e^{-n|z|} (n^3 |z|^3 + 6n^2 z^2 + 15n|z| + 15), \quad \Phi_0^0(z) = |z|^7 / (2 \cdot 7!), \quad n \geq 1,$$

$\Phi_n(z)$  – фундаментальний розв'язок рівняння

$$\left( \frac{d^8}{d\alpha^8} - (4n^2 - A) \frac{d^6}{d\alpha^6} + (6n^2 - 2An^2 + B) \frac{d^4}{d\alpha^4} - n^4 (4n^2 - A) \frac{d^2}{d\alpha^2} + n^8 \right) \Phi_n(z) = \delta^n(z),$$

$$A = 4R \frac{C_{11}K_{66} - C_{66}K_{11}}{D_{11}C_{11} - K_{11}^2}, \quad B = 4R^2 \frac{C_{66}(C_{11} - C_{66})}{D_{11}C_{11} - K_{11}^2},$$

$\delta(z)$  – функція Дірака;  $\delta_{0n}$  – символ Кронеккера.

Підставляючи співвідношення (9) у формули (7), а результат у (6), отримаємо інтегральні представлення для визначення нормального зусилля та згинного моменту в довільній точці оболонки. Вимагаючи тепер виконання умов (1), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_j(\xi) K_{ij}^*(\xi - \alpha) d\xi = f_i(\alpha), \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

де  $F_1(\xi) = \frac{1}{R} \frac{d}{d\xi} [u_2(\xi)]; \quad F_2(\xi) = a^2 \frac{d}{d\xi} [\theta_2(\xi)];$

$$K_{11}^*(z) = -\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} + K_{11}^0(z); \quad K_{22}^*(z) = a_2 \operatorname{cth} \frac{z}{2} + K_{22}^0(z);$$

$$K_{12}^*(z) = K_{21}^*(z) = K_{12}^0(z); \quad f_1 = \frac{4\pi N_2(\alpha)}{C_{11}(1 - \mu^2)}; \quad f_2 = \frac{4\pi M_2(\alpha)}{Ra^2 C_{11}(1 - \mu^2)};$$

$$a^2 = \frac{D_{11}}{R^2 C_{11}(1 - \mu^2)}; \quad a_2 = 3 - 2\eta - \eta^2; \quad \mu = \frac{C_{12}}{C_{11}}; \quad \eta = \frac{D_{12}}{D_{11}};$$

$K_{ij}^0(z)$  – неперервні функції для всіх значень аргументу  $z \in [-2\alpha_1, 2\alpha_1]$ .

Розв'язки системи сингулярних інтегральних рівнянь (10) повинні задовольняти умови

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_m(\xi) d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \quad (11)$$

які забезпечують неперервність переміщень  $u_2$  та кута повороту  $\theta_2$  у вершинах тріщини і впливають із співвідношень (5).

Відповідно до моделі в системі (10) невідомі границі інтегрування  $\alpha_1$ , а також зусилля  $N$  та момент  $M$ , що відповідають реакції пластичних зон на пружний об'єм і задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок. Вважатимемо, що ФГМ оболонки притаманне зміцнення, тому вимагатимемо, щоб  $N$  та  $M$  у пластичній зоні були розподілені за лінійним законом:

$$N(\alpha) = S \left[ (1 - m^*) (|\alpha| - \alpha_0) / (\alpha_1 - \alpha_0) + m^* \right]$$

$$M(\alpha) = H \left[ (1 - m^*) (|\alpha| - \alpha_0) / (\alpha_1 - \alpha_0) + m^* \right] \quad \alpha_0 \leq |\alpha| \leq \alpha_1. \quad (12)$$

Тут  $m^* = \sigma_B / \sigma_T$ ;  $S, H$  – невідомі сталі, які задовольняють прийняту умову пластичності, наприклад, умову Треска у вигляді пластичного шарніру [7].

$$[S / (2h\sigma_T^*)]^2 + |H| / (h^2\sigma_T^*) = 1, \quad [N(\alpha) / (2h\sigma_T^*)]^2 + |M(\alpha)| / (h^2\sigma_T^*) = 1, \quad (13)$$

$$\sigma^*(\alpha) = (\sigma_T - \sigma_B) (|\alpha| - \alpha_0) / (\alpha_1 - \alpha_0) + \sigma_B.$$

При цьому координата нейтрального волокна вздовж пластичної зони залишається сталою.

Умову пластичності (12), (13) використовуємо для визначення довжини пластичної зони, тобто пів довжини фіктивної тріщини  $\alpha_1$ . Для знаходження невідомих  $S$  та  $H$  застосуємо умову скінченності напружень біля вершин фіктивної тріщини. Для цього достатньо, щоб коефіцієнти інтенсивності нормального зусилля та згінного моменту дорівнювали нулю, тобто

$$K_1(l_1) = K_3(l_1) = 0. \quad (14)$$

Таким чином, задачу про граничну рівновагу неоднорідної за товщиною пружно-пластичної циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною довільної конфігурації зведена до сумісного розв'язання системи інтегральних рівнянь (10), умов (11), умов пластичності (12), (13) та умов обмеженості напружень (14).

Систему (10) можна розв'язати одним з прямих числових методів, наприклад, методом механічних квадратур [11]. Але функції  $f_i(\alpha)$  ( $i = 1, 2$ ), які знаходяться у правих частинах інтегральних рівнянь, мають розрив в точці  $|\alpha| = \alpha_0 = l_0 / R$ . Порівняння аналітичного розв'язку канонічних сингулярних інтегральних рівнянь (регулярна частина ядер рівна нулеві) з розривом у правій частині з відповідним розв'язком, отриманим за допомогою методу механічних квадратур, показало, що використання цього методу безпосередньо до системи типу (10) приводить до значних похибок у розв'язку в околі точок  $|\alpha| = \alpha_0$ , де поведінка розв'язку є найбільш цікавою. Алгоритм числового розв'язування системи типу (10) сумісно з умовами (11)-(14) приведено в [6].



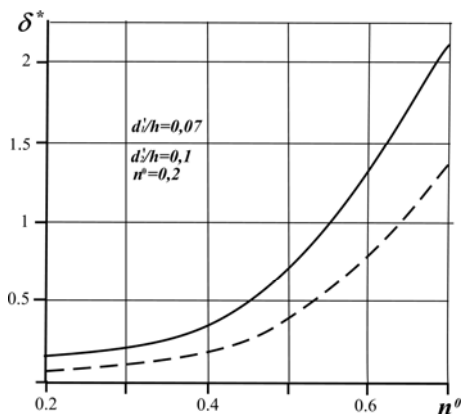


Рис. 2

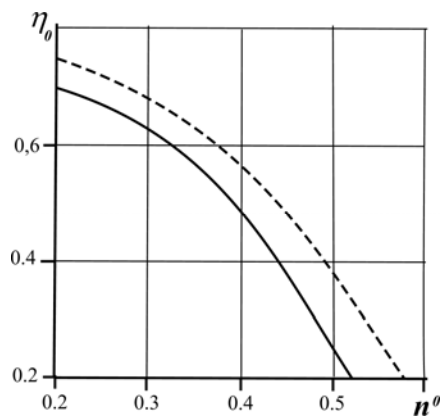


Рис. 3

Інтегруючи розв'язок системи (10), розкриття тріщини  $\delta(\alpha, \gamma)$  у довільній її точці визначаємо за формулою

$$\delta(\alpha, \gamma) = [u_2(\alpha)] + \gamma[\theta_2(\alpha)], \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad |\gamma| \leq h.$$

**Числові результати.** Як приклад, розглянуто нескінченну циліндричну оболонку з ФГМ, зовнішня поверхня якої алюміній ( $E_C = 70$  GPa), а внутрішня – германій ( $E_B = 151$  GPa). За товщиною модуль пружності  $E(\gamma)$  змінюється за законом [12]

$$E(\gamma) = (E_3 - E_B)V + E_B, \quad V = \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^m, \quad \xi = \gamma/2h, \quad (15)$$

а коефіцієнт Пуассона  $\nu(\gamma) = const$ .

Числовий аналіз проведено для оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності  $p$  ( $N_2^0 = Rp$ ,  $M_2^0 = 0$ ) за таких значень параметрів:  $h/R = 0,01$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\sigma_B/\sigma_T = 1,5$ ;  $l_0/R = 0,1$ . Оболонка ослаблена внутрішньою поздовжньою параболічною тріщиною

$$d_1(\alpha) = \frac{1}{\tau_0^2}(h - d'_1 - d'_2)\alpha^2 - h + d'_1, \quad d_2(\alpha) = -\frac{1}{\tau_0^2}(h - d'_1 - d'_2)\alpha^2 + h - d'_2,$$

$d'_1$  та  $d'_2$  віддалі від вершин параболи до внутрішньої та зовнішньої поверхонь оболонки.

На рис.2 показано залежність відносного розкриття фронту тріщини  $\delta^* = \delta(0, \gamma)E_B / (l_0\sigma_T)$  від відносного навантаження  $n^0 = Rp / (2h\sigma_T)$ . Суцільна лінія відповідає точці А а штрихова – точці В.

На рис.3 показано залежність відносної довжини пластичної зони біля вершин тріщин  $\tau_0 = l_0/l_1$  від навантаження  $n^0$ . Тут криві відповідають тим самим параметрам, що і на рисунку 2. Штрихова лінія відповідає параметру  $\sigma_B/\sigma_T = 1,5$  (матеріал зі зміцненням), а суцільна –

$\sigma_B / \sigma_T = 1$  (ідеально пружно-пластичний матеріал). Числовий аналіз показав, що “ $m$ ” – показник у поданні (15) – мало впливає на розкриття фронту тріщини, коли  $m > 3$ .

Аналіз залежності розкриття тріщини від навантаження проводився і для випадку, коли невідомі зусилля  $N(\alpha)$  та момент  $M(\alpha)$  (реакція пластичної зони на пружний об’єм) задовольняють умову пластичності (13), але змінюються відповідно за квадратичним та кубічним законом, а координата нейтрального волокна  $\xi_n$  – за лінійним законом. Тобто

$$\begin{aligned} N(\alpha)/(2h\sigma_T) &= n_0 + n_1|\alpha| + n_2\alpha^2, \quad \xi_n = k_m \left[ -1 + (1-p^*)(|\alpha| - \tau_0) \right] / (1-\tau_0), \\ M(\alpha)/(h^2\sigma_T) &= k_m \omega \left( m_0 + m_1|\alpha| + m_2\alpha^2 + m_3|\alpha|^3 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} n_0 &= v_1(1 + \omega\tau_0), \quad n_1 = v_2(1 + \omega\tau_0) - v_1\omega, \quad n_2 = -v_2\omega; \\ m_0 &= -v_1\tau_0(2 + \omega\tau_0), \quad m_1 = 2v_1(1 + \omega\tau_0) - v_2\tau_0(2 + \omega\tau_0), \\ m_2 &= -v_1\omega + 2v_2(1 + \omega\tau_0), \quad m_3 = n_2\omega - (1-p^*)/(1-\tau_0); \\ \tau_0 &= \alpha_0/\alpha_1; \quad k_m = \text{sgn} H; \quad v_1 = (m^* - \tau_0)/(1-\tau_0), \\ v_2 &= (1-m^*)/(1-\tau_0); \quad m^* = \sigma_0/\sigma_T, \quad p^* = Rp/(2h\sigma_T). \end{aligned}$$

Результати отримані за умов (16), (13) та (12), (13) відрізняються не більше 10 %.

Аналіз проведений для поперечної тріщини показав, що залежність параметрів граничної рівноваги  $\delta^*$  та  $\tau_0$  від навантаження, геометричних та механічних параметрів якісно така ж як і для поздовжньої тріщини, а кількісно на 7-12 % менша.

**Висновок.** Якщо за критерій руйнування взяти критерій критичного розкриття фронту тріщини, то руйнування циліндричної оболонки з ФГМ, для розглянутих геометричних і механічних параметрів і навантаження, почнеться на продовженні тріщини в глибину, тобто в точці  $A$ . Закон розподілу модуля пружності  $E(\gamma)$  за товщиною оболонки незначно впливає на її граничний стан на відміну від відношення його граничних значень  $E_3/\dot{A}_B$ . Умова пластичності мало впливає на розкриття тріщини та розміри пластичних зон.

### Література

1. Koizumi M. The concept of FGM / M.Koizumi // Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials. – 1993. – **34**. – P. 3-10.
2. Obata Y. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material / Y.Obata, N.Noda // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**. – P. 471-87.

3. Kim K.S. Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material / K.S.Kim, N.A.Noda // *Acta Mech.* – 2002. – **156**. – P. 145-61.
4. Kim K.S. Green's function approach to the deflection of a FGM plate under transient thermal loading / K.S.Kim, N.A.Noda // *Arch Appl Mech.* – 2002. – **72**. – P. 127-37.
5. Shao Z.S. Analytical solutions of stresses in functionally graded circular hollow cylinder with finite length / Z.S.Shao, L.F.Fan, T.J.Wang // *Key Eng Mater.* – 2004. – P. 261-263; 651-6.
6. Кушнір Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М.Кушнір, М.М.Николишин, В.А.Осадчук. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
7. Прагер В. Проблемы теории пластичности / В.Прагер. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.
8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А.Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
9. Підстригач Я.С. Температурні напруження в оболонках / Я.С.Підстригач, С.Я.Ярема. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
10. Николишин М.М. Напряженное состояние многослойной цилиндрической оболочки с системой параллельных разрезов / М.М.Николишин // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1985. – Вып.22. – С. 85-89.
11. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И.Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304с.
12. Ruhi M. Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials / M.Ruhi, A.Angoshtari, and R.Naghdabadi // *J.Thermal Stresses.* – 2005.– **28**. – P. 391-408.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 25.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**, д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України **Кушніром Р.М.** (м. Львів),*

### **LIMIT EQUILIBRIUM OF CYLINDRICAL SHELL MADE FROM FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIAL WITH INTERNAL CRACKS ARBITRARY CONFIGURATION**

**M. M. Nykolyshyn, M. Yo. Rostun**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics*

*National Academy of Sciences of Ukraine;*

*79060, L'viv, Naukova str., 3-b; e-mail: mrostun@iapmm.lviv.ua*

*The problem on limit equilibrium elastic-plastic of functionally gradient material (FGM) made cylindrical shell internal crack arbitrary configuration reduced to a system of nonlinear singular integral equations, which is solved, the numerical method of mechanical quadratures.*

**Key words:** *FGM, cylindrical shell, surface crack, plasticity zones, integral equations.*

УДК 629.83

## ВІДХИЛЕННЯ РОТОРА ГІРОКОМПАСА НА РУХОМІЙ ОСНОВІ

К. Г. Левчук<sup>1</sup>, І. В. Цідило<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»; 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37;  
e-mail: [k.levchuk@kpi.ua](mailto:k.levchuk@kpi.ua)

<sup>2</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
e-mail: [tm@nung.edu.ua](mailto:tm@nung.edu.ua)

Отримано математичну модель гірокомпаса на рухомій основі. Для інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь застосовано метод послідовних наближень Пікара-Пеано. Досліджено динаміку гірокомпаса до другого наближення. Відхилення гірокомпаса від заданого положення отримані методом усереднення.

**Ключові слова:** гірокомпас, метод Пікара-Пеано, відхилення рамок гіроскопа, метод усереднення.

**Вступ.** Гіроскопічний компас (ГК) – триступеневий гіроскоп, головна вісь якого відтворює просторове положення полуденної лінії, які використовують для керування курсом рухомого об'єкта, а також в артилерії, геодезії та для виконання маркшейдерських робіт. ГК обладнані всі військові кораблі та торпедні катера, підводні човни, морські торговельні, пасажирські, риболовецькі судна.

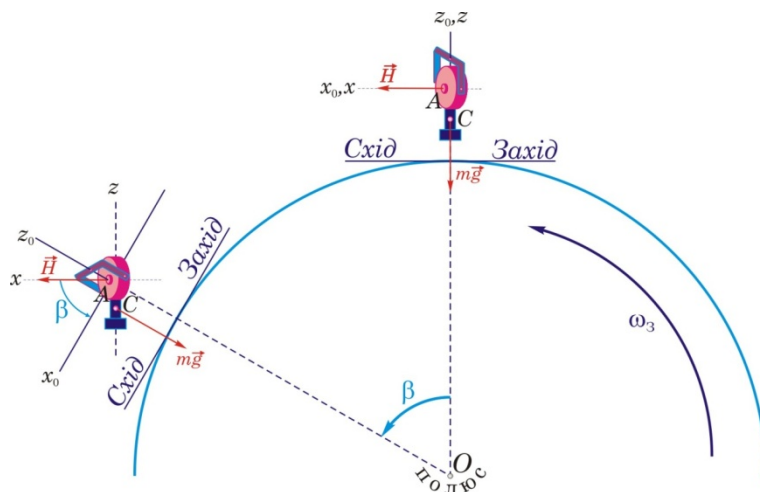


Рис.1. Принцип роботи гірокомпаса

На рис. 1 точка  $C$  – центр ваги ГК зміщений відносно точки підвішування  $A$  на відстань  $AC = l$ .

**Принцип роботи гірокомпаса.** ГК являє собою поєднання тристепеневого гіроскопа з горизонтальним положенням головної осі й фізичного маятника. Маятник з'єднаний з гіроскопом так, що при відхиленні головної осі від площини горизонту виникає момент відносно горизонтальної осі підвісу ротора (рис. 1).

У цьому положенні гіроскоп можна вважати вільним (астатичним), оскільки момент сили ваги  $m\vec{g}$  відносно точки підвішування  $A$ , який називають маятниковим моментом, дорівнює нулю, так як лінія дії сили ваги  $m\vec{g}$  проходить через точку  $A$ ,  $Ax_0z_0$  – площина природного горизонту,  $\beta$  – кут, який складе головна вісь  $\vec{H}$  гірокомпаса з горизонтом, тобто підніметься над площиною горизонту  $Ax_0z_0$ . При цьому сила ваги  $m\vec{g}$ , спрямована завжди вздовж вискової лінії (вертикалі), створює маятниковий момент  $M_y = mgl \sin \beta$  відносно вертикальної осі  $Ay$ , під дією якого ГК починає здійснювати прецесійний рух навколо вертикальної осі  $Az_0$  у напрямку полюса  $O$ . В результаті прецесійного руху кут відхилення головної осі  $\vec{H}$  від площини меридіана  $Ay_0z_0$  буде зменшуватись: головна вісь ГК прискорено наближатися до меридіана, оскільки кут  $\beta$  підйому кінця осі гіроскопа неперервно збільшується, що приводить до збільшення маятникового моменту і, як наслідок, кутової швидкості прецесії ГК. Одночасно швидкість підйому головної осі ГК по мірі наближення до площини меридіана зменшується і перетворюється в нуль, коли вісь збігатиметься з площиною меридіана. В результаті його вісь устанеться у напрямі на північ. Отже, ротор ГК є одночасно гіроскопом і фізичним маятником, котрий може коливатись навколо осі  $Ay$  внутрішньої рамки карданового підвісу. На нерухомій відносно Землі основі плече цього маятника за допомогою сил ваги встановлюється по вертикалі, а перпендикулярна до нього вісь обертання ротора гіроскопа розміщується у горизонтальній площині. Після запуску ГК розпочинається “боротьба” між маятником і гіроскопом – кожний з них намагається виявити свої властивості: гіроскоп – зберегти положення головної осі незмінним у просторі, маятник – встановити своє плече вздовж вертикалі, що змінює своє положення у просторі внаслідок обертання Землі.

**Математична модель гірокомпаса на рухомій основі.** Розглянемо роботу ГК на кораблі. Корабель може здійснювати будь-які розвороти, але вісь ГК завжди буде вказувати напрям на північ. Щоб визначити положення поздовжньої осі корабля по відношенню до площини меридіана, в ГК, як і в гіромагнітному компасі, використовують горизонтальний диск з поділками, який закріплений на осі зовнішньої рамки кар-

данового підвісу ГК. У сучасних ГК замість диска встановлюють обертові трансформатори, котрі також дозволяють передавати показання ГК до різних споживачів.

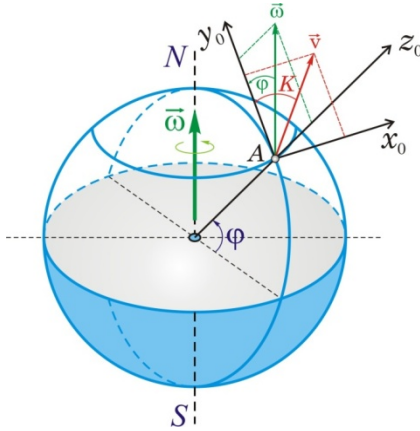


Рис.2. Нерухома система координат

У якості нерухомої системи координат прийемо земну систему  $Ax_0y_0z_0$ , орієнтовану географічно. Осі  $Ax_0$  і  $Ay_0$  розмістимо в площині горизонту: вісь  $Ax_0$  спрямуємо по дотичній до паралелі на схід, вісь  $Ay_0$  – по дотичній до меридіана на північ (рис.2). Запишемо проекції кутової швидкості повороту опорної системи координат на ці осі

$$\begin{aligned} \omega_{0x} &= -\frac{v \cos K}{R}; \\ \omega_{0y} &= \omega \cos \varphi + \frac{v \sin K}{R}; \\ \omega_{0z} &= \omega \sin \varphi + \frac{v \sin K}{R} \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі,  $R$  – радіус Землі,  $v$  – швидкість об'єкта,  $K$  – курс об'єкта.

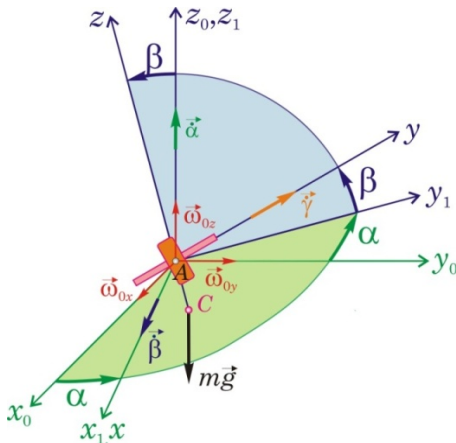


Рис.3. Рухома система координат

Положення рухомої системи координат будемо описувати за допомогою осей Резаля  $Ax_1y_1z_1$  (рис. 2). Осі Резаля повернуті відносно опорної системи  $Ax_0y_0z_0$  на кути  $\alpha$  і  $\beta$ . Головна вісь гіроскопа збігається з віссю  $Ay_1$ . Точка  $C$  характеризує положення центра мас системи “гіроскоп+маятник”.

Для отримання рівнянь руху ГК скористаємось системою рівнянь Лагранжа другого роду.

$$T = \frac{1}{2} [J_e (\omega_x^2 + \omega_z^2) + J_O \omega_y^2], \quad (2)$$

де  $J_e$ ,  $J_O$  – екваторіальний і осьовий моменти інерції ГК,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  – проекція суми кутових швидкостей абсолютного руху ротора

$\vec{\omega} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$  і опорної системи  $\vec{\omega}_0$  на осі системи координат, жорстко пов'язаних з ГК:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\beta} + \omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha; \\ \omega_y &= (-\omega_{0x} \sin \alpha + \omega_{0y} \cos \alpha) \cos \beta + (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \sin \beta + \dot{\gamma}; \\ \omega_z &= (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \sin \beta + (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \cos \beta,\end{aligned}\quad (3)$$

У випадку розігнаного ротора перше рівняння системи матиме вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = J_O \omega_y = H = \text{const}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = 0.$$

З урахуванням (3) після диференціювання виразу для кінетичної енергії (2) отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= J_e \omega_z \cos \beta + J_O \omega_y \sin \beta = J_e [(\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \cos^2 \beta + \\ &+ \frac{1}{2}(\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \sin 2\beta] + H \sin \beta; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= J_e [\ddot{\alpha} \cos^2 \beta - (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \dot{\beta} \sin 2\beta + \frac{1}{2} \dot{\alpha} (\omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha) \times \\ &\times \sin 2\beta + \dot{\beta} (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \cos 2\beta] + H \dot{\beta} \cos \beta; \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= J_e \left[ -\dot{\beta} (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) + \frac{1}{2} (\omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha) \times \right. \\ &\times (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \sin 2\beta - \left. \left( \frac{1}{2} (\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2) \sin 2\alpha - \omega_{0x} \omega_{0y} \cos 2\alpha \right) \cos^2 \beta \right] - \\ &- H (\omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha) \cos \beta; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= J_e \omega_x = J_e (\dot{\beta} + \omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= J_e [\ddot{\beta} - \dot{\alpha} (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha)]; \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= J_e \left[ -\frac{1}{2} \left( (\omega_{0z} + \dot{\alpha})^2 - (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha)^2 \right) \sin 2\beta + \right. \\ &+ (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \cos 2\beta \left. \right] + \\ &+ H [(\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \cos \beta + (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \sin \beta].\end{aligned}\quad (4)$$

Оскільки  $Q_\alpha = M_{z_0}$ ,  $Q_\beta = M_x$  – моменти зовнішніх сил, якими для ГК є сили інерції  $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ , зумовлені прискоренням об'єкта  $\vec{a}$ , і вагою маятника  $m\vec{g}$ , спрямованою протилежно осі  $Az_0$  під час всього руху і прикладеною у точці  $C$  – центрі мас маятника. Так як момент сил визначається формулою

$$\vec{M}_A = \vec{AC} \times (\vec{\Phi} + m\vec{g}),$$

$$\text{то } Q_{\alpha} = M_{z_0} = m \left[ x_{0C} (g_{0y} - a_{0y}) - y_{0C} (g_{0x} - a_{0x}) \right];$$

$$Q_{\beta} = M_x = m \left[ y_C (g_z - a_z) - z_C (g_y - a_y) \right],$$

$$\text{де } g_y = -g \sin \beta; \quad g_z = -g \cos \beta; \quad g_{0x} = 0; \quad g_{0y} = 0;$$

$$a_y = -a_{0x} \sin \alpha \cos \beta + a_{0y} \cos \alpha \cos \beta + a_{0z} \sin \beta;$$

$$a_z = a_{0x} \sin \alpha \sin \beta - a_{0y} \cos \alpha \sin \beta + a_{0z} \cos \beta;$$

$$y_C = 0; \quad z_C = -l; \quad x_{0C} = -l \sin \alpha \sin \beta; \quad y_{0C} = l \cos \alpha \sin \beta;$$

Отже, узагальнені сили

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &= ml \left[ a_{0x} \cos \alpha + a_{0y} \sin \alpha \right] \sin \beta; \\ Q_{\beta} &= ml \left[ (a_{0x} \sin \alpha - a_{0y} \cos \alpha) \cos \beta - (a_{0z} + g) \sin \beta \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Тоді рівняння Лагранжа другого роду згідно (4) і (5) набувають вигляду

$$\begin{aligned} J_e \left[ \ddot{\alpha} \cos^2 \beta - \left( \dot{\alpha} + \omega \sin \varphi + \frac{v}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi \right) \dot{\beta} \sin 2\beta - 2\dot{\beta} (\omega \cos \varphi \cos \alpha + \right. \\ \left. + \frac{v}{R} \sin (K + \alpha)) \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \left( \omega \sin \varphi + \frac{v}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi \right) (\omega \cos \varphi \sin \alpha - \right. \\ \left. - \frac{v}{R} \cos (K + \alpha)) \sin 2\beta + \left( \frac{1}{2} \left( \left( \omega \cos \varphi + \frac{v}{R} \sin K \right)^2 - \left( \frac{v}{R} \cos K \right)^2 \right) \sin 2\alpha + \right. \\ \left. + \left( \omega \cos \varphi + \frac{v}{R} \sin K \right) \frac{v}{R} \cos K \cos 2\alpha \right) \cos^2 \beta \right] + H \left[ (\dot{\beta} + \omega \cos \varphi \sin \alpha - \right. \\ \left. - \frac{v}{R} \cos (K + \alpha)) \cos \beta \right] = ml \left[ a_{0x} \cos \alpha + a_{0y} \sin \alpha \right] \sin \beta; \\ J_e \left[ \ddot{\beta} + \dot{\alpha} \left( \omega \cos \varphi \cos \alpha + \frac{v}{R} \sin (K + \alpha) \right) + \frac{1}{2} \left( \left( \omega \sin \varphi + \frac{v \sin K}{R} \operatorname{tg} \varphi + \dot{\alpha} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \omega \cos \varphi \cos \alpha + \frac{v}{R} \sin (K + \alpha) \right)^2 \right) \sin 2\beta \right] - H \left[ \left( \omega \sin \varphi + \frac{v \sin K}{R} \operatorname{tg} \varphi + \dot{\alpha} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \beta - \left( \omega \cos \varphi \cos \alpha + \frac{v}{R} \sin (K + \alpha) \right) \sin \beta \right] = \\ = ml \left[ (a_{0x} \sin \alpha - a_{0y} \cos \alpha) \cos \beta - (a_{0z} + g) \sin \beta \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Отримані нелінійні диференціальні рівняння (6) є динамічними рівняннями руху гірокомпаса.

Отже, виникає задача асимптотичного інтегрування рівнянь руху ротора ГК на рухомій основі. В гіроскопії такого типу задачі розв'язують методом усереднення [1,6] шляхом зведення до регулярно збуреним рівнянням, або ці ж рівняння зводять до сингулярно збуреним й застосовують метод О. М. Тихонова [8]. Для розв'язання даної задачі



застосуємо метод послідовних наближень Пікара-Пеано, бо як відомо [2, 6], рівняння складені для кожного наближення інтегруються в елементарних функціях і можуть бути використані для побудови асимптотичного розв'язку при довільних початкових умовах, при цьому досить малими параметрами будемо нехтувати.

Розглянемо рух ГК для початкових умов

$$\alpha(0) = \alpha_0; \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0; \quad \beta(0) = \beta_0; \quad \dot{\beta}(0) = \dot{\beta}_0. \quad (7)$$

Рівняння (6) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} J_e \ddot{\alpha} \cos^2 \beta + H \dot{\beta} \cos \beta &= Q_1(\alpha, \beta); \\ J_e \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} \cos \beta &= Q_2(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (9)$$

в яких праві частини рівнянь

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha, \beta) &= -J_e [(\dot{\alpha} + a) \dot{\beta} \sin 2\beta - 2\dot{\beta} c \cos^2 \beta] + \\ &+ J_e [0,5ad \sin 2\beta - (0,5(b^2 - k^2) \sin 2\alpha + bk \cos 2\alpha) \cos^2 \beta] - \\ &- Hd \cos \beta + ml [a_{0x} \cos \alpha + a_{0y} \sin \alpha] \sin \beta; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Q_2(\alpha, \beta) &= -J_e \dot{\alpha} c - 0,5J_e ((a + \dot{\alpha})^2 - c^2) \sin 2\beta - \\ &- H(a \cos \beta - c \sin \beta) + ml [(a_{0x} \sin \alpha - a_{0y} \cos \alpha) \cos \beta - \\ &- (a_{0z} + g) \sin \beta]. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут позначено:  $a = \omega \sin \varphi + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi$ ;  $b = \omega \cos \varphi + \frac{V}{R} \sin K$ ;

$$c = \omega \cos \varphi \cos \alpha + \frac{V}{R} \sin(K + \alpha); \quad d = \omega \cos \varphi \sin \alpha - \frac{V}{R} \cos(K + \alpha);$$

$$k = \frac{V}{R} \cos K.$$

Побудуємо розв'язок системи диференціальних рівнянь (9) методом послідовних наближень. Шукатимемо розв'язок системи у формі рядів

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots; \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots$$

Підставимо ряди у систему рівнянь (9), розклавши тригонометричні функції у ряд Тейлора в околиці початкових кутів  $\alpha_0$  і  $\beta_0$ , заливши члени до другого порядку мализни, тоді

$$\begin{aligned} J_e (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 + \dots) (\cos^2 \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \sin 2\beta_0 - 2\beta_1^2 \cos 2\beta_0 - \dots) + \\ + H (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots) (\cos \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_0 - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) = \\ = Q_1(\alpha, \beta); \\ J_e (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots) - H (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots) (\cos \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_0 - \\ - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) = Q_2(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (12)$$

де головний момент зовнішніх сил

$$\begin{aligned}
Q_1(\alpha, \beta) = & -J_e \left[ (a + \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots)(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots)(\sin 2\beta_0 + \right. \\
& + 2(\beta_1 + \beta_2) \cos 2\beta_0 - 4\beta_1^2 \sin 2\beta_0 - \dots) - 2c(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots) \times \\
& \times (\cos^2 \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \sin 2\beta_0 - 2\beta_1^2 \cos 2\beta_0 - \dots) \left. \right] + \\
& + J_e \left[ 0,5ad (\sin 2\beta_0 + 2(\beta_1 + \beta_2) \cos 2\beta_0 - 4\beta_1^2 \sin 2\beta_0 - \dots) - \right. \\
& - (0,5(b^2 - k^2)(\sin 2\alpha_0 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) \cos 2\alpha_0 - 4\alpha_1^2 \sin 2\alpha_0 - \dots) + \\
& + bk(\cos 2\alpha_0 - 2(\alpha_1 + \alpha_2) \sin 2\alpha_0 - 4\alpha_1^2 \cos 2\alpha_0 + \dots)) (\cos^2 \beta_0 - \\
& \times (\beta_1 + \beta_2) \sin 2\beta_0 - 2\beta_1^2 \cos 2\beta_0) \left. \right] - Hd (\cos \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \times \\
& \times \sin \beta_0 - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) + ml \left[ a_{0x} (\cos \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_0 - \right. \\
& - \alpha_1^2 \cos \alpha_0 + \dots) + a_{0y} (\sin \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_0 - \alpha_1^2 \sin \alpha_0 + \\
& + \dots) \left. \right] (\sin \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cos \beta_0 - \beta_1^2 \sin \beta_0 - \dots); \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(\alpha, \beta) = & -J_e (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots)c - 0,5J_e \left( (a + \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots)^2 - c^2 \right) \times \\
& \times (\sin 2\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cos 2\beta_0 - 2\beta_1^2 \sin 2\beta_0 - \dots) - H \left[ a (\cos \beta_0 - \right. \\
& - (\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_0 - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) - c (\sin \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cos \beta_0 - \\
& - \beta_1^2 \sin \beta_0 + \dots) \left. \right] + ml \left[ a_{0x} (\sin \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_0 - \alpha_1^2 \sin \alpha_0 + \right. \\
& + \dots) - a_{0y} (\cos \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_0 - \alpha_1^2 \cos \alpha_0 + \dots) \left. \right] (\cos \beta_0 - \\
& - (\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_0 - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) - ml (a_{0z} + g) (\sin \beta_0 + \\
& + (\beta_1 + \beta_2) \cos \beta_0 - \beta_1^2 \sin \beta_0 + \dots). \tag{14}
\end{aligned}$$

Тоді для першого наближення згідно (13) і (14) отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
J_e \ddot{\alpha}_1 \cos^2 \beta_0 + \dot{\beta}_1 \left[ H \cos \beta_0 - J_e (2c \cos^2 \beta_0 - a \sin 2\beta_0) \right] + \\
+ \alpha_1 \left[ J_e ((b^2 - k^2) \cos 2\alpha_0 + 2bk \sin 2\alpha_0) \cos^2 \beta_0 + ml \sin \beta_0 \times \right. \\
\times (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \left. \right] - \beta_1 \left[ Hd \sin \beta_0 + J_e (ad \cos 2\beta_0 + \right. \\
+ (0,5(b^2 - k^2) \sin 2\alpha_0 - bk \cos 2\alpha_0) \sin 2\beta_0) + ml \cos \beta_0 \times \\
\times (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \left. \right] = 0; \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_e \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}_1 \left[ J_e (c + a \sin 2\beta_0) - H \cos \beta_0 \right] + \beta_1 \left[ -H (a \sin \beta_0 + \right. \\
+ c \cos \beta_0) + 0,5J_e (a^2 - c^2) \cos 2\beta_0 + ml \left( (a_{x0} \sin \alpha_0 - a_{y0} \cos \alpha_0) \times \right. \\
\times \sin \beta_0 + (a_{0z} + g) \cos \beta_0) \left. \right] - \alpha_1 ml (a_{x0} \cos \alpha_0 + a_{y0} \sin \alpha_0) \cos \beta_0 = 0,
\end{aligned}$$

характеристичне рівняння системи однорідних диференціальних рівнянь (15)

$$\begin{vmatrix} J_e \lambda^2 \cos^2 \beta_0 + A_1 & \lambda (H \cos \beta_0 - B_1) - B_2 \\ \lambda (A_2 - H \cos \beta_0) - A_3 & J_e \lambda^2 + B_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

де  $A_1 = J_e \left( (b^2 - k^2) \cos 2\alpha_0 + 2bk \sin 2\alpha_0 \right) \cos^2 \beta_0 + ml \sin \beta_0 \times$   
 $\times (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0)$ ;

$$A_2 = J_e (c + a \sin 2\beta_0); \quad A_3 = ml (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \cos \beta_0;$$

$$B_1 = J_e (2c \cos^2 \beta_0 - a \sin 2\beta_0);$$

$$B_2 = Hd \sin \beta_0 + J_e (ad \cos 2\beta_0 + (0,5(b^2 - k^2) \sin 2\alpha_0 - bk \cos 2\alpha_0) \times$$

$$\times \sin 2\beta_0) + ml \cos \beta_0 (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0);$$

$$B_3 = -H (a \sin \beta_0 + c \cos \beta_0) + 0,5J_e (a^2 - c^2) \cos 2\beta_0 +$$

$$+ ml \left( (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \sin \beta_0 + (a_{0z} + g) \cos \beta_0 \right).$$

Значимо, що коефіцієнти  $A_i, B_i$  ( $i=1,2,3$ ) сталі величини, що визначаються початковими умовами, кутовою швидкістю Землі ( $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$  рад/с), радіусом Землі ( $R = 6300$  км), географічною широтою місця і швидкістю руху основи гірокомпаса. У випадку розігнаного ротора характеристичне рівняння (16) приймає вигляд

$$J_e^2 \lambda^4 \cos \beta_0 + H^2 \lambda^2 \cos \beta_0 - H^2 \lambda d \sin \beta_0 = 0. \quad (17)$$

Оскільки рівняння (16) зводиться до кубічного, дискримінант якого  $D = -J_e^2 H^4 \cos^2 \beta_0 (4H^2 \cos^4 \beta_0 + 27J_e^2 d^2 \sin^2 \beta_0) < 0$ , то характеристичне рівняння має один нульовий корінь  $\lambda_1 = 0$ ; один дійсний  $\lambda_2 = h > 0$  і два комплексно-спряжених корні  $\lambda_{3,4} = -p \pm i\omega_0$ .

Отже, розв'язок системи (15) для швидкості відхилення ротора гірокомпаса на рухомій основі у першому наближенні

$$\dot{\alpha}_1 = hC_{\alpha 1} e^{ht} + A_{\alpha 1} \omega_0 e^{-pt} \sin(\omega_0 t + \delta_{\alpha 1});$$

$$\dot{\beta}_1 = hC_{\beta 1} e^{ht} + A_{\beta 1} \omega_0 e^{-pt} \sin(\omega_0 t + \delta_{\beta 1}), \quad (18)$$

На зразок, нехай ротор гірокомпаса – однорідний сталевий циліндр радіусом  $r = 3$  см і висотою  $h = 2$  см. Маса такого ротора  $m = 0,46$  кг, вага  $mg = 4,5$  Н, момент інерції ротора ГК відносно осі симетрії  $J_O = 0,5mr^2 = 2,07 \cdot 10^{-4}$  кг·м<sup>2</sup>, а екваторіальний момент інерції

$$J_e = 0,25m \left( r^2 + \frac{h^2}{3} \right) = 1,19 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2. \quad \text{При кутовій швидкості}$$

$\omega_y = 20000$  об/хв = 2094 рад/с кінетичний момент ГК  $H = 0,433$  Нм·с.

При початкових умовах  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  і курсі  $K = 30^\circ$  на широті  $\varphi = 60^\circ$ , швидкості судна  $v = 100$  км/год = 27,8 м/с:

$$a = 7 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}; \quad b = c = 4 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}; \quad k = -d = -4 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}.$$

Якщо центр мас нашого ГК зміщений від центра карданового підвісу на величину  $l = 0,1$  мм, а прискорення основи  $a_0 = 1$  м/с<sup>2</sup>, то

$$A_1 = 4,6 \cdot 10^{-5} \sin \beta_0 (\sin \alpha_0 - \cos \alpha_0), \text{ Нм};$$

$$A_2 = 4,8 \cdot 10^{-9} - 8,3 \cdot 10^{-9} \sin 2\beta_0, \text{ Нм} \cdot \text{с};$$

$$A_3 = 4,6 \cdot 10^{-5} \cos \beta_0 (\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0) \text{ Нм};$$

$$B_1 = 9,6 \cdot 10^{-9} - 8,3 \cdot 10^{-9} \sin 2\beta_0, \text{ Нм} \cdot \text{с};$$

$$B_2 = 1,73 \cdot 10^{-6} \sin \beta_0 + 4,6 \cdot 10^{-5} (\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0) \cos \beta_0, \text{ Нм};$$

$$B_3 = \left[ (4,6 (\sin \alpha_0 - \cos \alpha_0) - 3) \sin \beta_0 + (10,8 - 1,73) \cos \beta_0 \right] \cdot 10^{-5}, \text{ Нм}.$$

Тоді характеристичне рівняння при заданих початкових умовах

$$14 \cdot 10^{-8} \lambda^4 + 1,88 \lambda^2 = 0$$

має наступні корні  $\lambda_{1,2} = 0$ ;  $\lambda_{3,4} = \pm 3640i$  ( $\omega_0 = 3640$  рад/с – циклічна частота власних (нутаційних) коливань ротора ГК, що відповідає частоті 580 Гц). Знайденим кореням відповідає загальний розв'язок по куту повороту зовнішньої рамки й кутова швидкість її відхилення

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= C_{\alpha 0} + C_{\alpha 1} t + A_{\alpha 1} \sin(3640t + \delta_{\alpha 1}); \\ \dot{\alpha}_1 &= C_{\alpha 1} + 3640 A_{\alpha 1} \cos(3640t + \delta_{\alpha 1}), \end{aligned} \quad (19)$$

після підстановки котрих у будь-яке рівняння системи (15), знаходимо кутову швидкість і кут відхилення внутрішньої рамки ГК

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= 3640 A_{\beta 1} \sin(3640t + \delta_{\beta 1}); \\ \beta_1 &= C_{\beta 0} - A_{\beta 1} \cos(3640t + \delta_{\beta 1}). \end{aligned} \quad (20)$$

Для довільних початкових умов по кутам відхилення рамок розраховуємо сталі інтегрування:  $C_{\alpha 0} = -2,75 \cdot 10^{-4} \dot{\beta}_0$ ;  $C_{\beta 0} = 2,75 \cdot 10^{-4} \dot{\alpha}_0$

$C_{\alpha 1} = 0$ ;  $A_{\alpha 1} = 2,75 \cdot 10^{-4} \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2}$  – амплітуда;  $\delta_{\alpha 1} = \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0}$  – зсув

фаз. Тоді рівності (19) і (20) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2,75 \cdot 10^{-4} \left[ \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2} \sin \left( 3640t + \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0} \right) - \dot{\beta}_0 \right]; \\ \dot{\alpha}_1 &= \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2} \cos \left( 3640t + \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0} \right); \\ \beta_1 &= 2,75 \cdot 10^{-4} \left[ \dot{\alpha}_0 - \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2} \cos \left( 3640t + \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0} \right) \right]; \\ \dot{\beta}_1 &= \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2} \sin \left( 3640t + \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

З аналізу рівнянь (21) можна зробити висновок, що якщо основа ГК рухома, то її рух не породжує відхилень рамок ротора гіроскопа.

Щоб зменшити амплітуду нутаційних коливань ГК необхідно забезпечити на початку руху якомога менші кутові швидкості рамок карданового підвісу.

Зазначимо також, що з одного боку для зменшення відхилення ГК необхідно забезпечувати якомога більшу кутову швидкість головної осі ГК, а з другого – необхідно враховувати одне з основних обмежень, пов'язаних з межами міцності матеріалу ротора внаслідок виникнення при обертанні відцентрових сил інерції. Вибрана для нашого ГК кутова швидкість зумовлює швидкість точок на обводі ротора 130 м/с (майже 470 км/год) і як наслідок ці точки відчувають «перенавантаження» близько 13400g.

Для запису система (9) у другому наближенні знову скористаємось виразами (13) і (14)

$$\begin{aligned}
 & J_e \ddot{\alpha}_2 \cos^2 \beta_0 - B_1 \dot{\beta}_2 + H \dot{\beta}_2 \cos \beta_0 + A_1 \alpha_2 + 2J_e \alpha_2 b k \sin 2\alpha_0 \times \\
 & \times \cos^2 \beta_0 - (H \sin \beta_0 + J_e a \cos 2\beta_0) d \beta_2 = \\
 & = J_e (\ddot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 - \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 - 2c \dot{\beta}_1 \beta_1 - 2ad \beta_1^2) \sin 2\beta_0 - 2a J_e \dot{\beta}_1 \beta_1 \cos 2\beta_0 + \\
 & + H \beta_1 (\dot{\beta}_1 \sin \beta_0 + d \beta_1 \cos 2\beta_0) + J_e [(b^2 - k^2)(\beta_1^2 \sin 2\alpha_0 \cos 2\beta_0 + \\
 & + \alpha_1 \beta_1 \cos 2\alpha_0 \sin 2\beta_0 + 2\alpha_1^2 \sin 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0) - 2bk(\beta_1^2 \cos 2\alpha_0 \times \\
 & \times \cos 2\beta_0 - \alpha_1 \beta_1 \sin 2\alpha_0 \sin 2\beta_0 + 2\alpha_1^2 \cos 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0)] - \\
 & - ml \beta_1 [\alpha_1 (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) + \beta_1 (a_{0x} \cos \alpha_0 - a_{0y} \sin \alpha_0)]; \\
 & J_e \ddot{\beta}_2 + (J_e c - H \cos \beta_0) \dot{\alpha}_2 + B_3 \beta_2 - ml \alpha_2 (a_{0x} \cos \alpha_0 - \\
 & - a_{0y} \sin \alpha_0) \cos \beta_0 = H \beta_1 [\beta_1 (a \cos \beta_0 - c \sin \beta_0) - \dot{\alpha}_1 \sin \beta_0] + \\
 & + J_e [(a^2 - c^2) \beta_1^2 \sin 2\beta_0 - a \dot{\alpha}_1 \beta_1 \cos 2\beta_0 - 0,5 \dot{\alpha}_1^2 \sin 2\beta_0] - \\
 & - ml [(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \cos \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 (a_{0x} \cos \alpha_0 + \\
 & + a_{0y} \sin \alpha_0) \sin \beta_0 - (a_{0z} + g) \beta_1^2 \sin \beta_0].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Як видно із системи рівнянь (22), (23) друге наближення  $\dot{\alpha}_2$ ,  $\dot{\beta}_2$  визначається першим за допомогою членів, що стоять у правих частинах цих рівнянь. Зауважимо, що їхня стала складова може викликати втрату стійкості ГК. Для її знаходження виконаємо операцію усереднення, враховуючи розв'язок (21)

$$\begin{aligned}
 \langle \ddot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \rangle &= 0; \quad \langle \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \rangle = 0; \quad \langle \dot{\beta}_1 \beta_1 \rangle = 0; \quad \langle \alpha_1^2 \rangle = \frac{J_e^2}{2H^2} (3\dot{\beta}_0^2 + \dot{\alpha}_0^2); \\
 \langle \dot{\alpha}_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2); \quad \langle \alpha_1 \beta_1 \rangle = -\frac{J_e^2}{H^2} \dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0; \\
 \langle \dot{\alpha}_1 \beta_1 \rangle &= -\frac{J_e}{2H} (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2); \quad \langle \beta_1^2 \rangle = \frac{J_e^2}{2H^2} (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2).
 \end{aligned}$$

тоді матимемо

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{J_e^2} (H \cos \beta_0 - B_1) \langle \dot{\beta}_2 \rangle &= \frac{1}{2} (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) [Hd \cos 2\beta_0 - \\ &- 2J_e ad \sin 2\beta_0 + J_e ((b^2 - k^2) \sin 2\alpha_0 - 2bk \cos 2\alpha_0) \cos 2\beta_0] - \\ &+ \frac{1}{2} (3\dot{\beta}_0^2 + \dot{\alpha}_0^2) [2J_e ((b^2 - k^2) \sin 2\alpha_0 - 2bk \cos 2\alpha_0) \cos^2 \beta_0 - \\ &- ml (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \sin \beta_0] - \dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 [J_e ((b^2 - k^2) \cos 2\alpha_0 + \\ &+ 2bk \sin 2\alpha_0) \sin 2\beta_0 + ml (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \cos \beta_0]. \\ (J_e c - H \cos \beta_0) \langle \dot{\alpha}_2 \rangle &= -0,25 J_e (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \sin 2\beta_0 + \\ &+ \frac{J_e^2}{2H^2} (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) [H (a \cos \beta_0 - c \sin \beta_0) - J_e (a^2 - c^2) \times \\ &\times \sin 2\beta_0 + ml (a_{0z} + g) \sin \beta_0] + \frac{J_e}{2H} (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) (H \sin \beta_0 + \\ &+ J_e a \cos 2\beta_0) - \frac{J_e^2}{H^2} ml [(\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \times \\ &\times \cos \beta_0 - \dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \sin \beta_0], \end{aligned}$$

або після підстановки чисельних значень

$$\begin{aligned} \langle \dot{\beta}_2 \rangle &= \left[ 0,15 (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \frac{\cos 2\beta_0}{\cos \beta_0} + 4 (3\dot{\beta}_0^2 + \dot{\alpha}_0^2) (a_{0x} \cos \alpha_0 + \right. \\ &\left. + a_{0y} \sin \alpha_0) \operatorname{tg} \beta_0 - 8\dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \right] \cdot 10^{-12}; \\ \langle \dot{\alpha}_2 \rangle &= \left[ 1,38 (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \sin \beta_0 + 1,37 (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \operatorname{tg} \beta_0 - 8,7 \cdot 10^{-8} \times \right. \\ &\times (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) [3 + (43,35 + 4,6a_{0z}) \operatorname{tg} \beta_0] + 8 \cdot 10^{-8} [(\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \times \\ &\times (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) - \dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \operatorname{tg} \beta_0] \left. \right] \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

З чисельної оцінки видно, що середня швидкість відхилення зовнішньої рамки від заданого напрямку в інерціальному просторі значно перевищує швидкість відхилення внутрішньої.

Перша складова в  $\langle \dot{\alpha}_2 \rangle$  була отримана в 1955 році Магнусом [7], а – друга викликана рухом основи, яка має такий самий порядок і може як зменшувати, так і збільшувати похибку вимірювального приладу.

Однак, якщо забезпечити нульове початкове положення осі внутрішньої рамки  $\beta_0 = 0$ , то

$$\begin{aligned} \langle \dot{\beta}_2 \rangle &= \left[ 0,15 (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) - 8\dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \right] \cdot 10^{-12}; \\ \langle \dot{\alpha}_2 \rangle &= \left[ -2,6 (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) + 0,8 (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \right] \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

додаткова швидкість, викликана рухом основи ГК, досить мала.

У другому наближенні ми отримали неоднорідне диференціальне рівняння руху, значення якої визначається першим наближенням (21), тобто має сталу складову і гармоніки з частотами  $\omega_0$  і  $2\omega_0$ , а характеристичне рівняння системи рівнянь (22), (23) таке

$$\begin{vmatrix} J_e \lambda^2 \cos^2 \beta_0 + A_1 + & \lambda (H \cos \beta_0 - B_1) - \\ + 2J_e b k \sin 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0 & -d (H \sin \beta_0 + J_e a \cos 2\beta_0) \\ (J_e c - H \cos \beta_0) \lambda - & J_e \lambda^2 + B_3 \\ -ml (a_{0x} \cos \alpha_0 - a_{0y} \sin \alpha_0) \cos \beta_0 & \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

Для вибраних чисельних значень характеристичне рівняння (24)

$$14 \cdot 10^{-8} \lambda^4 + 1,88 \lambda^2 - 2 \cdot 10^{-4} \lambda + 2 \cdot 10^{-8} = 0$$

має наступні корні  $\lambda_{1,2} = \pm 677i$ ;  $\lambda_{3,4} = \pm 3600i$ . Цим корням відповідає загальний розв'язок по куту повороту зовнішньої рамки й кутова швидкість її відхилення з частотами  $\omega_1 = 677$  рад/с і  $\omega_2 = 3600$  рад/с.

**Висновок.** Таким чином, рух основи ГК не викликає помітних відхилень його внутрішньої рамки, але може призвести до втрати стійкості внаслідок наявності основних і комбінаційних резонансів. Знайдені в першому і другому наближеннях межі динамічної нестійкості у випадку рухомої основи ГК. Представлені рівняння руху ГК методом послідовних наближень Пікара-Пеано. Межі динамічної нестійкості по обом кутам знайдені методом усереднення за допомогою другої теореми Боголюбова [1, 3]. Наведено практичний приклад знаходження комбінаційних частот коливань ГК.

### Література

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник / М.А.Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Журавлев В.Ф. Прикладные методы теории колебаний/ В.Ф.Журавлев, Д.М.Климов. – М.: Наука, 1988. – 327 с.
3. Якубович В.А. Параметрический резонанс в линейных системах / В.А.Якубович, В.М.Старжинский. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
4. Кошляков В. Н. Аналитические методы в динамике твердого тела / В.Н.Кошляко. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
5. Пельпор Д.С., Матвеев В.А., Арсеньев В.Д. Динамически настраиваемые гироскопы: Теория и конструкция / Д.С.Пельпор, В.А.Матвеев, В.Д.Арсеньев. – М.: Машиностроение, 1988. – 264 с.
6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н.Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
7. Новиков Л.З. Механика динамически настраиваемых гироскопов / Л.З.Новиков, М.Ю.Шаталов. – М.: Наука, 1985. – 245 с.
8. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н.Тихонов, А.Я.Арсенин. – М.: Наука, 1986.

9. Kotera T. Notes of approximate solution of systems with parametric excitation / T.Kotera // Strojnický casopis. – 1980. – № 31. – P. 251-267.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 24.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**, д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України **Кушніром Р.М.** (м. Львів),*

## DEVIATION ROTOR GYROCOMPASS MOVABLE BASIS

**K. Levchuk<sup>1</sup>, I. Tsidylo<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*"Kyiv Polytechnic Institute"; 03056, Kyiv, Prospect Peremogy, 37;*

*e-mail: [k.levchuk@kpi.ua](mailto:k.levchuk@kpi.ua)*

<sup>2</sup>*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;*

*e-mail: [tm@nung.edu.ua](mailto:tm@nung.edu.ua)*

*There is obtained a mathematical model gyrocompass on the moving basis. Nonlinear differential equations integrated of the method successive approximations Picard-Peano. The dynamics gyrocompass investigated to the second approximation. Gyrocompass deviation from the desired position obtained averaging.*

**Keywords:** *gyrocompass, Picard-Peano method, the deviation of the gyroscope frame, the method of averaging.*



## ВПЛИВ РУХУ РІДИНИ ТА КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ОБЕРТАННЯ КОЛОНИ ДЛЯ БУРІННЯ СВЕРДЛОВИН НА ЇЇ НЕЛІНІЙНІ ЗГИННІ КОЛИВАННЯ

П. Я. Пукач<sup>\*</sup>, І. В. Кузьо

Національний університет “Львівська політехніка”;  
79013, м. Львів, л. Бандери, 12; e-mail: ppukach@i.ua

*Досліджено вплив руху рідини, яка промиває різальний інструмент колони для буріння свердловин, на її згинні коливання. Враховано кутову швидкість обертання та нелінійно пружні властивості матеріалу колони. В основу досліджень покладено поєднання методів Бубнова-Гальоркіна та Ван-дер-Поля. У сукупності наведене дозволило отримати співвідношення, які описують основні параметри динамічного процесу як у нерезонансному, так і у резонансному випадках.*

**Ключові слова:** нелінійно пружні властивості, математична модель, метод Бубнова-Гальоркіна, метод Ван дер Поля, резонанс.

**Актуальність теми та стан проблеми.** Рідини, які транспортуються трубопроводами чи використовуються у технологічних процесах (наприклад, у колонах для буріння свердловин), зумовлюють у них зміни кількісних, а у деяких випадках і якісних характеристик динамічного процесу. Йдеться, насамперед, про амплітудно-частотну характеристику та стійкість динамічного процесу. Питання впливу сталої швидкості руху одно- та двовимірних середовищ на основні характеристики та стійкість його нелінійних коливань розглядалися, наприклад, у роботах [1-4]. У випадку колон для буріння свердловин задача ускладнюється, адже колона здійснює ще й обертальний рух. Мова йде про такі установки, у яких використовується комбінований привод бура – роторний та гідравлічний. У них рідина під певним тиском рухається із значною швидкістю. Крім того, бур, взаємодіючи із породою, постійно збуджує коливання колони. З огляду на усе вказане впливає актуальність дослідження динаміки бурової колони із урахуванням руху рідини та кутової швидкості її обертання.

**Метою роботи** є розроблення методики, яка б дозволяла оцінити вплив всього комплексу чинників (зовнішніх та внутрішніх) на динамічний процес бурової колони; отримання зручних для інженерних досліджень розрахункових залежностей, які визначають вплив основних фізико – механічних, кінематичних, геометричних характеристик на основні параметри коливань.

**Постановка задачі.** Як математичну модель згинних коливань колони для буріння свердловин, яка обертається із кутовою швидкістю  $\Omega$

та вздовж якої рухається нестислива рідина зі сталою відносною лінійною швидкістю  $V$ , можна розглядати рівняння

$$L(u) = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \rho_2 V \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} - (S(x) - \rho_2 V^2) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial S(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - (\rho_1 + \rho_2) \Omega^2 u(x,t) = k_1 EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right)^3 - k_2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

У рівнянні (1)  $u(x,t)$  – поперечне відхилення перерізу колони із координатою  $x$  в довільний момент часу  $t$ ;  $\rho_1, \rho_2$  – відповідно маса одиниці довжини колони та рідини, яка в ній рухається;  $S(x)$  – осьове зусилля у довільному перерізі колони, яке створюють спеціальні вантажі для тиску на бур та сила ваги колони;  $EI$  – згинна жорсткість колони;  $k_1$  та  $k_2$  – коефіцієнти, які характеризують відповідно відхилення пружних властивостей матеріалу бурової колони від лінійного закону та силу опору. Тут сила опору приймається пропорційною відноській швидкості руху колони.

Із урахуванням того, що верхня частина колони поміщена у підшипник із нерухомою верхньою обоймою, а нижня отримує малі горизонтальні переміщення (зовнішні збурення), зумовлені взаємодією бура та породи, крайові умови можна записати у вигляді

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = 0, \\ u(l,t) = k_3 \sin(pt + \theta), \quad \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

У залежностях (2)  $k_3, p, \theta$  – сталі (відповідно амплітуда, частота та початкова фаза зовнішнього періодичного збурення).

#### **Зауваження.**

1. Вважається, що гіроскопічний момент є малим, і його у рівняннях руху не враховуємо.

2. Для бурової колони справджується гіпотеза плоских перерізів.

3. Система відліку, по відношенні до котрої фіксується прогин, зв'язана із рухомою вертикальною площиною і співпадає з площиною максимальних прогинів.

4. Нижче вважатимемо, що коефіцієнти  $k_i, i = 1, 2, 3$  є малими у порівнянні зі згинною жорсткістю.

5. Питання обґрунтування коректності деяких слабо та сильно нелінійних математичних моделей нелінійних коливальних систем були об'єктом розгляду в роботах [5-7]. Зокрема, у цих працях розроблено методику дослідження класів коректності (існування та єдиності) розв'язків змішаних задач для квазілінійних та сильно нелінійних ево-

люційних рівнянь типу коливань балки (за наявності в системі дисипативних сил) в обмежених та необмежених областях.

Таким чином, задача про дослідження згинних коливань колони для буріння свердловин звалась до побудови та дослідження розв'язку крайової задачі (1), (2).

**Методика розв'язування.** Перш за все задачу із неоднорідними крайовими умовами зведемо до більш простої – задачі з однорідними крайовими умовами [8]. Для цього у (1) проведемо заміну змінних

$$u(x, t) = v(x, t) + k_3 w(x, t). \quad (3)$$

У представленні (3) функція  $v(x, t)$  є розв'язком однорідної крайової задачі

$$\begin{aligned} & (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho_2 V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - (S(x) - \rho_2 V^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial S(x)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - (\rho_1 + \rho_2) \Omega^2 v = \\ & = k_1 EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^3 - k_2 \frac{\partial v}{\partial t} - L(w), \end{aligned} \quad (4)$$

$$v(0, t) = \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad v(l, t) = \frac{\partial^2 v(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

а функція  $w(x, t)$  є розв'язком диференціального рівняння  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$

за крайових умов

$$w(0, t) = \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad w(l, t) = k_3 \sin(pt + \theta), \quad \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Враховуючи (6), розв'язок крайової задачі знаходиться досить легко. Безпосередньо переконуємося, що

$$w(x, t) = \frac{k_3}{l} x \sin(pt + \theta). \quad (7)$$

Приймаючи до уваги (4) та отриманий розв'язок (7), для знаходження функції  $v(x, t)$  маємо неавтономне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} & (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho_2 V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - (S(x) - \rho_2 V^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial S(x)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - (\rho_1 + \rho_2) \Omega^2 v = \\ & = k_1 EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^3 - k_2 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{k_3}{l} (\rho_1 + \rho_2) (p^2 + \Omega^2) x \sin(pt + \theta) - \\ & - 2V\rho_2 \frac{k_3 p}{l} \cos(pt + \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

у якому функція  $v(x, t)$  повинна задовольняти однорідні крайові умови

(5). Легко переконатись, що система функцій  $\{X_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$  задовольняє умови

$$X_k(0) = X_k(l) = X_k'(0) = X_k'(l) = 0.$$

Це дозволяє відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна розв'язок крайової задачі (8), (5) зобразити у вигляді

$$v(x, t) = \sum_k X_k(x) T_k(t). \quad (9)$$

Для знаходження невідомих функцій  $T_k(t)$  у зображенні (9) отримуємо систему звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 T_k(t)}{dt^2} + \frac{\left(S_0 + \frac{\rho_1 g l}{2} - \rho_2 V^2\right) \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + EI \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - (\rho_1 + \rho_2) \Omega^2}{\rho_1 + \rho_2} T_k(t) = \frac{2k_3}{(\rho_1 + \rho_2) l} \times \\ = \left\{ \frac{k_1 EI}{k_3} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 T_k^3(t) - \frac{k_2 l}{k_3} \frac{dT_k(t)}{dt} + \frac{(\rho_1 + \rho_2) l}{k\pi} (p^2 + \Omega^2) \sin(pt + \theta) \right\}. \quad (10)$$

У наведеному вище співвідношенні враховано, що осьове зусилля  $S(x)$  змінюється відповідно до лінійного закону

$$S(x) = S_0 + \rho_1 g(l - x),$$

де  $S_0$  – стала складова осьового зусилля, яке створюють спеціальні вантажі розміщені у нижній частині колони для тиску бура на породу, а  $\rho_1 g(l - x)$  – зусилля у перерізі колони викликане безпосередньо її вагою.

Диференціальне рівняння (10) дозволяє безпосередньо визначити власну частоту лінійних коливань колони  $\omega$  (без урахування нелінійно пружних властивостей матеріалу колони)

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(S_0 + \frac{\rho_1 g l}{2} - \rho_2 V^2\right) \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + EI \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - (\rho_1 + \rho_2) \Omega^2}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (11)$$

Зауважимо, що у формулі (11) та нижче з метою більш компактного подання результатів індекс "k", який вказує на форму "динамічної рівноваги", опущений.

Не менш важливою проблемою експлуатації свердловин для буріння є дослідження впливу періодичних сил на нелінійні коливання колони та їх стійкість. Йдеться насамперед про уникнення резонансних явищ. Вказані задачі (проблеми) можна вирішити, в основному, на базі побудови розв'язку збуреного рівняння (10).

Як наголошувалось вище, коефіцієнти  $k_i, i = 1, 2, 3$  є малими величинами у порівнянні зі згинною жорсткістю та іншими коефіцієнтами правої частини рівняння (1). Це дозволяє для знаходження розв'язку рівняння (10) використовувати загальні підходи до побудови асимптотичних розв'язків звичайних квазілінійних рівнянь. Нижче використаємо відносно не складний, зручний для інженерних досліджень метод Ван-

дер-Поля. Відповідно до нього розв'язок незбуреного ( $k_3 \rightarrow 0$ ) рівняння, яке відповідає рівнянню (10), тобто  $T(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$  можна вважати за розв'язок збуреного (з тією лише різницею, що параметри  $a$  та  $\varphi$  будуть функціями часу). Для знаходження цих параметрів  $a$  та  $\varphi$  отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \frac{-k_3}{(\rho_1 + \rho_2)l} \left\{ \frac{k_1 EI l (k\pi)^8}{k_3 \left(\frac{l}{l}\right)^8} a^3 \cos^3 \phi + \frac{k_2 l}{k_3} a \omega \sin \phi + \frac{(\rho_1 + \rho_2)l}{k\pi} (p^2 + \Omega^2) \sin(pt + \theta) \right\} \sin \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{-k_3}{(\rho_1 + \rho_2)l} \left\{ \frac{k_1 EI l (k\pi)^8}{k_3 \left(\frac{l}{l}\right)^8} a^3 \cos^3 \phi + \frac{k_2 l}{k_3} a \omega \sin \phi + \frac{(\rho_1 + \rho_2)l}{k\pi} (p^2 + \Omega^2) \sin(pt + \theta) \right\} \sin \phi, \quad (12)$$

де  $\phi = \omega t + \varphi$

Для диференціальних рівнянь (12) будемо розглядати два випадки: *нерезонансний*  $r\omega \neq sp$  та *резонансний*  $r\omega \approx sp$ .

У *нерезонансному* випадку амплітуда та фаза динамічного процесу у першому наближенні не залежать від гармонічного збурення. Це дозволяє, не зменшуючи точності наближення, усереднити рівняння (12) по фазах власних  $\phi$  та вимушених  $\vartheta = pt + \theta$  коливань. Таким чином, у *нерезонансному* випадку динамічний процес описується залежністю

$$\frac{da}{dt} = -\frac{k_2 \omega}{(\rho_1 + \rho_2)\pi} a;$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{-\bar{k}_1 EI}{(\rho_1 + \rho_2)l} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^2 + \dots$$

Що стосується випадку *головного резонансу*, то, ввівши у (12) різницю фаз власних та вимушених коливань  $\gamma = \phi - \vartheta$ , тобто  $\phi = \gamma + \vartheta$ ,  $\vartheta = pt + \theta$ , отримаємо

$$\frac{da}{dt} = \frac{-k_3}{(\rho_1 + \rho_2)l} \left\{ \frac{k_1 EI l (k\pi)^8}{k_3 \left(\frac{l}{l}\right)^8} a^3 \cos^3(\gamma + \vartheta) + \frac{k_2 l}{k_3} a \omega \sin(\gamma + \vartheta) + \frac{(\rho_1 + \rho_2)l}{k\pi} (p^2 + \Omega^2) \sin \vartheta \right\} \times \sin(\gamma + \vartheta)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega - p - \frac{k_3}{(\rho_1 + \rho_2)al} \left\{ \frac{k_1 EI l (k\pi)^8}{k_3 \left(\frac{l}{l}\right)^8} a^3 \cos^3(\gamma + \vartheta) + \frac{k_2 l}{k_3} a \omega \sin(\gamma + \vartheta) + \frac{(\rho_1 + \rho_2)l}{k\pi} (p^2 + \Omega^2) \sin \vartheta \right\} \times \cos(\gamma + \vartheta). \quad (13)$$

Той факт, що резонансний процес значною мірою залежить від різниці фаз власних та вимушених коливань, дозволяє дещо спростити залежності (13). Дійсно, усереднення системи диференціальних рівнянь (13) по фазі вимушених коливань не змінить точності наближення. Це дозволяє вказану систему замінити наступною

$$\frac{da}{dt} = -\frac{k_2\omega}{(\rho_1 + \rho_2)\pi}a + \frac{k_3}{k\pi}(p^2 + \Omega^2)\cos\gamma;$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega - p - \frac{k_1EI}{(\rho_1 + \rho_2)}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^2 - \frac{k_3}{k\pi a}(p^2 + \Omega^2)\sin\gamma.$$

Останні рівняння визначають резонансну криву

$$-\frac{k_2\omega}{(\rho_1 + \rho_2)\pi}a + \frac{k_3}{k\pi}(p^2 + \Omega^2)\cos\gamma = 0,$$

$$\omega - p - \frac{k_1EI}{(\rho_1 + \rho_2)}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^2 - \frac{k_3}{k\pi a}(p^2 + \Omega^2)\sin\gamma = 0.$$

**Висновки.** Із отриманих результатів випливає:

а) для більших значень кутової швидкості обертання колони та швидкості руху рідини частота її власних коливань є меншою;

б) за сталої кутової швидкості обертання бурової колони  $\Omega_1$  зрив коливань проходить при швидкості поздовжнього руху рідини, яка рівна

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{S_0 + \frac{\rho_1 gl}{2} + EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - (\rho_1 + \rho_2)\Omega_1^2\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2}{\rho_2}};$$

в) за сталої швидкості руху рідини  $V_1$  вздовж труби бурової колони зрив коливань проходить при кутовій швидкості її обертання

$$\Omega_{кр} = \left(\frac{k\pi}{l}\right) \sqrt{\frac{S_0 + \frac{\rho_1 gl}{2} - \rho_2 V_1^2 + EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}{\rho_1 + \rho_2}}.$$

Отримані вище результати необхідно враховувати при технологічних процесах буріння, адже із зривом коливань тісно пов'язане таке негативне явище, як зрив стійкості (нестійкість) процесу. Одночасно отримані залежності вказують на шляхи уникнення зриву коливань: якщо технологічний процес дозволяє експлуатацію колони з кутовою швидкістю, близькою до  $\Omega_{кр}$ , то рідину слід подавати із лінійною швидкістю, відмінною (меншою) за  $V_1$ , і навпаки, якщо швидкість руху рідини у трубі рівна  $V_{кр}$ , то кутова швидкість обертання колони повинна бути меншою за  $\Omega_1$ .

### Література

1. Доценко П.Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода / П.Д.Доценко // Прикладная механика. – 1971. – Вып.3. – С. 85-91.
2. Улитин Г.М. Ударные процессы в буровых установках / Г.М.Улитин,

- Ю.В.Петтик // Вибрации в технике и технологиях. – 2000. – №1(13). – С. 70-74.
3. Сокіл М.Б. Хвильова теорія руху в дослідженні коливань гнучких елементів привода та транспортування з урахуванням їх поздовжнього руху / М.Б.Сокіл, О.І.Хитряк // Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ, 2011. – Вип.1. – С. 102-105.
  4. Chen L.Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings / L.Q.Chen // Appl. Mech. Rev. – 2005.– Vol.58.2. – P. 91-116.
  5. Пукач П.Я. Змішана задача для одного сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області / П.Я.Пукач // Прикладні проблеми мех. та матем. – 2006. – Вип.4. – С. 59-69.
  6. Пукач П.Я. Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області / П.Я.Пукач // Математичні студії. – 2007. – 27, №2. – С. 139-148.
  7. Пукач П.Я. Мішана задача в необмеженій області для рівняння типу коливань балки зі збуреним лінійним оператором / П.Я.Пукач // Математичний вісник Наук. тов. ім. Шевченка. – 2007. – № 4. – С. 149-165.
  8. Митропольский Ю.О. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.О.Митропольский, Б.И.Мосеенков. – К.: Вища школа, 1976. – 596 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 26.11.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Векериком В.І.,  
д.ф.-м.н., професором Сулимом Г.Г. (м. Львів)*

## **INFLUENCING OF MOTION OF LIQUID AND ANGULAR SPEED OF ROTATION OF COLUMN FOR BORING DRILLING HOLES ON ITS NONLINEAR BEND VIBRATIONS**

**P. Y. Pukach, I. V. Kusye**

*National University "Lviv politehnica";  
79013, Lvov, Bandera str., 12; e-mail: ppukach@i.ua*

*Influence of motion of liquid that washes the toolpiece of well-drilling column on her bend vibrations are investigate. The angulator of appeal and nonlinear resilient properties of material of column are taken into account. Combination of methods of Bubnov-Galerkin and Van der Pol is fixed in basis of researches. In totality the resulted allowed to get correlations that describe the basic parameters of dynamic process both in unresonant and in resonant cases.*

**Key words:** *nonlinear resilient properties, mathematical model, Bubnov-Galerkin method, Van der Pol method, resonance.*

УДК 539.3.01

**КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У ПЛАСТИНІ З ОТВОРОМ  
УТВОРЕНИМ ДУГАМИ ДВОХ КІЛ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ,  
ЗА ДІЇ ЧИСТОГО ЗСУВУ****О. М. Пономаренко**

*Львівський національний аграрний університет; 80381, Львівська обл.,  
Жовківський р-н, м. Дубляни, вул. Володимира Великого, 1;  
тел. +380 (32) 224-23-35; e-mail: e-mail: lnau@mail.lviv.ua*

*Стаття присвячена дослідженню впливу двох кругових отворів, які частково накладаються, на концентрацію напружень у безмежній пластині за чистого зсуву. Аналіз розвинуто на основі функцій напружень Ері в загальному плоскому напруженому стані з використанням біполярних координат.*

***Ключові слова:** біполярні координати, напружений стан, концентрація напружень.*

**Постановка проблеми.** В аграрному та транспортному машинобудуванні під час проектування машин широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які послаблюються різними вирізами. У разі завантаження таких деталей зовнішніми зусиллями поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, що зазнають дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування даної конструкції.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Значну кількість задач по дослідженню концентрації напружень поблизу отворів різної форми розв'язано М.І. Мухелішвілі [1] та його учнями і послідовниками методом функції комплексної змінної. Дослідження концентрації напружень цим же методом проведено Г.М. Савиним [2] та його учнями.

Широкий спектр досліджень концентрації напружень у біполярних координатах для ізотропних пластин провів Я.С. Уфлянд [3;4]. Надзвичайно практичні питання розподілу напружень у стрижнях і пластинах із концентраторами напружень у вигляді отворів, виточок розглянуто у роботах Р. Петерсона [5], Р.Р. Мавлютова [6], С.П. Тимошенко і Дж. Гудьєра [7].

**Постановка завдання.** Метою дослідження є розв'язання задачі про концентрацію напружень в ізотропній пластині з отвором, утворе-



ним дугами двох кіл, що перетинаються. Отримано вирази для напружень по контуру отвору і проведено їх аналіз.

Дослідження має прикладне значення при проектуванні деталей у вигляді тонких пластин із вирізами в транспортному та аграрному машинобудуванні.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо питання про концентрацію напружень у пластині, ослабленій отвором, утвореним дугами двох кіл, що перетинаються, за чистого зсуву для різних варіантів розміщення отвору (рис.1).

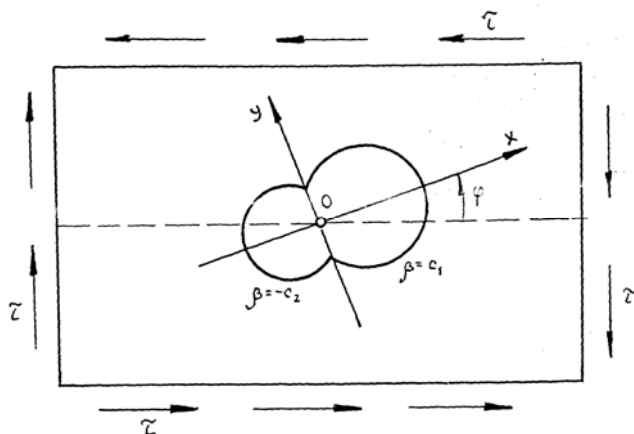


Рис.1. Розміщення отвору в полі зсуву.

При розв'язуванні приймаємо, що контур отвору вільний від зовнішніх навантажень і розмір отвору невеликий порівняно з шириною пластини.

Тоді основна функція напружень у системі координат ХОУ, що дає картину напруженого стану в пластині без отвору, має вигляд:

$$U_0(x, y) = -\tau[(x^2 - y^2) \frac{\sin 2\varphi}{2} + xy \cos 2\varphi] \quad (1)$$

або

$$U_0(x, y) = \sum_{i=1}^3 U_{0,i}(x, y), \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} U_{0,1}(x, y) &= \kappa_1 x^2, & \kappa_1 &= -\tau \frac{\sin 2\varphi}{2}, \\ U_{0,2}(x, y) &= \kappa_2 y^2, & \kappa_2 &= \tau \frac{\sin 2\varphi}{2}, \\ U_{0,3}(x, y) &= \kappa_3 xy, & \kappa_3 &= -\tau \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Використаємо біполярну систему координат:

$$x = \frac{a \sin \beta}{ch \alpha - \cos \beta}; \quad y = \frac{a sh \alpha}{ch \alpha - \cos \beta}, \quad (4)$$

і функцію напружень подамо у вигляді суми основної функції і додаткової:

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 [U_{0,i}(\alpha, \beta) + \alpha \kappa_i U_{1,i}(\alpha, \beta)], \quad (5)$$

де  $\sum_{i=1}^3 U_{1,i}(\alpha, \beta)$  – додаткова функція напружень, яку слід підібрати так, щоб напруження, що виникають від неї, знімали на контурі отвору напруження, які виникають від основної функції напружень, оскільки задача розв'язується за умови, що контур отвору вільний від зовнішніх навантажень, причому ця функція повинна зникнути на безмежності, не порушуючи тим самим основний напружений стан.

Задача зводиться до визначення функції  $\sum_{i=1}^3 U_{1,i}(\alpha, \beta)$ , що задовольняє бігармонічне рівняння

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\hat{O}) = 0, \quad (6)$$

і граничні умови на контурі отвору

$$\begin{aligned} \sigma_\beta |_{\beta=c_1} = \tau_{\alpha\beta} |_{\beta=c_1} = 0, \\ \sigma_\beta |_{\beta=-c_2} = \tau_{\alpha\beta} |_{\beta=-c_2} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

а також забезпечує вказану систему напружень на безмежності.

З урахуванням основного напруженого стану функції  $U_{1,i}(\alpha, \beta)$  шукаємо у вигляді:

$$gU_{1,i}(\alpha, \beta) = 2G_i \cos \beta + G_i (ch\alpha - \cos \beta) \ln \frac{ch\alpha - \cos \beta}{ch\alpha + \cos \beta} + \int_0^\infty f_i(\beta, m) \cos m \alpha dm, \quad (i=1,2) \quad (8)$$

$$gU_{1,3}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty f_3(m, \beta) \sin m \alpha dm, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{Причому } f_k(m, \beta) = A_k(m) ch m \beta \cos \beta + B_k(m) ch m \beta \sin \beta + \\ + C_k(m) sh m \beta \cos \beta + D_k(m) sh m \beta \sin \beta, \quad k=1,2,3. \end{aligned} \quad (10)$$

Далі з граничних умов (7) після перетворень і порівняння коефіцієнтів при відповідних значеннях синусів і косинусів отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих функцій  $A_i(m)$ ,  $B_i(m)$ ,  $C_i(m)$ ,  $D_i(m)$ .

Умова на безмежності дозволяє знайти невідомі  $G_i$ :

$$\int_0^\infty A_i(m) dm = B_i - 2G_i, \quad (i=1,2) \quad (11)$$

$$b_1 = 0, \quad d_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = 1, \quad d_2 = -\frac{1}{2}.$$

Розглянемо більш детально випадок чистого зсуву пластини з отвором, контур якого обмежений дугами двох кіл однакового радіусу:  $\beta = c$ ,  $\beta = -c$ , причому  $C < \pi/2$  (рис.2).

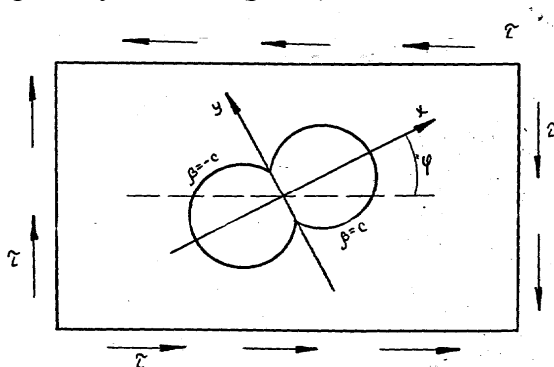


Рис.2. Випадок симетричного отвору.

В цьому випадку для значень  $i = 1, 2$  отримуємо:

$$A_i(m)chmc \cos c + D_i(m)shmc \sin c =$$

$$= \frac{1}{(m^2 + 1)shm\pi} [2d_i(m^2 + 1) \sin csh(\pi - c) + 4G_i mchmc \cos c -$$

$$- 4G_i shm(\frac{\pi}{2} - c)(ch \frac{m\pi}{2} \sin c + \frac{1}{m} sh \frac{m\pi}{2} \cos c)], \quad (12)$$

$$A_i(m)[mshmc \cos c - chmc \sin c] + D_i(m)[mchmc \sin c + shmc \cos c] =$$

$$= \frac{1}{mshm\pi} \{2d_i m [\cos csh(\pi - c) - m \sin cch(\pi - c)] -$$

$$- 4G_i [\sin csh(\frac{\pi}{2} - c) + m \cos cshmc]\}, \quad (13)$$

а для  $i=3$  маємо:

$$B_3(m)[m \sin 2c - sh2mc] = \frac{2}{shm\pi} [m \sin c \cos cchm\pi - chm(\pi - c)shmc], \quad (14)$$

$$C_3(m)[m \sin 2c - sh2mc] = 2m \sin^2 c, \quad (15)$$

$$A_3(m) = D_3(m) = 0. \quad (16)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (12-16), отримуємо після перетворень значення функцій  $A_1(m)$ ,  $D_1(m)$ ,  $A_2(m)$ ,  $D_2(m)$ ,  $B_3(m)$ ,  $C_3(m)$ :

$$A_1(m) = -2 \frac{m \sin^2 c}{\Delta} - 4G_1 \frac{1}{m(m^2 + 1)} \left( \frac{1}{2} cth \frac{m\pi}{2} - \frac{m^2 + 1}{shm\pi} - \right.$$

$$\left. - \frac{sh^2 mc - m^2 \sin^2 c}{\Delta} \right), \quad (17)$$

$$D_1(m) = cthmc - 2 \frac{ch^2 mc}{\Delta} + 4G_1 \frac{1}{m^2 + 1} \left( \frac{1}{2} cth \frac{m\pi}{2} - \frac{sh^2 mc + m^2 \sin^2 c}{\Delta} \right), \quad (18)$$

$$A_2(m) = 2 \frac{m \sin^2 c}{\Delta} - 4G_2 \frac{1}{m(m^2 + 1)} \left( \frac{1}{2} cth \frac{m\pi}{2} - \frac{m^2 + 1}{shm\pi} - \frac{sh^2 mc - m^2 \sin^2 c}{\Delta} \right), \quad (19)$$

$$D_2(m) = -cthm\pi + \frac{2}{\Delta} ch^2 mc + \frac{4G_2}{m^2 + 1} \left( \frac{1}{2} cth \frac{m\pi}{2} - \frac{sh^2 mc + m^2 \sin^2 c}{\Delta} \right), \quad (20)$$

$$\Delta = sh2mc + m \sin 2c,$$

$$B_3(m) = \frac{2}{shm\pi(m \sin 2c - shmc)} [m \sin c \cos c chm\pi - chm(\pi - c)shmc], \quad (21)$$

$$C_3(m) = \frac{2m \sin^2 c}{m \sin 2c - sh2mc}. \quad (22)$$

3 умови на безмежності (11) визначаємо сталі  $G_1$ ,  $G_2$ , які після перетворень мають вигляд:

$$G_1 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 c \int_0^\infty \frac{mdm}{sh2mc + m \sin 2c}}{\int_0^\infty \frac{sh^2 mc - m^2 \sin^2 c}{m(m^2 + 1)(sh2mc + m \sin 2c)} dm}, \quad (23)$$

$$G_2 = \frac{1}{4} \frac{1 - \sin^2 c \int_0^\infty \frac{mdm}{sh2mc + m \sin 2c}}{\int_0^\infty \frac{sh^2 mc - m^2 \sin^2 c}{m(m^2 + 1)(sh2mc + m \sin 2c)} dm}. \quad (24)$$

Для напружень на контурі отвору отримуємо такі значення:

$$\sigma_\alpha |_{\beta=c} = \sigma_{\alpha,1} + \sigma_{\alpha,2} + \sigma_{\alpha,3}, \quad (25)$$

$$\text{де } \sigma_{\alpha,1} = 8k_1 (ch\alpha - \cos c) \sin c \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \left[ G_1 + \frac{1}{2} shmc(m^2 - mctgccthm c) \cos m\alpha dm \right], \quad (26)$$

$$\sigma_{\alpha,2} = 8k_2 (ch\alpha - \cos c) \sin c \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \left[ G_2 - \frac{1}{2} shmc(m^2 - mctgccthm c) \cos m\alpha dm \right], \quad (27)$$

$$\sigma_{\alpha,3} = 8k_3 (ch\alpha - \cos c) \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} (mshmc \cos c - m^2 chmc \sin c) \sin m\alpha dm. \quad (28)$$

У випадку  $\varphi = 0$  для напружень на контурі отвору маємо:

$$\sigma_{\alpha} |_{\beta=c} = 8\tau(chc - \cos c) \int_0^{\infty} m \frac{\cos cshmc - m \sin cchmc}{sh2mc - m \sin 2c} \sin m\alpha dm. \quad (29)$$

При  $c = \pi/2$  маємо круговий отвір. Виразимо  $\alpha$  через полярний кут  $\theta$ . Використовуючи співвідношення (4) між біполярними  $\alpha, \beta$  і прямокутними  $x, y$  координатами у разі  $\beta = c = \pi/2$ ,  $R = a$ , маємо (рис.3):

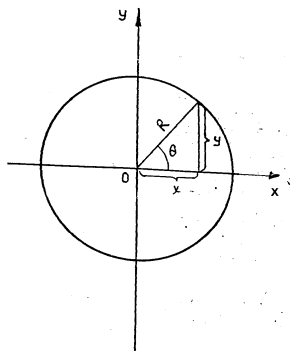


Рис. 3. Перехід до полярних координат

$$\cos \theta = \frac{x}{R} = \frac{1}{ch\alpha}; \quad (30)$$

$$\sin \theta = \frac{y}{R} = \frac{sh\alpha}{ch\alpha} = th\alpha. \quad (31)$$

Тоді після інтегрування формули (29) отримаємо відомий результат у полярних координатах [2]:

$$\sigma_{\theta} = -4\tau \sin 2\theta. \quad (32)$$

У таблиці подано значення напружень  $\sigma_{\alpha}$  у верхній частині отвору  $\beta = \pi/3$  при  $\varphi = 0^{\circ}$

Таблиця. Значення напружень  $\sigma_{\alpha}$  у верхній частині отвору  $\beta = \pi/3$  при  $\varphi = 0^{\circ}$

$\alpha$	6,36	2,38	1,57	1,05	0,66	0,34	0
$\sigma_{\alpha} / \tau$	-3,46	-2,67	-1,01	1,43	3,66	3,83	0

Дані таблиці свідчать про те, що максимальне значення напруження  $\sigma_{\alpha} / \tau$  досягається при  $\alpha = 0,34$  і рівне 3,83.

**Висновки.** Отримано розв'язок задачі про концентрацію напружень у пластині з отвором, контур якого утворений дугами двох кіл, що перетинаються, при зсуві. Подано вирази для напружень по контуру отвору і проведено їх аналіз.

*Література*

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1996. – 707 с.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н.Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С.Уфлянд. – Л. : Наука, 1968. – 402 с.
4. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости / Я.С.Уфлянд. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 232 с.
5. Петерсон Р. Коэффициенты концентраций напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность / Р.Петерсон [пер. з англ.]. – М.: Мир, 1977. – 302 с.
6. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций / Р.Р.Мавлютов. – М.: Наука, 1981. – 140 с.
7. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П.Тимошенко, Дж.Гудьер. – М.: Наука, 1989. – 560 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 26.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Векериком В.І.,  
д.ф.-м.н., професором Сулимом Г.Т. (м. Львів)*

**INFLUENCE TWO CIRCULAR HOLES WICH COVER  
AGAIN ON CONCENTRATION OF STRESSES  
IN INFINITE PLATE BY DISPLACEMENT**

**O. M. Ponomarenko**

*Lviv national agrarian university; 80381, Lviv region, Zovkva district,  
t. Dybljany, V. Velykogo str., 1; tel./fax +380 (32) 224-23-35;  
e-mail: lnau@mail.lviv.ua*

*The paper is devoted to the investigation influence two circular holes wich cover again on concentration of stresses in infinite plate by displacement. The analysis is developed on the basis of the Airy`s stresses function in generalized plane stresses and by applying bipolar coordinates.*

**Key words:** *bipolar coordinates, strainstate, concentration of stresses.*

## ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ ТІЛА

І. В. Цідило<sup>1</sup>, К. Г. Левчук<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
e-mail: [tm@nung.edu.ua](mailto:tm@nung.edu.ua)

<sup>2</sup>Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»; 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37;  
e-mail: [k.levchuk@kpi.ua](mailto:k.levchuk@kpi.ua)

Показано, що плоскопаралельний рух твердих тіл має досить цікаві особливості та властивості. Автори розглянули деякі нестандартні методи дослідження динаміки такого руху, які дозволяють замінити розв'язування диференціальних рівнянь руху рівнянням головного моменту відносно центрів коливань миттєвих центрів швидкостей й пришвидшень.

**Ключові слова:** плоскопаралельний рух, миттєвий центр швидкостей, миттєвий центр пришвидшень, центр коливань, сила тертя, кочення без проковзування, динамічна реакція.

**Вступ.** Зазвичай, при дослідженні динаміки плоскопаралельного руху твердого тіла складають три диференціальні рівняння. Ці рівняння доповнюють кінематичними залежностями, що пов'язують між собою швидкості й пришвидшення точок з кутовими швидкістю й пришвидшенням тіла [1, 2]. І, як наслідок, для визначення умов руху, статичних та динамічних реакцій доводиться розв'язувати систему зв'язаних диференціальних рівнянь. А у випадку дослідження руху механічної системи з колесами, що здійснюють плоскопаралельний рух, постійно виникає питання про характер сили тертя зчеплення колеса з дорогою – рушійною вона є, чи гальмівною [5].

Але, якщо скористатися цікавими властивостями та деякими особливостями такого руху, можна значно спростити розв'язування і дослідження динаміки тіла, а також за характером зовнішніх сил однозначно визначити напрям сил тертя зчеплення.

**Центр коливань миттєвого центра швидкостей.** Будь-який рух твердого тіла можна повністю охарактеризувати двома динамічними величинами: головним вектором кількістю руху тіла  $\vec{q} = m\vec{v}_C$  і кінетичним моментом  $\vec{K}_C = J_C\vec{\omega}$ , зведеними до центра мас  $C$ . У випадку плоскопаралельного руху зазначені два вектора взаємноперпендикулярні (рис.1,а).

Відомо, що система перпендикулярних векторів зводиться до рівнодійної кількості руху  $\vec{q}^*$  [1], що дорівнює головному вектору кількості руху тіла  $\vec{q}$ , але прикладеної у новому центрі зведення  $P^*$ , що знаходиться на перпендикулярі до  $\vec{q}$ , отриманого його поворотом на кут  $90^\circ$  в бік, протилежний повороту кінетичного моменту  $\vec{K}_C$ , на відстані

$$CP^* = \frac{K_C}{q} = \frac{J_C \omega}{mv_C} = \frac{mi_C^2 \cdot \omega}{m \cdot \omega \cdot PC} = \frac{i_C^2}{PC}, \quad (1)$$

де  $P$  – миттєвий центр швидкостей (МЦШ), що лежить на перпендикулярі до швидкостей (рис.1,б).

Таким чином, точки  $P$ ,  $C$  і  $P^*$  лежать на одній прямій, а  $P^*$  – точка прикладання головного вектора кількості руху є центром коливань.

Отриманою властивістю зручно досліджувати рух тіл, у яких легко визначається положення МЦШ. Продемонструємо поняттям центра коливань МЦШ на прикладах.

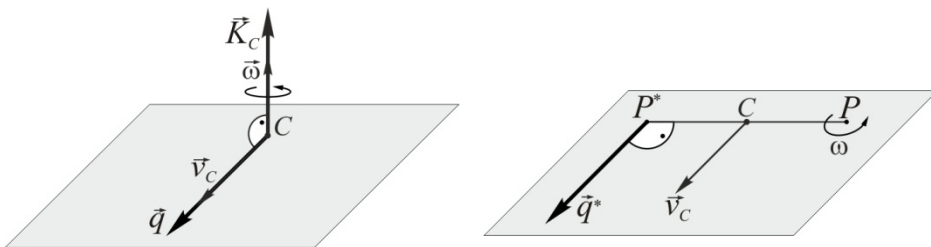


Рис.1. Центр коливань миттєвого центра швидкостей

*Приклад 1.* Колеса (диск, обруч, кільце) котяться по шорсткій похилій площині. З'ясуємо умови кочення коліс без проковзування (рис.2).

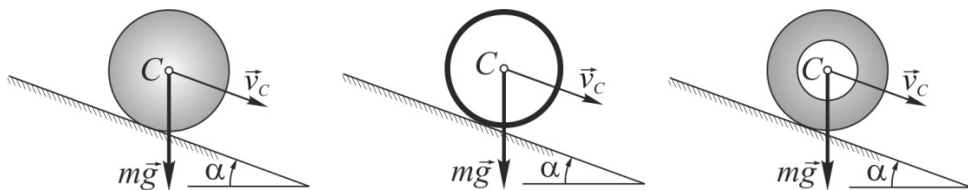


Рис.2. Колесо котиться по шорсткій площині

Оскільки колеса не проковзують, то МЦШ  $P$  знаходиться у кожний момент часу в точці контакту колеса з нерухомою площиною (рис.3). З урахуванням моменту інерції коліс отримаємо їхні радіуси інерції:



- 1) для диска –  $J_{1C} = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow i_{1C}^2 = \frac{1}{2}mR^2$  ;
- 2) для обруча –  $J_{2C} = mR^2 \Rightarrow i_{2C}^2 = R^2$  ;
- 3) для кільця –  $J_{3C} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2) \Rightarrow i_{3C}^2 = \frac{1}{2}(R^2 + r^2)$  .

Отже, згідно (1) центр коливань колеса знаходиться вище центра мас  $C$  на відстані (рис.3):

- 1) для диска –  $CP_1^* = \frac{1}{2}R$  ;
- 2) для обруча –  $CP_2^* = R$  ;
- 3) для кільця –  $CP_3^* = \frac{R^2 + r^2}{2R}$  ,

і сила тертя зчеплення з площиною спрямована протилежно руху – гальмівна.

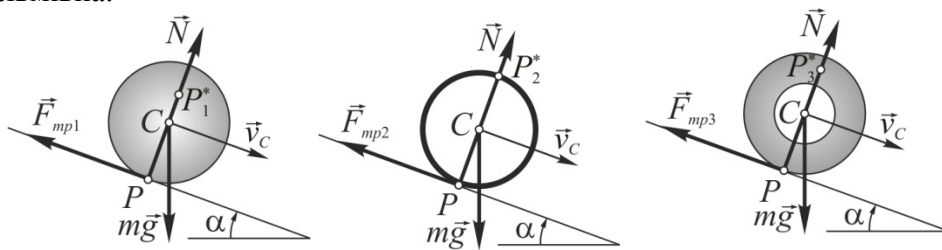


Рис.3. Центр коливань колеса, що котиться шорсткою площиною

З рівняння моментів відносно центра коливань МЦШ визначимо силу тертя зчеплення з площиною

- 1) для диска –

$$\sum_{i=1}^n M_{P_1^*} = mg \sin \alpha \cdot \frac{1}{2}R - F_{mp1} \cdot \frac{3}{2}R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{mp1} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha ;$$

- 2) для обруча –

$$\sum_{i=1}^n M_{P_2^*} = mg \sin \alpha \cdot R - F_{mp2} \cdot 2R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{mp2} = \frac{1}{2}mg \sin \alpha ;$$

- 3) для кільця –

$$\sum_{i=1}^n M_{P_3^*} = mg \sin \alpha \cdot \frac{R^2 + r^2}{2R} - F_{mp3} \cdot \left( R + \frac{R^2 + r^2}{2R} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_{mp3} = \frac{R^2 + r^2}{3R^2 + r^2} mg \sin \alpha .$$

Щоб колесо котилось без проковзування, сила тертя повинна задовольняти умові

$$F_{mp} \leq fN, \quad N = mg \cos \alpha, \quad (2)$$

або для диска  $f \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$ ; для обруча  $f \geq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$ ; для кільця  $f \geq \frac{R^2 + r^2}{3R^2 + r^2} \operatorname{tg} \alpha$ . Тобто при коченні вздовж однієї площини диск ковзає найменше.

*Приклад 2.* Маса обода однорідного колеса  $m_0$ , а кожної з 12 спиць  $m$ . Колесо котиться вздовж гладенької поверхні, нахиленої під кутом  $\alpha$  до горизонту, розмотуючи, намотану на нього мотузку. Визначити натяг нитки та пришвидшення центра  $C$  колеса (рис.4,а).

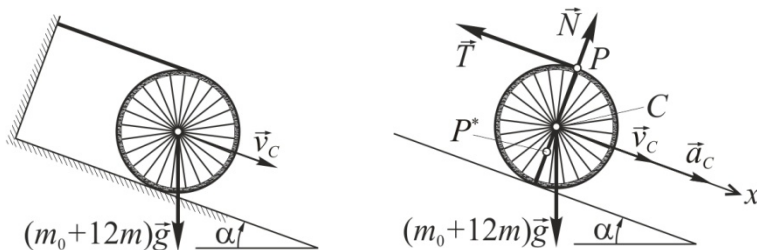


Рис.4. Колесо котиться по гладенькій поверхні, розмотуючи нитку

Оскільки вільний кінець мотузки залишається нерухомим, то МЦШ  $P$  у кожний момент часу буде знаходитись у місці сходження мотузки з колеса (рис. 4, б). З урахуванням моменту інерції колеса, отримаємо його радіус інерції

$$J_C = m_0 R^2 + 12 \cdot \frac{1}{12} m (2R)^2 = (m_0 + 4m) R^2 \Rightarrow i_C^2 = \frac{m_0 + 4m}{m_0 + 12m} R^2.$$

Тоді, згідно з (1) центр коливань колеса  $P^*$  знаходиться нижче центра мас  $C$  на відстані (рис.4,б):

$$CP^* = \frac{m_0 + 4m}{m_0 + 12m} R.$$

З рівняння моментів відносно центра коливань МЦШ визначимо натяг мотузки

$$\sum_{i=1}^n M_{P^*} = -(m_0 + 12m) g \sin \alpha \cdot \frac{m_0 + 4m}{m_0 + 12m} R + T \cdot \left( \frac{m_0 + 4m}{m_0 + 12m} + 1 \right) R = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{m_0 + 4m}{2(m_0 + 8m)} (m_0 + 12m) g \sin \alpha;$$

Оскільки центр мас колеса  $C$  рухається прямолінійно, то вектор пришвидшення  $\vec{a}_C$  паралельний поверхні. З теореми про рух центра мас в проекції на вісь  $Cx$ , паралельну поверхні (рис. 4, б)

$$(m_0 + 12m) a_C = (m_0 + 12m) g \sin \alpha - T,$$

отримуємо пришвидшення центра колеса

$$a_C = g \sin \alpha - \frac{m_0 + 4m}{2(m_0 + 8m)} g \sin \alpha = \frac{m_0 + 12m}{2(m_0 + 8m)} g \sin \alpha.$$

*Приклад 3.* Два однорідних циліндричних вала масами  $m_1$  і  $m_2$  скочуються по двох площинах, нахилених під кутами  $\alpha$  і  $\beta$  до горизонту відповідно. Вали з'єднано нерозтяжною невагомою мотузкою, кінці котрої намотані на вали і закріплені на них. Визначити натяг мотузки та її пришвидшення (рис.5) [3].

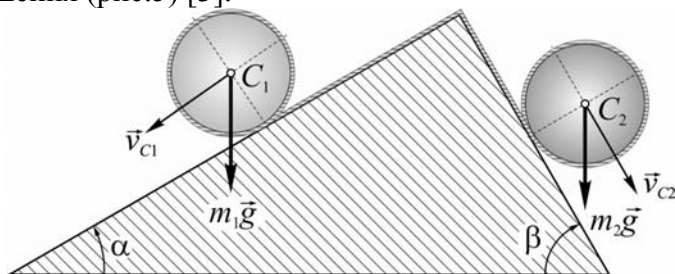


Рис.5. Вали, з'єднані ниткою

Якщо припустити, що мотузка спускається по лівій площині, тоді вона піднімається по правій. Зупинимо її, скориставшись принципом Д'Аламбера, а саме, прикладемо у місцях сходу мотузки з валів сили інерції  $\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}$  і  $\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{a}$ , спрямованих протилежно руху мотузки (рис. 6). Тепер мотузка нерухома, тому МЦШ  $P_1$  і  $P_2$  у кожний момент часу будуть знаходитись у місцях сходу мотузки з валів (рис.6).

З урахуванням моментів інерції валів отримаємо їхні радіуси інерції

$$J_{C_1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2; \quad J_{C_2} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \quad \Rightarrow \quad i_{C_1}^2 = \frac{1}{2} R_1^2; \quad i_{C_2}^2 = \frac{1}{2} R_2^2.$$

Тоді, згідно з (1) центри коливань валів  $P_1^*$  і  $P_2^*$  знаходяться вище центрів мас  $C_1$  і  $C_2$  на відстанях (рис. 6):

$$C_1 P_1^* = \frac{1}{2} R_1; \quad C_2 P_2^* = \frac{1}{2} R_2.$$

З рівнянь моментів відносно центрів коливань МЦШ визначимо натяг мотузки і її пришвидшення

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n M_{P_1^*} = -m_1 g \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} R_1 + (T + m_1 a) \cdot \frac{3}{2} R_1 = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{P_2^*} = m_2 g \sin \beta \cdot \frac{1}{2} R_2 + (-T + m_2 a) \cdot \frac{3}{2} R_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{3(m_1 + m_2)} g (\sin \beta + \sin \alpha); \quad a = \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{3(m_1 + m_2)} g.$$

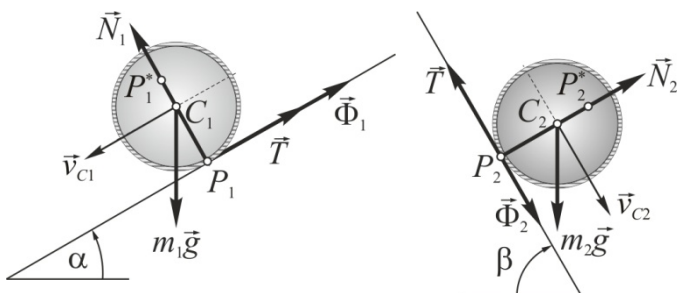


Рис.6. Вали з МЦШ і центрами коливань МЦШ

**Центр коливань миттєвого центра пришвидшень.** Для здійснення плоскопаралельного руху твердого тіла необхідно, щоб головний вектор зовнішніх сил  $\vec{F} = m\vec{a}_C$  лежав у площині руху, а головний момент  $\vec{M}_C = J_C\vec{\varepsilon}$  був спрямований перпендикулярно до неї (рис.7).

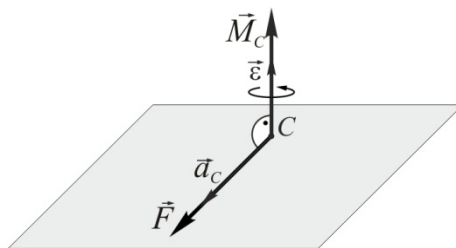


Рис.7. Головний вектор і головний момент у випадку плоскопаралельного руху твердого тіла

Відомо, що система перпендикулярних векторів зводиться до рівнодійної  $\vec{F}^*$  [1], що дорівнює головному вектору зовнішніх сил  $\vec{F}$ , але прикладеної у новому центрі зведення  $O$  (рис. 8, а), що знаходиться на перпендикулярі до  $\vec{F}$ , отриманого його поворотом на кут  $90^\circ$  в бік, протилежний повороту головного моменту  $\vec{M}_C$ , на відстані

$$CO = \frac{M_C}{F} = \frac{J_C\varepsilon}{ma_C} = \frac{mi_C^2 \cdot \varepsilon}{m \cdot CQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{i_C^2 \cdot \varepsilon}{CQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}, \quad (3)$$

де  $Q$  – миттєвий центр пришвидшень (МЦП) (рис. 8, б), що лежить на однаковому куті  $\alpha$  до пришвидшень і задовольняє умову

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}. \quad (4)$$

Оскільки вектор сили є ковзним вектором, перенесемо точку  $O$  прикладання рівнодійної  $\vec{F}^*$  на пряму, що проходить через центр мас  $C$  і МЦП  $Q$ , в точку  $Q^*$ . Тоді з урахуванням (3) і (4) відстань

$$CQ^* = \frac{CO}{\sin \alpha} = \frac{i_C^2 \cdot \varepsilon}{CQ \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{i_C^2}{CQ}. \quad (5)$$

Таким чином, точки  $Q$ ,  $C$  і  $Q^*$  лежать на одній прямій, а  $Q^*$  – точка прикладання рівнодійної  $\vec{F}^*$  є центром коливань.

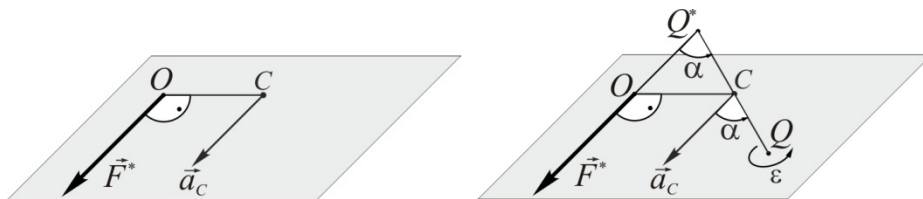


Рис.8. Центр коливань миттєвого центра пришвидшень

Отриманою властивістю зручно досліджувати рух тіл, у яких легко визначається положення МЦП, особливо при миттєвій зміні умов руху, визначенні динамічних реакцій, або, коли швидкості всіх точок дорівнюють нулю й миттєво-поступальному русі. Продемонструємо поняттям центра коливань МЦП на прикладах.

*Приклад 4.* Два однорідних стержні зварені між собою під прямим кутом. Довжина вертикального стержня вдвічі коротша від довжини горизонтального. Кінець горизонтального стержня  $A$  поклали на гладеньку опору і відпустили без початкової швидкості. Визначити тиск кінця  $A$  на опору в початковий момент, якщо загальна маса стержнів  $m$  (рис.9,а).

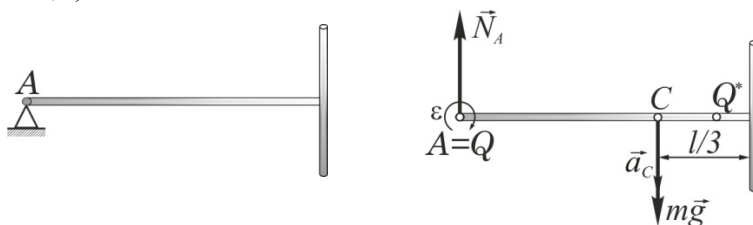


Рис.9. Зварені стержні, відпущені зі стану рівноваги

Спочатку визначимо положення центра мас  $C$  конструкції з двох стержнів (рис.9,б)

$$AC = \frac{\frac{2}{3}m \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{3}m \cdot l}{m} = \frac{2}{3}l.$$

Далі знайдемо положення МЦП  $Q$ . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і, як наслідок, миттєва кутова швидкість конструкції  $\omega^* = 0$ . Тоді МЦП  $Q$  лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець  $A$  конструкції покладено на

гладеньку опору, тобто може рухатись вздовж горизонталі, тому пришвидшення  $\vec{a}_A$  спрямоване горизонтально. Зовнішні сили: вага конструкції  $m\vec{g}$  і реакція  $\vec{N}_A$  вертикальні, тому головний вектор спрямований вздовж вертикалі. Отже, за теоремою про центр мас системи пришвидшення  $\vec{a}_C$  теж спрямоване по вертикалі. Таким чином, МЦП  $Q$  у даний момент часу збігається з точкою  $A$  (рис.9,б).

З урахуванням моменту інерції обох стержнів отримуємо радіус інерції конструкції

$$J_C = \frac{2}{3}ml^2 \cdot \left[ \frac{1}{12} + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{3}ml^2 \cdot \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right] = \frac{17}{144}ml^2; \Rightarrow$$

$$i_C^2 = \frac{17}{144}l^2.$$

Тоді, згідно (5) центр коливань конструкції  $Q^*$  знаходяться праворуч центра мас  $C$  на відстані (рис.9,б):

$$CQ^* = \frac{17}{144}l^2 \cdot \frac{3}{2l} = \frac{17}{96}l.$$

З рівнянь моментів відносно центра коливань МЦП визначимо реакцію гладенької опори

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \cdot \frac{17}{96}l - N_A \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{17}{96} \right)l = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = \frac{17}{65}mg.$$

За третім законом Ньютона тиск конструкції на опору дорівнює її реакції, тільки спрямований у протилежний бік.

*Приклад 5.* Однорідний стержень  $AB$  масою  $m$  підвішено до стелі на двох однакових нерозтяжних вертикальних шнурах, прикріплених до кінців стержня. Визначити натяг шнура в точці  $A$  та пришвидшення центра мас  $C$  в момент обриву іншого шнура в точці  $B$  (рис.10,а) [3].

Знайдемо положення МЦП  $Q$ . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і як наслідок, миттєва кутова швидкість конструкції  $\omega^* = 0$ . Тоді МЦП  $Q$  лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець  $A$  стержня підвішено за допомогою нерозтяжного шнура, тобто може рухатись по колу і точка  $A$  має лише обертальне пришвидшення  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{об}$ , спрямоване перпендикулярно до шнура – горизонтально. Зовнішні сили: вага стержня  $m\vec{g}$  і натяг шнура  $\vec{T}_A$  вертикальні, тому головний вектор спрямований вздовж вертикалі. Отже, за теоремою про центр мас системи пришвидшення  $\vec{a}_C$  теж спрямоване по вертикалі. Таким чином, МЦП  $Q$  у даний момент часу збігається з точкою  $A$  (рис.10,б).

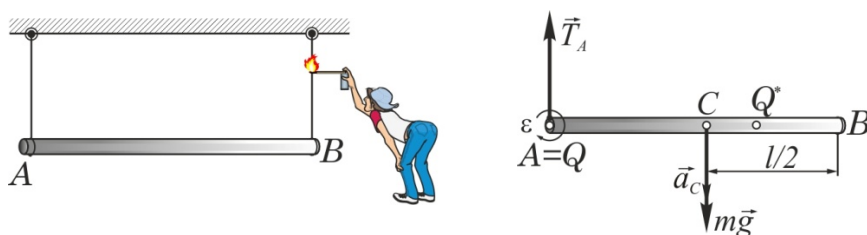


Рис.10. Стержень, підвішений двома вертикальними шнурами

З урахуванням моменту інерції стержня отримаємо його радіус інерції

$$J_C = \frac{1}{12}ml^2; \Rightarrow i_C^2 = \frac{1}{12}l^2.$$

Тоді, згідно (5) центр коливань стержня  $Q^*$  знаходяться праворуч від центра мас  $C$  на відстані (рис.10,б):

$$CQ^* = \frac{1}{12}l^2 \cdot \frac{2}{l} = \frac{1}{6}l.$$

З рівнянь моментів відносно центра коливань МЦП визначимо натяг шнура

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \cdot \frac{1}{6}l - T_A \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)l = 0 \Rightarrow T_A = \frac{1}{4}mg.$$

За теоремою про центр мас у проекції на вертикаль знаходимо пришвидшення центра мас  $C$

$$ma_C = mg - T_A \Rightarrow a_C = \frac{3}{4}mg.$$

*Приклад 6.* Однорідний стержень  $AB$  масою  $m$  підвішено до стелі на двох нерозтяжних шнурах, однаковими з ним довжинами. Шнури прикріплено до кінців стержня. Визначити натяг шнура в точці  $A$  та пришвидшення центра мас  $C$  в момент обриву іншого шнура в точці  $B$  (рис.11,а) [3].

Знайдемо положення МЦП  $Q$ . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і, як наслідок, миттєва кутова швидкість конструкції  $\omega^* = 0$ . Тоді МЦП  $Q$  лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець  $A$  стержня підвішено за допомогою нерозтяжного шнура, тобто може рухатись по колу і точка  $A$  має лише обертальне пришвидшення  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{o\vec{o}}$ , спрямоване перпендикулярно до шнура (рис.11,б). Напрямок головного вектора наперед невідомий, тому скористаємось аксіомою про паралелограм сил: розкладемо силу ваги стержня  $\vec{G} = m\vec{g}$  на дві складові  $\vec{G}_1$  ( $G_1 = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$ ), паралельну натягу

шнура  $\vec{T}_A$ , і  $\vec{G}_2$  ( $G_2 = mg \frac{1}{2}$ ), перпендикулярну до шнура. Згідно теореми про центр мас точка  $C$  буде мати дві складові пришвидшення

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C1} + \vec{a}_{C2}.$$

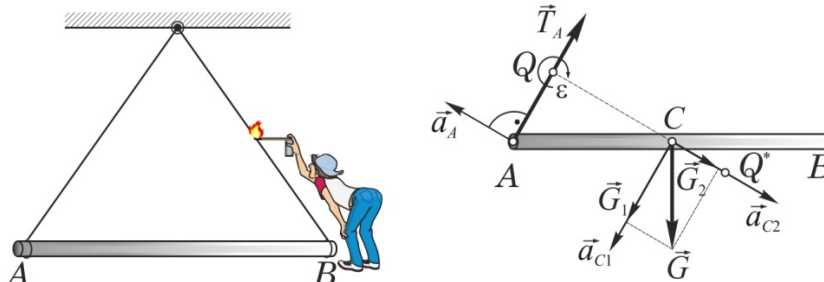


Рис.11. Стержень, підвішений двома шнурами, що мають однакові з ним довжини

Знайдемо положення МЦП  $Q$ . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і, як наслідок, миттєва кутова швидкість конструкції  $\omega^* = 0$ . Тоді МЦП  $Q$  лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець  $A$  стержня підвішено за допомогою нерозтяжного шнура, тобто може рухатись по колу і точка  $A$  має лише обертальне пришвидшення  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{об}$ , спрямоване перпендикулярно до шнура (рис.11,б). Напрямок головного вектора наперед невідомий, тому скористаємось аксіомою про паралелограм сил: розкладемо силу ваги стержня  $\vec{G} = m\vec{g}$  на дві складові  $\vec{G}_1$  ( $G_1 = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$ ), паралельну натягу шнура  $\vec{T}_A$ , і  $\vec{G}_2$  ( $G_2 = mg \frac{1}{2}$ ), перпендикулярну до шнура. Згідно теореми про центр мас точка  $C$  буде мати дві складові пришвидшення

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C1} + \vec{a}_{C2}.$$

Пришвидшення  $\vec{a}_{C1}$  викликане головним вектором зовнішніх сил  $\vec{F}_1 = \vec{G}_1 + \vec{T}_A$

$$a_{C1} = \frac{G_1 - T_A}{m} \tag{6}$$

і спрямоване паралельно шнуру (рис. 11, б). Таким чином, МЦП  $Q$  у даний момент часу знаходиться на шнуру у точці перетину перпендикулярів до  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_{C1}$  (рис.11,б).

З урахуванням моменту інерції стержня отримаємо його радіус інерції

$$J_C = \frac{1}{12}ml^2; \Rightarrow i_C^2 = \frac{1}{12}l^2.$$



Тоді згідно (5) центр коливань стержня  $Q^*$  знаходяться нижче центра мас  $C$  на прямій  $CQ$  на відстані (рис. 11, б):

$$CQ^* = \frac{1}{12}l^2 \cdot \frac{4}{l\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}l.$$

З рівнянь моментів відносно центра коливань МЦП визначимо натяг шнура

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}l - T_A \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right)l = 0 \Rightarrow T_A = \frac{2\sqrt{3}}{13}mg. \quad (7)$$

Пришвидшення  $\vec{a}_{C2}$  викликане силою  $\vec{G}_2$

$$a_{C2} = \frac{G_2}{m} = \frac{1}{2}g \quad (8)$$

і спрямоване перпендикулярно до  $\vec{a}_{C1}$  (рис. 11, б). З урахуванням виразів (6)-(8) знаходимо пришвидшення центра мас  $C$

$$a_{C1} = \frac{G_1 - T_A}{m} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{13} \right)g = \frac{9\sqrt{3}}{26}g \Rightarrow$$

$$a_C = \frac{g}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{9\sqrt{3}}{13} \right)^2} = \frac{\sqrt{103}}{13}g$$

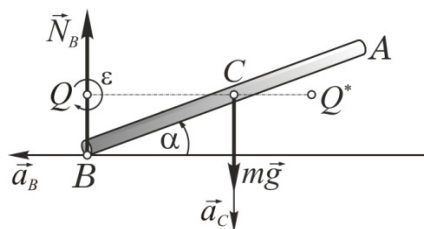
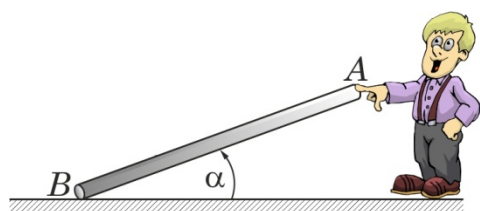


Рис.12. Стержень, нахилений до гладенької підлоги

*Приклад 7.* Однорідний стержень  $AB$  маси  $m$  нахилений під кутом  $\alpha$  до горизонту. Кінець стержня  $B$  спирається на гладеньку горизонтальну підлогу, а кінець  $A$  відпускають без початкової швидкості. Визначити тиск стержня на підлогу і пришвидшення центра мас в цей момент (рис.12,а) [4].

Знайдемо положення МЦП  $Q$ . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і, як наслідок, миттєва кутова швидкість стержня  $\omega^* = 0$ . Тоді МЦП  $Q$  лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець  $B$  стержня покладено на гладеньку підлогу, тобто може рухатись вздовж горизонталі, тому пришвидшення  $\vec{a}_B$  спрямоване горизонтально. Зовнішні сили: вага конструкції  $m\vec{g}$  і реак-

ція підлоги  $\vec{N}_B$  вертикальні, тому головний вектор спрямований вздовж вертикалі. Отже, за теоремою про центр мас пришвидшення  $\vec{a}_C$  теж спрямоване по вертикалі. Таким чином, МЦП  $Q$  у даний момент часу лежить на перетині перпендикулярів до цих пришвидшень, тобто вище точки  $B$  (рис.12,б).

З урахуванням моменту інерції стержня отримаємо його радіус інерції

$$J_C = \frac{1}{12} ml^2; \Rightarrow i_C^2 = \frac{1}{12} l^2.$$

Тоді, згідно (5) центр коливань стержня  $Q^*$  знаходиться на горизонталі, що проходить через МЦП  $Q$  і центр мас  $C$ , праворуч від останнього на відстані (рис.12,б):

$$CQ^* = \frac{1}{12} l^2 \cdot \frac{2}{l \cos \alpha} = \frac{l}{6 \cos \alpha}.$$

З рівнянь моментів відносно центра коливань МЦП визначимо реакцію гладенької підлоги

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \cdot \frac{l}{6 \cos \alpha} - N_B \cdot \left( \frac{l}{6 \cos \alpha} + \frac{l \cos \alpha}{2} \right) = 0 \Rightarrow N_B = \frac{mg}{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

За третім законом Ньютона тиск стержня на підлогу дорівнює її реакції, тільки спрямований у протилежний бік.

За теоремою про центр мас у проекції на вертикаль знаходимо пришвидшення центра мас  $C$  (рис.12,б)

$$ma_C = mg - N_B \Rightarrow a_C = \frac{3g}{4 + tg^2 \alpha}.$$

*Приклад 8.* Однорідне тоненьке кільце з внутрішнім радіусом, втричі меншим за зовнішній, поставлений під кутом  $\beta$  на шорстку горизонтальну підлогу. Визначити найменше значення коефіцієнт тертя ковзання між кільцем і підлогою  $f$ , при якому кільце почне падати без проковзування (рис.13,а).

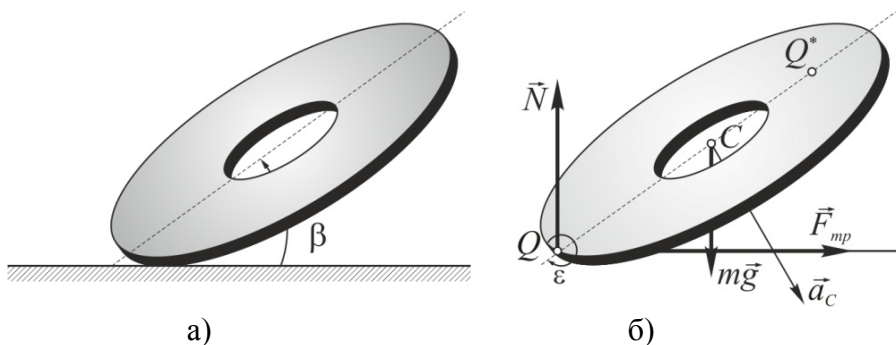


Рис.13. Кільце на шорсткій підлозі

Оскільки кільце на шорсткій підлозі не проковзує, то МЦП  $Q$  знаходиться у заданий момент часу в точці контакту кільця з підлогою (рис.13,б). З урахуванням моменту інерції кільця отримаємо його радіус інерції

$$J_C = \frac{m}{2} \left[ R^2 + \left( \frac{R}{3} \right)^2 \right] = \frac{5}{9} mR^2 \quad \Rightarrow \quad i_C^2 = \frac{5}{9} R^2.$$

Отже, згідно (5) центр коливань кільця знаходиться вище центра мас  $C$  на відстані (рис.13,б)

$$CQ^* = \frac{5}{9} R$$

і сила тертя зчеплення з підлогою спрямована в бік руху – рушійна.

Складемо рівняння моментів відносно центра коливань МЦП (рис.13, б)

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \cos \beta \cdot \frac{5}{9} R + F_{mp} \sin \beta \cdot \left( 1 + \frac{5}{9} \right) R - N \cos \beta \cdot \left( 1 + \frac{5}{9} \right) R = 0$$

і рівняння проекції головного вектора зовнішніх сил на діаметр кільця, на якому розміщено центр мас  $C$  і МЦП  $Q$

$$\sum_{i=1}^n F_{CQ} = -mg \sin \beta + F_{mp} \cos \beta + N \sin \beta = 0,$$

з яких визначимо силу тертя зчеплення з підлогою і нормальну складову реакції шорсткої підлоги

$$F_{mp} = \frac{9}{28} mg \sin 2\beta; \quad N = \frac{5 + 9 \sin^2 \beta}{14} mg.$$

Щоб кільце почало падати без проковзування сила тертя зчеплення повинна задовольняти умову (2)

$$F_{mp} \leq fN, \quad \frac{9}{28} \sin 2\beta \leq f \frac{5 + 9 \sin^2 \beta}{14}, \quad \text{або} \quad f \geq \frac{9 \sin 2\beta}{2(5 + 9 \sin^2 \beta)}.$$

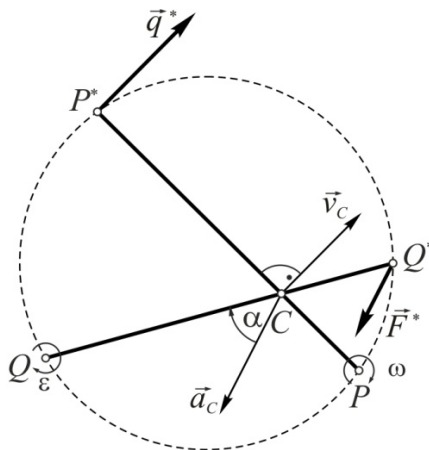


Рис.14. Миттєві центри швидкостей, пришвидшеньта їхні центри коливань

**Висновок.** Відповідно до виразів (1) і (5) відрізки  $CP$  і  $CP^*$  та  $CQ$  і  $CQ^*$  є хордами одного кола, тобто МЦШ  $P$ , МЦП  $Q$  та їхні центри коливань  $P^*$  і  $Q^*$  у кожний момент часу розташовані на одному колі (рис.14).

Зазначимо також, що в центрі коливань МЦШ прикладена рівнодійна кількості руху тіла, а в МЦП – рівнодійна сил, прикладених до нього.

### *Література*

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник / М.А.Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика: Учебное пособие. Изд.9. // М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон. – СПб.: Лань, 2010. – 640 с.
3. Мещерський І.В. Задачі по теоретической механике: Учеб. Пособие / І.В.Мещерський. – СПб.: Лань, 2002. – 448 с.
4. Березова О.А. Теоретична механіка / О.А.Березова, Г.Ю.Друшляк, Р.В.Солодовников. – К.: ІЗМН, 1998. – 408 с.
5. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики: В 2 т. / Н.А.Кильчевский. – М.: Наука, 1972-1977. – Т.1.– 456 с.; Т.2.– 462 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 24.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,  
д.ф.-м.н., професором **Нікітіною Н.В.** (м. Київ)*

## **SOME FEATURES PLANAR MOTION OF THE BODY**

**I. Tsidylo<sup>1</sup>, K. Levchuk<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15; e-mail: [tm@nung.edu.ua](mailto:tm@nung.edu.ua)*

<sup>2</sup>*National Technical University of Ukraine  
"Kyiv Polytechnic Institute"; 03056, Kyiv, Prospect Peremogy, 37;  
e-mail: [k.levchuk@kpi.ua](mailto:k.levchuk@kpi.ua)*

*This article shows that the planar motion of solids has some interesting features and properties. The authors reviewed some unconventional methods of investigation of the dynamics of the movement, allowing substitute for solving differential equations of motion equation Highlights relatively centres oscillations instant centres of speed and acceleration.*

**Key words:** *planar motion, instantaneous centre of velocity, instantaneous centre express, the centre of oscillation friction, rolling without slipping, the dynamic response.*

## ГІПЕРЦИКЛІЧНІ ОПЕРАТОРИ НА ВІЛЬНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

**А. В. Загороднюк<sup>1</sup>, М. В. Марцінків<sup>1</sup>, З. Г. Можировська<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;  
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; тел. +380 (342) 59-60-50;  
e-mail: andriyzag@yahoo.com

<sup>2</sup>Львівська комерційна академія;  
79005, м. Львів, вул. Тугана-Барановського, 10;  
e-mail: mariadubey@gmail.com, nzoriana@yandex.ru

*У статті розглянуто умови циклічності та гіперциклічності операторів на вільних банахових просторах над деяким метричним простором.*

**Ключові слова:** *гіперциклічні оператори, вільні банахові простори.*

Нехай  $X$  – не порожній метричний простір. Зафіксуємо у ньому деяку точку  $\theta_X$ . Пару  $(X, \theta_X)$  будемо називати *простором з відміченою точкою*. Нагадаємо, що відображення  $f$  між метричними просторами  $X$  та  $Y$  називається *ліпшицевим*, якщо існує стала  $L_f$ , така, що для довільних елементів  $x_1, x_2 \in X$  справедлива нерівність

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L_f \rho_X(x_1, x_2),$$

де найменша з можливих сталих  $L_f$  називається *сталюю Ліпшица*. Простір усіх ліпшицевих відображень з метричного простору  $X$  з відміченою точкою  $\theta_X$  у простір  $Y$  з відміченою точкою  $\theta_Y$ , які переводять  $\theta_X$  у  $\theta_Y$  позначається  $Lip_0(X, Y)$ . У випадку, коли  $Y$  є лінійним простором, будемо вважати, що  $\theta_Y = 0$ . Загальна теорія ліпшицевих відображень викладена у монографіях Н. Вівера [1], І. Беніаміні, Ж. Лінденштрауса [2]. У роботі В. Пестова [3] доведено, що для довільного метричного простору  $X$  з відміченою точкою  $\theta_X$  існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму, банахів простір  $B(X)$  та оператор вкладення  $v: X \rightarrow B(X)$  такі, що метричний простір  $X$  вкладається у банахів простір  $B(X)$  і кожне відображення  $f(x) \in Lip_0(X, E)$  може бути продовжене до лінійного оператора  $\tilde{f}(x): B(X) \rightarrow E$  для довільного нормованого простору  $E$ , причому  $\|\tilde{f}\| = L_f$ . Позначимо через  $sran X$  лінійну оболонку простору  $X$  в  $B(X)$  а образ елементів  $x \in X$  в  $B(X)$  через

$v(x) = \underline{x}$ . За побудовою, елементи вигляду  $\sum_{k=1}^n a_k \underline{x}_k \in v(X)$  є щільними у просторі  $B(X)$ . Простір  $B(X)$  називається *вільним банаховим простором над  $X$* .

Відображення  $F$  з метричного простору  $X$  в себе називається *топологічно транзитивним*, якщо існує елемент  $x \in X$ , такий, що орбіта

$$Orb(F, x) = \left\{ F^n(x) = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_n(x) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

буде щільною в  $X$ . У випадку, коли  $X$  – метричний простір з відміченою точкою  $\theta_x$  будемо вимагати, щоб орбіта  $Orb(F, x)$  була щільною в  $X \setminus \theta_x$ . Лінійний неперервний оператор  $T$  на просторі Фреше  $E$  в себе називається *гіперциклічним*, якщо  $T$  є топологічно транзитивним. Вектор  $x \in E$  для якого  $Orb(T, x)$  є щільною в  $E$  називається *гіперциклічним вектором* оператора  $T$ . Лінійний неперервний оператор  $T : E \rightarrow E$  називається *циклічним*, якщо для деякого вектора  $x \in E$  (який називається *циклічним вектором*) лінійна оболонка  $span Orb(T, x)$  є щільною в  $E$ .

**Теорема 1.** Нехай  $(X, \theta_x)$  – повний метричний простір з відміченою точкою  $\theta_x$  і  $F : X \rightarrow X$  є топологічно транзитивним відображенням, таким що  $F(\theta_x) = \theta_x$ . Тоді лінійний оператор  $\tilde{F} : B(X) \rightarrow B(X)$  буде *циклічним*.

*Доведення.* Нехай  $x \in X$  – елемент, для якого  $Orb(F, x)$  є щільною в  $X$ . Тоді  $Orb(\tilde{F}, \underline{x})$  буде щільною в  $v(X) = \underline{X}$ . За означенням  $B(X)$ , простір  $span X = span v(X)$  є щільним в  $B(X)$ , тому простір  $span Orb(F, \underline{x})$  буде щільним в  $B(X)$ .

Зауважимо, що з топологічної транзитивності  $F$  загалом не випливає гіперциклічність оператора  $\tilde{F}$ .

**Приклад 1.** Нехай  $X = S^1 \cup \theta$ , де  $S^1$  – одинична сфера в  $R^2$  з природною метрикою,  $\theta_x = (0,0) \in R^2$ . Визначимо  $F$ -відображення повороту на ірраціональний кут  $\alpha$ . Відомо, що  $F$  є топологічно транзитивним і для кожного  $x \in S^1$ ,  $Orb(F, x)$  є щільною в  $S^1$ . Таким чином,  $\tilde{F}$  буде *циклічним* оператором і для кожного  $x \in S^1$ , а  $\underline{x}$  буде його *циклічним* вектором. Проте,  $\|\tilde{F}\| = L_F = 1$ , а норма гіперциклічного оператора повинна бути строго більшою за 1.

Для встановлення умов гіперциклічності оператора на вільному банаховому просторі використовуємо так званий критерій гіперциклічності (див.[4]).

Нехай  $E$  – сепарабельний простір Фреше. Оператор  $T$  задовольняє критерій гіперциклічності, якщо існують щільні підмножини  $X_0 \subset E$ ,  $Y_0 \subset E$  і відображення  $S_n : Y_0 \rightarrow E, n \in N$  де  $N$  – множина натуральних чисел такі, що:

1.  $T^n x \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$  для всіх  $x \in X_0$ ;
2.  $S_n y \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$  для всіх  $y \in Y_0$ ;
3.  $(T^{n_0} S_n) y \rightarrow y$ , при  $n \rightarrow \infty$  для всіх  $y \in Y$ .

Термін “критерій гіперциклічності” є загально прийнятим, проте сформульована умова не є критерієм. Кожен оператор, що задовольняє критерію гіперциклічності, є гіперциклічним, і всі “класичні” гіперциклічні оператори задовольняють критерію гіперциклічності. Довгий час було відкритим питання: чи кожен гіперциклічний оператор на сепарабельному просторі Фреше задовольняє критерію гіперциклічності? У 2008 році ця проблема була розв’язана з негативною відповіддю Де Ла Роза та Рідом [5]. Відомо (див. [4]), що оператор  $T$  задовольняє критерію гіперциклічності тоді і тільки тоді, коли  $T \oplus T$  є гіперциклічним на  $E \oplus E$

**Теорема 2.** Нехай  $(X, \theta_X)$  – сепарабельний повний метричний простір і відображення  $F : X \rightarrow X$  є ліпшицевим відображенням з ліпшицевою константою рівною 1 і  $F(\theta_X) = \theta_X$ .

Припустимо, що  $X$  можна подати у вигляді зліченного об’єднання непорожніх попарно різних множин  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ , таких, що  $A_0 = \theta_X$ ,  $F(A_n) = A_{n-1}$  для довільного  $n > 0$  і звуження  $F$  на  $A_n$  ін’єктивне для кожного  $n > 1$ . Тоді оператор  $T = \lambda F$  буде гіперциклічним оператором на  $B(X)$  для довільного числа  $\lambda, |\lambda| > 1$ .

*Доведення.* Визначимо  $Y_0 = X_0 = span(X \setminus \theta_X)$  – щільна підмножина в  $B(X)$ , для кожного  $z = \sum a_i \underline{x}_i \in X_0$ ,

$$S(z) = \sum a_i \frac{F^{-1}}{\lambda}(\underline{x}_i), \quad S_n(z) = S^n(z).$$

Оскільки  $span(X \setminus \theta_X)$  складається із формальних скінченних сум, то для кожного  $z \in span(X \setminus \theta_X)$ ,  $T^m(z) = 0$ , починаючи з деякого номера  $m$ . Тому умова 1 виконується.

Оскільки  $|\lambda| > 1$ , то

$$S^n(z) \leq \frac{1}{|\lambda|^n} \|z\| \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Отже, умова 2 виконується. Крім того,  $(T^n \circ S^n) = Id$  – тотожний оператор, тому умова 3 також виконується.

**Приклад 2.** Нехай  $X = N \cup 0$  з дискретною метрикою і відміченою точкою  $\theta_X = 0$ . Відомо [1], що  $B(X) = l_1(N)$ . Визначимо  $F: N \rightarrow N$ ,  $F(n) = n-1$  для  $n \neq 0$  і  $F(0) = 0$ . Нехай  $A_n = \{n\}$ , тоді  $F$  задовольняє умовам теореми. Зауважимо, що

$$\lambda F(a_0, \dots, a_n, \dots) = \lambda(a_0, \dots, a_n, \dots) -$$

зважений зсув вліво. Гіперциклічність такого оператора добре відома, якщо  $|\lambda| > 1$  [6].

**Теорема 3.** Нехай  $E$  – сепарабельний простір Фреше. Якщо  $T: E \rightarrow E$  – гіперциклічний оператор, який задовольняє критерій гіперциклічності, то  $\tilde{T}: B(E) \rightarrow B(E)$  – також гіперциклічний оператор і задовольняє критерію гіперциклічності.

*Доведення.* Оскільки  $T$  задовольняє критерію гіперциклічності, то існують простори  $X_0, Y_0$  та послідовність відображень  $S_n$  як у критерії. Оскільки  $X_0, Y_0$  щільні в  $E$ , то  $\text{span } X_0$  і  $\text{span } Y_0$  будуть щільними множинами в  $B(E)$ . Визначимо  $\tilde{S}_n(z) = \sum a_k S_n(x_k)$  для кожного  $z = \sum a_k x_n \in \text{span } Y_0$ . Легко бачити, що для  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{S}_n$ ,  $\text{span } X_0$ ,  $\text{span } Y_0$  виконуються умови критерію, тому задовольняє критерію гіперциклічності.

### Література

1. Weaver N. Lipschitz Algebras / N. Weaver. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1999. – 323 p.
2. Benyamini Y. Geometric Nonlinear Functional Analysis, I / Y. Benyamini, J. Lindenstrauss. – Providence, Rhode Island: AMS Colloquium Publications, 2000. – V.48.
3. Pestov V. Free Banach spaces and representation of topological groups / V. Pestov // Functional Anal. Appl. – 1986. – V.20. – P. 70-72.
4. B`es J. Hereditarily hypercyclic operators / J. B`es, A. Peris // J. Func. Anal. – 1999. – V.167, №1. – P. 94-112.
5. De La Rosa M. A hypercyclic operator whose direct sum is not hypercyclic / M. De La Rosa, C.J. Read // J. Operator Theory. – 2009. – V.62, №2. – P. 369-380.
6. Carando D. Hypercyclic convolution operators on Fréchet spaces of analytic functions / D. Carando, V. Dimant, S. Muro // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – 336, №2. – P. 1324-1340.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 12.10.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., доцентом Никифорчиним О.Р., д.ф.-м.н., професором Лопушанським О.В (м. Львів)*



---

**HYPERCYCLIC OPERATORS ON FREE BANACH SPACES**

---

**A. V. Zagorodnyuk<sup>1</sup>, M. V. Martsinkiv<sup>1</sup>, Z. G. Mozhyrovska<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;**76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;**ph. +380 (3422) 59-60-50; e-mail: andriyzag@yahoo.com*<sup>2</sup>*Lviv Commercial Academy;**79005, Lviv, Tuhan-Baranovsky str., 10;**e-mail: mariadubey@gmail.com, nzoriana@yandex.ru*

*We considersome condition of cyclicity and hypercyclicity of operators on free Banach space over a metric spaces.*

**Key words:** *hypercyclic operator, free Banach space.*

УДК 517.98

## ПРО ОПЕРАЦІЮ КРОСКОРЕЛЯЦІЇ ГІПЕРФУНКЦІЇ ТА ДІЙСНОЇ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

**М. І. Патра, С. В. Шарин**

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;  
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;  
тел. +380 (342) 59-60-50; e-mail: patra-m@mail.ru, sharynsir@yahoo.com*

*У статті розглянуто операцію кроскореляції гіперфункції з компактним носієм на додатній півосі та дійсної аналітичної функції. Крім цього, доведено деякі властивості цієї операції та наведено приклади.*

**Ключові слова:** *гіперфункція з компактним носієм, дійсна аналітична функція.*

Теорія гіперфункцій – це ще один із способів узагальнення поняття функції. Гіперфункції були введені японським вченим М. Сато у 1958 р. Їх можна розуміти як своєрідне узагальнення поняття граничних значень комплексних аналітичних функцій та розширення розподілів Шварца.

Теорія гіперфункцій отримала широке застосування у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також в аксіоматичній квантовій теорії поля, при вивченні аналітичних властивостей S-матриць і інтегралів Фейнмана [3].

Нехай  $\Omega$  – відкрита множина на дійсній осі  $\mathbb{R}$ . Гіперфункції на  $\Omega$  визначають як елементи фактор-простору  $B(\Omega) := O(B \setminus \Omega) / O(V)$ , де  $V$  – відкрита множина в комплексній площині  $\mathbb{C}$ , що містить  $\Omega$  як відносно замкнену множину,  $O(V)$  і  $O(B \setminus \Omega)$  – векторні простори всіх голоморфних функцій на  $V$  і  $B \setminus \Omega$  відповідно. Інтуїтивно гіперфункція  $f \in B(\Omega)$  – це різниця граничних значень деякої голоморфної функції  $F(z)$ , визначеної поза  $\Omega$ . Гіперфункцію, представлену за допомогою аналітичної функції  $F \in O(B \setminus \Omega)$ , позначають  $f(x) = [F(z)]_{z=x}$ .

Нехай  $B_c(\Omega)$  – простір гіперфункцій з компактними носіями. Відомо [1,2], що простір гіперфункцій з компактними носіями з точністю до топологічного ізоморфізму є спряженим до простору  $A(\Omega)$  всіх дійсних аналітичних функцій на  $\Omega$ . При цьому для довільних  $f \in B_c(\Omega)$ ,  $\varphi \in A(\Omega)$ , канонічний білінійний функціонал задають формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = -\oint_r F(z) \varphi(z) dz, \quad (1)$$

де  $\Gamma$  – замкнений контур в перетині області визначення функції  $F$  і аналітичного продовження функції  $\varphi$ , який оточує носій  $f$  один раз в додатному напрямку.

Позначимо через  $B_c(\mathbb{R}_+)$  простір всіх гіперфункцій з компактними носіями в додатній півосі  $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$ .

Для довільних  $f \in B_c(\mathbb{R}_+)$  і  $\varphi \in A(\mathbb{R}_+)$  за допомогою канонічного білінійного функціоналу  $\langle f, \varphi \rangle$  визначимо операцію кроскореляції наступним чином:

$$(f * \varphi)(t) := -\oint_{\Gamma} F(z)\varphi(z+t)dz, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Властивості кроскореляції.

**Лема.** Кроскореляція гіперфункції та дійсної аналітичної функції є нескінченно диференційовною функцією, причому

$$(f * \varphi)^{(n)}(t) = (f * \varphi^n)(t).$$

*Доведення.* Із властивостей диференціювання інтеграла, залежного від параметра, випливає:

$$\begin{aligned} (f * \varphi)^{(n)}(t) &= \frac{d}{dt^n} \left( -\oint_{\Gamma} F(z)\varphi(z+t)dz \right) = -\oint_{\Gamma} \frac{d}{dt^n} (F(z)\varphi(z+t))dz = \\ &= -\oint_{\Gamma} F(z)\varphi^n(z+t)dz = (f * \varphi^n)(t). \end{aligned}$$

Зауважимо також, що з визначення канонічного білінійного функціоналу (1) очевидним є той факт, що

$$(f * \varphi)(0) = -\oint_{\Gamma} F(z)\varphi(z)dz = \langle f, \varphi \rangle.$$

**Теорема.** Для довільних  $f \in B_c(\mathbb{R}_+)$  і  $\varphi \in A(\mathbb{R}_+)$  маємо  $(f * \varphi) \in A(\mathbb{R}_+)$ .

*Доведення.* За теоремою Прінгшейма [2, теорема 2.1] нескінченно диференційовна функція  $\varphi$  належить простору  $A(\mathbb{R}_+)$  тоді і тільки тоді, коли для кожної компактної множини  $K \subset \mathbb{R}_+$  існують такі константи  $h > 0$  і  $C > 0$ , що для всіх  $n \in \mathbb{Z}_+$  виконується нерівність

$$\sup_{x \in K} |\varphi^{(n)}(x)| \leq Ch^n n!.$$

Для кожної компактної множини  $K \subset \mathbb{R}_+$  з властивостей криволінійного інтеграла отримуємо:

$$\sup_{t \in K} |(f * \varphi)^{(n)}(t)| = \sup_{t \in K} \left| -\oint_{\Gamma} F(z)\varphi^{(n)}(z+t)dz \right| = \sup_{t \in K} |(f * \varphi^n)^{(n)}(t)|.$$

Оскільки  $\Gamma$  – гладка крива, то для неї можна вказати таке параметричне представлення  $z = z(l) = x(l) + iy(l)$ ,  $a \leq l \leq b$ , що  $z(l)$  має неперервну і відмінну від нуля на  $[a, b]$  похідну. Оскільки  $\Gamma$  – замкнений кон-

тур, то  $z(a) = x(b)$ . З властивостей інтеграла від функції комплексної змінної отримуємо:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in K} |(f * \varphi)^{(n)}(t)| &= \sup_{t \in K} \left| \int_a^b F(z(l)) \varphi^{(n)}(z(l) + t) z'(l) dl \right| \leq \\ &\leq \sup_{t \in K} \int_a^b |F(z(l))| \cdot |\varphi^{(n)}(z(l) + t)| \cdot |z'(l)| dl \leq \sup_{t \in K} \sup_{z \in \Gamma} |\varphi^{(n)}(z + t)| \cdot \int_a^b |F(z(l))| \cdot |z'(l)| dl. \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\int_a^b |F(z(l))| \cdot |z'(l)| dl \leq \sup_{z \in \Gamma} |F(z)| \cdot \int_a^b |z'(l)| dl = \mu(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} |F(z)| < \infty,$$

де  $\mu(\Gamma)$  – довжина кривої  $\Gamma$ . Крім того, з принципу максимуму модуля аналітичної функції випливає, що існує така точка  $z_0 \in \Gamma$ , що  $\sup_{t \in K} \sup_{z \in \Gamma} |\varphi^{(n)}(z + t)| = \sup_{t \in K} |\varphi^{(n)}(z_0 + t)|$ . Але функцію  $\mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow |\varphi^{(n)}(z_0 + t)|$  ми можемо розуміти як звуження аналітичної функції  $\mathbb{C} \ni z \rightarrow |\varphi^{(n)}(z_0 + z)|$ , тому  $|\varphi^{(n)}(z_0 + t)|$  є дійсною аналітичною функцією. Таким чином, ми отримали оцінку:

$$\sup_{t \in K} |(f * \varphi)^{(n)}(t)| \leq \mu(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} |F(z)| C h^n n! = C_1 h^n n!,$$

де  $C_1 := \mu(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} |F(z)| C$ , що і доводить, що  $(f * \varphi)(t) \in A(\mathbb{R}_+)$ .

*Приклад 1.* Нехай  $\delta(x)$  – узагальнена функція Дірака. Відомо, що

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{z} \right]_{z=x}.$$

Обчислимо кроскореляцію

$$(f * \varphi)(t) = -\oint_{\Gamma} \left( -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} \right) \varphi(z + t) dz.$$

Для підінтегральної функції точка  $z = 0$  – простий полюс. Тому

$$(\delta * \varphi)(t) = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi(z + t)}{z} \cdot z \right) = \varphi(t).$$

*Приклад 2.* Відомо, що  $\delta^n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \left[ \frac{1}{z^{n+1}} \right]_{z=x}$ . Тому

$$(\delta^n * \varphi)(t) = -\oint_{\Gamma} \left( -\frac{(-1)^n}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \right) \varphi(z + t) dz.$$

Для підінтегральної функції точка  $z = 0$  – полюс кратності  $n + 1$ . Використовуючи теорію лишків та її застосування до обчислення інтегралів, маємо:

$$(\delta^n * \varphi)(t) = (-1)^n \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{d}{dz^n} \frac{\varphi(z + t)}{z^{n+1}} \cdot z^{n+1} \right) = (-1)^n \varphi^n(t).$$

*Література*

1. Sato M. Theory of Hyperfunctions / M.Sato // Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo, 1959-1960.
2. Komatsu H. An Introduction to the Theory of Generalized Functions / H.Komatsu. – Department of Mathematics Science University of Tokyo, 2000.
3. Sato M. Lecture Notes in Physics, № 39, Springer, 13, 1975.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 15.10.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.,  
д.ф.-м.н., професором Лопушанським О.В (м. Львів)*

**CROSS-CORRELATION OF HYPERFUNCTION AND REAL-ANALYTIC FUNCTION****M. I. Patra, S. V. Sharyn**

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;*

*76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;*

*ph. +380 (342) 59-60-50; e-mail: patra-m@mail.ru, sharynsir@yahoo.com*

*We introduce an operation of cross-correlation of a hyperfunction with compact support in the real positive semiaxis and real-analytic function. Some properties of this operation as well as examples are considered.*

**Key words:** *hyperfunction with compact support, real-analytic function.*

УДК 515.12

## НЕПЕРЕРВНІСТЬ СИМЕТРИЧНИХ ДОБУТКІВ ГІПЕРПРОСТОРІВ ВКЛЮЧЕННЯ ТА ЄМНОСТЕЙ

**О. Я. Микицей, О. Р. Никифорчин**

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;  
76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;  
e-mail: oxana39@i.ua, oleh.nyk@gmail.com*

*Побудовано симетричні варіанти тензорних добутоків нормованих  
регулярних неадитивних мір і доведено їх неперервність.*

**Ключові слова:** *тензорний добуток, ємність.*

Відомо [1], що нормовані ємності (нормовані регулярні неадитивні міри) на довільному компактті (тобто компактному гаусдорфовому просторі)  $X$  утворюють компакт  $MX$  щодо слабкої\* топології. Конструкція простору нормованих ємностей  $MX$  продовжується до функтора ємностей  $M$  у категорії компактів, який є функторіальною частиною монади ємностей [1]. Останній факт дозволяє означити тензорний добуток [1] довільних ємностей  $c_1 \in MX$ ,  $c_2 \in MY$ . Наведемо без обґрунтування його остаточний вигляд:  $c_1 \otimes c_2 = c \in M(X \times Y)$ , де  $F \subset X \times Y$  – замкнена,  $c(F) \geq \alpha \in I = [0;1]$ , якщо і тільки якщо існує замкнена  $H \subset X$ , для якої  $c_1(H) \geq \alpha$ , і для кожного  $x \in H$  маємо  $c_2(pr_2(H \cap (\{x\} \times Y))) \geq \alpha$ . Саме зв'язком з монадою для неперервного функтора  $M$  пояснюється неперервність операції  $\otimes$ , її асоціативність (тобто для  $c_1 \in MX$ ,  $c_2 \in MY$ ,  $c_3 \in MZ$  маємо  $(c_1 \otimes c_2) \otimes c_3 = c_1 \otimes (c_2 \otimes c_3)$ ) з точністю до ототожнення  $(X \times Y) \times Z$  та  $X \times (Y \times Z)$  та стійкість щодо переходу до спряжених ємностей. Нагадаємо, що ємність  $\tilde{c} = \varkappa X(c) \in MX$ , спряжена до ємності  $c \in MX$ , визначається рівністю  $\tilde{c}(F) = 1 - c(X \setminus F)$ , і сукупність  $\varkappa$  всіх відображень  $\varkappa X : MX \rightarrow MX$  є автоізоморфізмом монади ємностей. Звідси випливає, що  $\tilde{c}_1 \otimes \tilde{c}_2 = c_1 \otimes c_2$  для всіх  $c_1 \in MX$ ,  $c_2 \in MY$ .

Оскільки нормована ємність  $c$  на компактті  $X$  може моделювати гру з простором результатів  $X$  з погляду одного учасника, то тензорний добуток ємностей  $c_1 \in MX$  та  $c_2 \in MY$  відповідає послідовному проведенню двох ігор в умовах невизначеності, причому на початку другої відомий результат першої. Цим пояснюється несиметричність (некомутативність) тензорного добутку, тобто невиконання рівності  $(c_2 \otimes c_1) = Mp(c_1 \otimes c_2)$ , де  $p : X \times Y \rightarrow Y \times X$  – перестановка координат,

$Mp: M(X \times Y) \rightarrow M(Y \times X)$  – відповідна дія на неадитивні міри. Дійсно, добуток  $c_2 \otimes c_1$  описує проведення першої гри, коли відомий результат другої.

Надалі  $\odot: I \times I \rightarrow I$  та  $\oplus: I \times I \rightarrow I$  – неперервні і відповідні одна одній трикутна норма і трикутна конорма, тобто операція  $\odot$  асоціативна, комутативна, монотонна по обох аргументах, і 1 є її двосторонньою одиницею, а  $\oplus$  визначається рівністю  $\alpha \oplus \beta = 1 - (1 - \alpha) \odot (1 - \beta)$  для всіх  $\alpha, \beta \in I$ . Тоді  $\odot$  можна розуміти як нечітку кон'юнкцію, а  $\oplus$  – як нечітку диз'юнкцію.

Ми пропонуємо ввести симетричний добуток  $\boxtimes: MX \times MY \rightarrow M(X \times Y)$  за формулою:  $(c_1 \boxtimes c_2)(F) = \sup\{c_1(A) \odot c_2(B) \mid A \subset X, B \subset Y, A \times B \subset F\}$  для кожної замкненої  $F \subset X \times Y$  та ємностей  $c_1 \in MX$ ,  $c_2 \in MY$ . Теоретико-ігровий зміст цієї операції стане темою окремої публікації. Скажемо тільки, що вона описує паралельне і незалежне проведення двох ігор. Очевидно, що результат є ємністю, ця операція асоціативна і комутативна, але вже не визначається монадою, тому необхідна окрема перевірка її неперервності, яка є основним завданням даної статті.

Нагадаємо [1], що компактна гаусдорфова топологія на  $MX$  визначається передбазою з усіх множин вигляду  $O_+(U, \alpha) = \{c \in MX \mid c(U) > \alpha\}$  та  $O_-(F, \alpha) = \{c \in MX \mid c(F) < \alpha\}$ , де  $U \subset X$  – відкриті,  $F \subset X$  – замкнені,  $\alpha \in I$ .

**Теорема 1.** *Відображення симетричного множення  $\boxtimes: MX \times MY \rightarrow M(X \times Y)$  неперервне.*

*Доведення.* Потрібно довести відкритість у топології добутку на  $MX \times MY$  прообразів під дією  $\boxtimes$ . Спершу покажемо відкритість прообразу  $O_1 = \boxtimes^{-1}(O_+(U, \alpha)) \subset MX \times MY$ , де  $U \subset X \times Y$  – відкрита множина.

Нехай  $(m_1, m_2) \in O_1$ , тобто  $(m_1 \boxtimes m_2)(U) > \alpha$ , і існує така замкнена множина  $H \subset X \times Y$ , що  $H \subset U$  і  $(m_1 \boxtimes m_2)(H) > \alpha$ , звідки існують такі замкнені  $F \subset X$ ,  $G \subset Y$ ,  $F \times G \subset H \subset U$ , що  $m_1(F) \odot m_2(G) > \alpha$ .

За неперервністю  $\odot$  можемо вважати  $m_1(F) > \beta$ ,  $m_2(G) > \gamma$ , де  $\beta \odot \gamma > \alpha$ .

Можна обрати відкриті околи  $OF$ ,  $OG$  відповідних множин так, що  $\overline{OF} \times \overline{OG} \subset U$ . Тоді  $m_1(OF) > \beta$ ,  $m_2(OG) > \gamma$ , звідки  $m_1 \in O_+(OF, \beta)$ ,  $m_2 \in O_+(OG, \gamma)$ .

Для всіх  $m'_1 \in O_+(OF, \beta)$ ,  $m'_2 \in O_+(OG, \gamma)$  маємо  $m'_1 \boxtimes m'_2 (\overline{OF} \times \overline{OG}) \geq m'_1(\overline{OF}) \odot m'_2(\overline{OG}) > \beta \odot \gamma > \alpha$ . Отже,  $(m_1 \boxtimes m_2)(U) > \alpha$ , тобто  $O_1 \supset O_+(OF, \beta) \times O_+(OG, \gamma) \ni (m_1, m_2)$ , чим доведено відкритість  $O_1$ .

Тепер розглянемо  $O_2 = \boxtimes^{-1}(O_-(H, \alpha)) \subset MX \times MY$ , де  $H \subset X \times Y$  – замкнена множина.

Нехай  $(m_1, m_2) \in O_2$ , тобто  $(m_1 \boxtimes m_2)(H) < \alpha$ . Це означає, що для всіх замкнених  $F \subset X$ ,  $G \subset Y$ , таких, що  $F \times G \subset H$ , виконано  $m_1(F) \odot m_2(G) < \alpha' < \alpha$ .

Як відомо, множини  $\text{exp } X$  та  $\text{exp } Y$  непорожніх замкнених підмножин відповідно компактів  $X$  та  $Y$  з топологіями Вієторіса [2] теж є компактами.

Розглянемо  $W = \{(F, G) \subset \text{exp } X \times \text{exp } Y \mid F \times G \subset H\}$ . Неважко перевірити, що ця множина замкнена в  $\text{exp } X \times \text{exp } Y$  з топологією добутку, тому є компактною.

Нехай  $m_1(F) < \beta$ ,  $m_2(G) < \gamma$ , де  $\beta \odot \gamma > \alpha'$ . Можна вибрати відкриті околи  $OF$ ,  $OG$  відповідних множин так, що  $m_1(\overline{OF}) < \beta$ ,  $m_2(\overline{OG}) < \gamma$ , тоді  $m_1(\overline{OF}) \odot m_2(\overline{OG}) < \alpha'$ .

Тоді для кожної пари  $(F, G) \in W$  маємо відкритий окіл  $\langle OF \rangle \times \langle OG \rangle$  у  $\text{exp } X \times \text{exp } Y$ . Всі такі околи утворюють відкрите покриття компакта  $W$ , з якого можна обрати скінченне підпокриття, тобто  $W \subset OW = \bigcup \{ \langle OF_i \rangle \times \langle OG_i \rangle \mid i = 1, \dots, n \}$ . Зафіксуємо відповідні  $\beta_i > m_1(\overline{OF}_i) < \beta$ ,  $\gamma_i > m_2(\overline{OG}_i)$ ,  $\beta_i \odot \gamma_i < \alpha'$ .

Це означає, що для кожних замкнених  $F' \subset X$ ,  $G' \subset Y$ , таких, що  $F' \times G' \subset H$ , виконано  $F' \subset OF_i$ ,  $G' \subset OG_i$ ,  $m_1(F') \leq m_1(\overline{OF}_i) < \beta_i$ ,  $m_2(G') \leq m_2(\overline{OG}_i) < \gamma_i$ , для одного з  $i = 1, \dots, n$ . Залишається покласти  $Om_1 = \bigcap_{i=1}^n O_{-1}(\overline{OF}_i, \beta_i)$ ,  $Om_2 = \bigcap_{i=1}^n O_{-1}(\overline{OG}_i, \gamma_i)$ , і помітити, що для кожних  $m'_1 \in Om_1$ ,  $m'_2 \in Om_2$ , і замкнених  $F' \subset X$ ,  $G' \subset Y$ ,  $F' \times G' \subset H$ , маємо  $m'_1(F') \odot m'_2(G') \leq m'_1(\overline{OF}_i) \odot m'_2(\overline{OG}_i) < \beta_i \odot \gamma_i > \alpha'$  для деякого  $i = 1, \dots, n$  тому  $(m'_1 \boxtimes m'_2)(H) \leq \alpha' < \alpha$ .

Це означає, що  $O_2 \supset Om_1 \times Om_2 \ni (m_1, m_2)$ , і прообраз  $O_2$  теж є відкритим.  $\square$

Зауважимо, що автоматично отримано коректність, асоціативність, комутативність та неперервність двоїстої операції симетричного додавання  $c_1 \boxplus c_2 = \widetilde{c}_1 \boxtimes \widetilde{c}_2$ , яку можна означити і безпосередньо через



операцію  $\oplus$ : для ємностей  $c_1 \in MX$  та  $c_2 \in MY$  і кожної замкненої  $F \subset X \times Y$  величина  $(c_1 \boxplus c_2)(F)$  рівна точній нижній грані  $c_1(A) \oplus c_2(B)$  для всіх таких замкнених  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$ , що  $F \subset (A \times Y) \cup (X \times B)$ . Трагування операції  $\boxplus$  з погляду нечіткої теорії ігор теж заслуговує окремої публікації.

### *Література*

1. Заричный М.М. Функтор емкостей в категории компактов / М.М.Заричный, О.Р.Никифорчин // Мат. Сборник. – 2008. – 199(2). – С. 3-26.
2. Teleiko A. Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces / A. Teleiko, M. Zarichnyi. – VNTL Publishers, Lviv, 1999. – (Math. Studies Monograph Series, vol. 5).

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В., д.ф.-м.н., професором Лопушанським О.В (м. Львів)*

## CONTINUITY OF SYMMETRIC FACTORS OF HYPERSPACES OF INCLUSION AND CAPACITIES

**Oksana Mykytsey, Oleg Nykyforchyn**

*Precarpathian National University named by Vasil Stefanic;*

*76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko st., 57;*

*e-mail: oxana39@i.ua, oleg.nyk@gmail.com*

*Symmetric variants of tensor products of normed regular non-additive measures was constructed, and their continuity has been proved.*

**Key words:** *tensor product, capacity.*

УДК 519.217.8

## ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ВІНЕРОВИМ ПРОЦЕСОМ

**М. М. Осипчук**

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;  
76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;  
тел. +380 (342) 59-60-47; e-mail: myosyp@gmail.com*

*Розглядається задача мінімізації моменту першого досягнення початку координат вінеровим процесом шляхом додавання деякого переносу.*

***Ключові слова:** вінерів процес, стохастична експонента, оптимальна стратегія.*

### Вступ

Нехай  $(w(t), M_t, P_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$  – вінерів процес в  $\mathbb{R}$ , для якого  $P_x(w(0) = x) = 1$ . Розглянемо момент першого досягнення процесом  $(w(t))_{t \geq 0}$  початку координат:  $\tau = \inf \{s \geq 0 : w(s) = 0\}$ . Зауважимо, що  $\tau$  є моментом зупинки відносно потоку  $(M_t)_{t \geq 0}$ . Розподіл випадкової величини  $\tau$  залежить від точки  $x$  і задається при  $x \neq 0$  щільністю  $p_x(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}$ ,  $t > 0$ . Легко бачити, що випадкова величина  $\tau$  не має скінченного математичного сподівання відносно міри  $P_x$  при  $x \neq 0$ .

Метою роботи є встановлення коефіцієнту переносу, який забезпечив би, в певному розумінні, мінімальне значення моменту  $\tau$ . Коефіцієнт переносу вибиратимемо на множині  $V$  прогресивно вимірних процесів  $(\alpha(t), M_t)_{t \geq 0}$  в  $\mathbb{R}$ , для яких

$$P_x \left( \int_0^\tau \alpha^2(s) ds < +\infty \right) = 1$$

та мають місце умови  $E_x \Psi_\tau^0(\alpha) = 1$ ,  $E_x (\Psi_\tau^0(\alpha))^2 < +\infty$ , де  $E_x$  означає математичне сподівання за мірою  $P_x$ , а

$$\Psi_\tau^0(\alpha) = \exp \left\{ \int_0^\tau \alpha(s) dw(s) - \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha^2(s) ds \right\}$$

(тут перший з інтегралів є інтегралом Іто). Елементи множини  $V$  називатимемо *допустимими стратегіями*. Випадковий процес  $(\Psi_t^0(\alpha))_{t \geq 0}$  часто називають *стохастичною експонентою*.

### 1 Цільова функція та локальна оптимальна стратегія

Нехай функція  $f(t)_{t \geq 0}$  додатна неперервна монотонно зростаюча та обмежена. Цільовою функцією будемо називати функціонал

$$\Phi(\alpha) = \mathbf{E}_x f(\tau) \Psi_\tau^0(\alpha) \quad (1)$$

заданий на множині  $V$  допустимих стратегій. Очевидно, що при виконанні припущень щодо функції  $f$  мають місце нерівності  $0 \leq \Phi(\alpha) \leq C = \sup_{t \geq 0} f(t)$  на всій множині  $V$ . Крім того, існує скінченна дисперсія  $\mathbf{D}_x f(\tau)$  випадкової величини  $f(\tau)$ .

Нас цікавитиме існування та вигляд допустимої стратегії, на якій цільова функція досягала б свого мінімального значення на всьому  $V$  чи деякій його підмножині. Деяку відповідь на поставлене питання дає наступна теорема, що є основним твердженням цього параграфу. Подібна задача для локального часу вінерового процесу в нулі розглядалася в роботі [1], ідеї якої знайшли своє застосування і в нашій ситуації.

**Теорема 1.** *Нехай додатна неперервна строго монотонно зростаюча та обмежена функція  $f(t)_{t \geq 0}$  така, що існують сталі  $u > 0$  та*

*$r \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$  і функція  $(\rho(t))_{t > 0}$ , для яких при всіх  $0 < t < u$*

*$f(s+t) - f(s) \leq \rho(s)t^r$ , причому функція  $\rho$  квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним.*

*Тоді існує допустима стратегія  $\alpha^*(t) = \frac{h'_x(t, w(t))}{h(t, w(t))}$ , на якій функціонал  $\Phi$  досягає свого мінімуму на множині  $W = \{\alpha \in V : \mathbf{E}_x (\Psi_\tau^0(\alpha))^2 \leq K\}$ . Тут  $K = \frac{\mathbf{D}_x f(\tau)}{(C - \mathbf{E}_x f(\tau))^2} + 1$ ,  $h(t, x) = C - \mathbf{E}_x f(t + \tau)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .*

**Зауваження.** *Очевидно, що множина  $W$  непорожня, бо  $\Psi_\tau^0(0) \equiv 1$  і, отже,  $0 \in W$ . Відомо (див. [2, с.244]), що стохастична експонента*

*$\Psi_t^0(\alpha)$  задовольняє рівняння  $\Psi_t^0(\alpha) = 1 + \int_0^t \Psi_s^0(\alpha) \alpha(s) dw(s)$ , якщо тільки*

*$\mathbf{P}_x \left( \int_0^t \alpha^2(s) ds < +\infty \right) = 1$ . Звідси*

$$\begin{aligned} (\Psi_t^0(\alpha))^2 &= 1 + 2 \int_0^t \Psi_s^0(\alpha) \alpha(s) dw(s) + \left( \int_0^t \Psi_s^0(\alpha) \alpha(s) dw(s) \right)^2 = \\ &= 2\Psi_t^0(\alpha) - 1 + \left( \int_0^t \Psi_s^0(\alpha) \alpha(s) dw(s) \right)^2 \geq 2\Psi_t^0(\alpha) - 1 \end{aligned}$$

і за умови, що  $E_x \Psi_t^0(\alpha) = 1$  матимемо  $E_x (\Psi_t^0(\alpha))^2 \geq 1$ . Таким чином,  $E_x (\Psi_\tau^0(\alpha))^2 \geq 1$ .

Перш ніж доводити сформульовану теорему, розглянемо одне допоміжне твердження, яке, цікаве і саме по собі.

**Лема.** Нехай функція  $g(t)_{t \geq 0}$  додатна при  $t > 0$  і така, що існують сталі  $u > 0$ ,  $r \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$  і функція  $(\rho(t))_{t > 0}$ , для яких при всіх  $0 < t < u$  має місце  $|g(s+t) - g(s)| \leq \rho(s)t^r$ , причому функція  $\rho$  квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним. Тоді існує така допустима стратегія  $\alpha_0$ , що  $g(\tau) = \Psi_\tau^0(\alpha_0)E_x g(\tau)$ .

**Доведення.** Розглянемо функцію

$$k(t, x) = E_x g(t + \tau) = \int_0^{+\infty} g(t + s) p_x(s) ds,$$

задану при  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , та довізначимо її за неперервністю в точках  $(t; 0)$ . Ця функція диференційовна за обома змінними скрізь крім точок  $(t; 0)$ , причому

$$\begin{aligned} k'_t(t, x) &= \int_0^{+\infty} g'(t+s) \frac{|x|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds = -\int_0^{+\infty} g(t+s) \frac{(x^2-3s)|x|}{2\sqrt{2\pi s^7}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds, \\ k'_x(t, x) &= \operatorname{sign} x \int_0^{+\infty} g(t+s) \left(1 - \frac{x^2}{s}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds, \\ k''_{xx}(t, x) &= \int_0^{+\infty} g(t+s) \frac{(x^2-3s)|x|}{s^2 \sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds. \end{aligned}$$

Всі інтеграли в правих частинах цих рівностей збігаються локально рівномірно за  $t > 0$  та  $x \neq 0$ . Тому диференціювання інтегралу, що задає функцію  $k(t, x)$ , по обох параметрах допустиме. Легко бачити, що при всіх  $t > 0$  та  $x \neq 0$  має місце рівність

$$k'_t(t, x) + \frac{1}{2} k''_{xx}(t, x) = 0. \quad (2)$$

Зауваживши, що  $k(0, x) = E_x g(\tau)$  і  $k(t, 0) = g(t)$ , розглянемо для фіксованого  $x \neq 0$  випадковий процес  $\xi_x(t) = E_x(g(\tau)/M_t)$ ,  $t \geq 0$ . Очевидно, що  $\xi_x(0) = E_x g(\tau) = k(0, x)$  та  $\xi_x(\tau) = g(\tau)$ .

Враховуючи, що на множині  $\{\tau > t\} \in M_t$  виконується рівність  $\theta_t \tau = \tau - t$  ( $\theta_t$  – оператор зсуву [3, с. 120]), одержимо

$$\begin{aligned} \xi_x(t) &= E_x(g(\tau) \chi_{\{\tau \leq t\}}/M_t) + E_x(g(\tau) \chi_{\{\tau > t\}}/M_t) = \\ &= g(\tau) \chi_{\{\tau \leq t\}} + \chi_{\{\tau > t\}} E_x(g(t + \theta_t \tau)/M_t) = g(\tau) \chi_{\{\tau \leq t\}} + \chi_{\{\tau > t\}} E_{w(t)} g(t + \tau) = \end{aligned}$$

$$= k(\tau, w(\tau))\chi_{\{\tau \leq t\}} + k(t, w(t))\chi_{\{\tau > t\}} = k(t \wedge \tau, w(t \wedge \tau)).$$

Тут і далі  $\chi_A$  – індикатор множини  $A$ .

Доведемо далі, що для обчислення стохастичного диференціалу випадкового процесу  $\xi_x(t)$  може бути застосована формула Іто (див. наприклад [2, с. 136]). Для цього досить довести, що  $P_x$ -м.н.

$$\int_0^{+\infty} (\chi_{\{\tau > t\}} k'_x(t, w(t)))^2 dt < +\infty.$$

Розглянемо наступне представлення

$$k'_x(t, x) = \operatorname{sign} x \int_0^{+\infty} (g(t) - g(t+s)) \frac{x^2}{\sqrt{2\pi s^5}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds - \\ - \operatorname{sign} x \int_0^{+\infty} (g(t) - g(t+s)) \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds = I_1 - I_2.$$

Оцінюючи  $I_1$  та  $I_2$ , маємо

$$|I_1| \leq \int_0^u \rho(t) s^r \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi s^5}} ds + \int_u^{+\infty} g(t) \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi s^5}} ds \leq \\ \leq \rho(t) \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi s^{3-2\alpha}}} ds + g(t) \int_u^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} ds \leq \operatorname{const}(\rho(t) + g(t))$$

Тут враховано очевидні при  $s > 0$  та  $x \in \mathbf{R}$  нерівності

$$\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} < 1, \quad \frac{x^2}{s} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} < 1,$$

а запис  $\operatorname{const}$  означає деяку додатну сталу. Отже,  $(k'_x(t, x))^2 \leq \operatorname{const}(\rho^2(t) + f^2(t))$  і тому

$$\int_0^{+\infty} (\chi_{\{\tau > t\}} k'_x(t, w(t)))^2 dt \leq \operatorname{const} \int_0^\tau (\rho^2(t) + f^2(t)) dt.$$

Оскільки  $P_x(\tau < +\infty) = 1$ , функція  $\rho(t)$  інтегровна з квадратом в околі нуля,  $g(t)$  обмежена, то  $\int_0^{+\infty} (\chi_{\{\tau > t\}} k'_x(t, w(t)))^2 dt < +\infty$   $P_x$ -м.н.

Далі, застосувавши до  $\xi_x(t) = k(t \wedge \tau, w(t \wedge \tau))$  формулу Іто, з врахуванням (2) матимемо

$$\xi_x(t) = k(0, x) + \int_0^{t \wedge \tau} k'_x(s, w(s)) dw(s) = k(0, x) + \int_0^t k'_x(s, w(s)) \chi_{\{\tau > s\}} dw(s).$$

Зауважимо, що при  $0 \leq t < \tau$

$$\xi_x(t) = k(t, w(t)) = \int_0^{+\infty} g(t+s) \frac{|w(t)|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{w^2(t)}{2s}\right\} ds,$$

а при  $t \geq \tau$   $\xi_x(t) = k(\tau, w(\tau)) = k(\tau, 0) = g(\tau) > 0$ .

Крім того,  $\xi_x(t)$   $\mathbb{P}_x$ -м.н. неперервна по  $t$ . Тому  $\mathbb{P}_x$ -м.н.  $\inf_{0 \leq t \leq \tau} \xi_x(t) > 0$  і можемо записати

$$\xi_x(t) = k(0, x) + \int_0^t k'_x(s, w(s)) \frac{\chi_{\{\tau > s\}}}{\xi_x(s)} \xi_x(s) dw(s) = \mathbb{E}_x g(\tau) + \int_0^t \hat{\alpha}_0(s) \xi_x(s) dw(s),$$

де позначено  $\hat{\alpha}_0(s) = k'_x(s, w(s)) \frac{\chi_{\{\tau > s\}}}{\xi_x(s)} = \frac{k'_x(s, w(s))}{k(s, w(s))} \chi_{\{\tau > s\}}$ .

Покладемо  $\alpha_0(t) = \frac{k'_x(t, w(t))}{k(t, w(t))}$ . Враховуючи, що на множині  $\{t < \tau\}$

$$k(t, w(t)) = \mathbb{E}_{w(t)} g(t + \tau) = \mathbb{E}_x (g(\tau) / \mathcal{M}_t) > 0,$$

можемо стверджувати, що  $(\alpha_0(t))_{t \geq 0}$  є допустимою стратегією.

Крім того,  $\xi_x(t) = \Psi_t^0(\hat{\alpha}_0) \mathbb{E}_x g(\tau) = \Psi_{t \wedge \tau}^0(\alpha_0) \mathbb{E}_x g(\tau)$  і  $g(\tau) = \xi_x(\tau) = \Psi_\tau^0(\alpha_0) \mathbb{E}_x g(\tau)$ , що і потрібно було довести.

Перейдемо тепер до доведення основного твердження роботи.

**Доведення теореми 1.** Позначимо  $\|\Psi_\tau^0(\alpha)\| = (\mathbb{E}_x (\Psi_\tau^0(\alpha))^2)^{\frac{1}{2}}$  та розглянемо функціонал  $\hat{\Phi}(\alpha) = \frac{\mathbb{E}_x (C - f(\tau)) \Psi_\tau^0(\alpha)}{\|\Psi_\tau^0(\alpha)\|}$ .

Легко бачити, що

$$\Phi(\alpha) = C - \hat{\Phi}(\alpha) \|\Psi_\tau^0(\alpha)\|. \quad (3)$$

Далі, функція  $C - f(t)$  задовольняє умови леми. Тому існує така допустима стратегія  $\alpha^*(t) = \frac{h'_x(t, w(t))}{h(t, w(t))}$ , де  $h(t, x) = C - \mathbb{E}_x f(t + \tau)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , що  $C - f(\tau) = \Psi_\tau^0(\alpha^*) (C - \mathbb{E}_x f(\tau))$  і, отже,

$$\hat{\Phi}(\alpha) = (C - \mathbb{E}_x f(\tau)) \frac{\mathbb{E}_x \Psi_\tau^0(\alpha^*) \Psi_\tau^0(\alpha)}{\|\Psi_\tau^0(\alpha)\|}.$$

Зауважимо, що  $\Psi_\tau^0(\alpha^*) = \frac{C - f(\tau)}{C - \mathbb{E}_x f(\tau)}$ . Звідси

$$\|\Psi_\tau^0(\alpha^*)\|^2 = \frac{\mathbb{E}_x (C - f(\tau))^2}{(C - \mathbb{E}_x f(\tau))^2} = K,$$

а це дає підстави стверджувати, що  $\alpha^* \in W$ , причому, для всіх  $\alpha \in W$

$$\|\Psi_\tau^0(\alpha)\| \leq \|\Psi_\tau^0(\alpha^*)\|. \quad (4)$$

Нерівність Коші, застосована до  $\mathbb{E}_x \Psi_\tau^0(\alpha^*) \Psi_\tau^0(\alpha)$ , дозволяє записати:

$$\max_{\alpha \in V} \hat{\Phi}(\alpha) = \hat{\Phi}(\alpha^*) = (C - E_x f(\tau)) \|\Psi_\tau^0(\alpha^*)\|.$$

З (3) і (4) випливає нерівність  $\Phi(\alpha) \geq C - \hat{\Phi}(\alpha^*) \|\Psi_\tau^0(\alpha^*)\| = \Phi(\alpha^*)$  при всіх  $\alpha \in W$ , яка доводить твердження теореми 1.

Зауважимо, що нескладні обчислення приводять до рівності

$$\min_{\alpha \in W} \Phi(\alpha) = E_x f(\tau) - \frac{D_x f(\tau)}{C - E_x f(\tau)}.$$

Цікавим є наступний приклад, в якому вдається знайти оптимальну стратегію в явному вигляді. Розглянемо функціонал (1) з функцією  $f(t) = 1 - e^{-mt}$ , де  $m > 0$  – деяка стала. Оскільки при всіх  $s > 0$ ,  $t > 0$  має місце нерівність  $e^{-ms}(1 - e^{-mt}) \leq m e^{-ms} t$ , то умови теореми 1 виконані і, отже, існує допустима стратегія, яка мінімізує функціонал (1) на множині  $W$ . Множина допустимих стратегій  $W$  задається нерівністю  $E_x (\Psi_\tau^0(\alpha))^2 \leq e^{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{m}|x|}$ . Оптимальна стратегія має вигляд  $\alpha^*(t) = -\sqrt{2m} \text{sign}(w(t))$ .

## 2 Глобальна $\varepsilon$ -оптимальна стратегія

Поставимо питання про існування оптимальної, в сенсі мінімізації функціоналу  $\Phi$ , стратегії на всій множині допустимих стратегій  $V$ . Зауважимо насамперед, що для кожної  $\alpha \in V$  має місце очевидна нерівність  $\Phi(\alpha) > 0$ . Наступні обчислення показують, що можна одержати як завгодно мале додатне значення функціоналу  $\Phi$  на  $V$ .

Розглянемо однопараметричну множину функцій  $\{(\phi_\lambda(x))_{x \in \mathbb{R}} : \lambda > 0\}$ , в якій  $\phi_\lambda(x) = -\sqrt{2\lambda} \text{sign}(x)$ , та відповідну множину допустимих стратегій  $\alpha_\lambda(t) = \phi_\lambda(w(t))$ . Формула Танака (див., наприклад, [4, с. 83]) дозволяє записати

$$\int_0^\tau \text{sign}(w(s)) dw(s) = |w(\tau)| - |w(0)| - \eta(\tau) = -|w(0)|,$$

де  $\eta(t)$  – локальний час в нулі вінерового процесу до моменту часу  $t$  і враховано, що для кожного  $x \in \mathbb{R}$   $P_x$ -м.н.  $w(\tau) = 0$ ,  $\eta(\tau) = 0$ . Звідси маємо

$$\Psi_\tau^0(\alpha_\lambda) = \exp \left\{ -\sqrt{2\lambda} \int_0^\tau \text{sign}(w(s)) dw(s) - \lambda\tau \right\} = \exp \left\{ \sqrt{2\lambda} |w(0)| - \lambda\tau \right\}$$

Виберемо деяке  $\varepsilon > 0$  та знайдемо таке  $\delta > 0$ , що для всіх  $0 \leq t \leq \delta$  має місце  $f(t) \leq \varepsilon$ . Тоді, використовуючи рівність

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_x(t) dt = e^{-\sqrt{2\lambda}|x|}, \text{ яку легко перевірити, запишемо}$$

$$\Phi(\alpha_\lambda) = E_x f(\tau) \Psi_\tau^0(\alpha_\lambda) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_x f(\tau) \exp\{\sqrt{2\lambda} |w(0)| - \lambda\tau\} = e^{\sqrt{2\lambda}|x|} \mathbf{E}_x f(\tau) e^{-\lambda\tau} = \\
&= e^{\sqrt{2\lambda}|x|} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\lambda t} p_x(t) dt \leq \varepsilon e^{\sqrt{2\lambda}|x|} \int_0^{\delta} e^{-\lambda t} p_x(t) dt + e^{\sqrt{2\lambda}|x| - \lambda\delta} \int_{\delta}^{+\infty} f(t) p_x(t) dt \leq \\
&\leq \varepsilon e^{\sqrt{2\lambda}|x|} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_x(t) dt + e^{\sqrt{2\lambda}|x| - \lambda\delta} \int_0^{+\infty} f(t) p_x(t) dt = \varepsilon + e^{\sqrt{2\lambda}|x| - \lambda\delta} \mathbf{E}_x f(\tau).
\end{aligned}$$

Далі той факт, що  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{2\lambda}|x| - \lambda\delta} = 0$  при кожних  $x \in \mathbb{R}$  та  $\delta > 0$ , означає можливість зробити значення функціоналу  $\Phi$  як завгодно малим вибором допустимої стратегії  $\alpha_\lambda$  з достатньо великим значенням  $\lambda$ , якщо тільки  $\mathbf{E}_x f(\tau) < +\infty$ .

Множину  $V^* \subset V$  наведемо  $\varepsilon$ -оптимальною стратегією для задачі мінімізації функціоналу  $\Phi$  на множині допустимих стратегій  $V$ , якщо для кожного  $\varepsilon > 0$  існує така допустима стратегія  $\alpha^* \in V^*$ , що  $\Phi(\alpha^*) < \inf_{\alpha \in V} \Phi(\alpha) + \varepsilon$ .

Наведені вище міркування дозволяють сформулювати наступне твердження.

**Теорема 2.** Нехай функція  $(f(t))_{t \geq 0}$  зі значенням  $f(0) = 0$  неперервна та невід'ємна. Нехай існує скінченне  $\mathbf{E}_x f(\tau)$ , де  $\tau$  – момент першого досягнення процесом  $(w(t))_{t \geq 0}$  початку координат. Тоді для задачі мінімізації функціоналу  $\Phi$ , що задається рівністю (1), існує  $\varepsilon$ -оптимальна стратегія. Елементи цієї стратегії утворюють однопараметричну множину і задаються рівністю  $\alpha_\lambda(t) = -\sqrt{2\lambda} \text{sign}(w(t))$ .

На завершення хочу з великою вдячністю згадати мого вчителя професора Портенка М. І., чия увага та поради значною мірою посприяли покращенню цієї роботи.

### Література

1. Osypchuk M.M. An extremum problem for some class of Brownian motions with drift / M.M.Osypchuk, M.I.Portenko // Journal of Mathematical Sciences. – V.179, Issue 1. – P. 164-173.
2. Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов / Р.Ш.Липцер, А.Н.Ширяев. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы / Е.Б.Дынкин. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
4. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения; пер. с англ. / Б.Оксендаль. – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 408 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 24.09.2012 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором,  
чл.-кореспондентом НАН України **Портенком М.І.** (м. Київ),  
д.ф.-м.н., доцентом **Никифорчиним О.Р.**



---

**A PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL WIENER PROCESS****M. M. Osypchuk***Precarpathian National University named by Vasil Stefanic;**76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;**ph. +380 (342) 59-60-47; e-mail: [myosyp@ukr.net](mailto:myosyp@ukr.net)*

*We consider the problem of minimizing the time of the first visit to origin of coordinates by Wiener process with drift.*

**Key words:** *Wiener process, stochastic exponent, optimal strategy*

УДК 517.53

## ПРО МІРУ ХАУСДОРФА МНОЖИНИ ВАЛІРОНІВСЬКИХ ДЕФЕКТНИХ ВЕКТОРІВ ЦІЛОЇ КРИВОЇ

**Я. І. Савчук**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@iung.edu.ua*

*Дано точнішу за відомі раніше метричну характеристику валіронівських дефектних векторів цілої кривої скінченного порядку.*

**Ключові слова:** *ціла крива, характеристика росту, функція наближення, валіронівський дефектний вектор, полярна множина, міра Хаусдорфа.*

Цілою кривою називається голоморфне відображення  $\vec{G}: C \rightarrow C^p$ , де  $p$  – натуральне число, більше за одиницю. Отже,  $p$ -вимірною цілою кривою має вигляд  $\vec{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z))$ , де компоненти  $g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z)$  – цілі (тобто аналітичні в усій комплексній площині) функції. Вважатимемо їх лінійно незалежними і без спільних нулів.

Для  $p$ -вимірної цілої кривої  $\vec{G}$  характеристика росту  $T(r, \vec{G})$  та функція наближення  $m(r, \vec{a}, \vec{G})$  при  $\vec{a} \neq \vec{0}$  визначаються рівностями

$$T(r, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|\vec{G}(re^{i\varphi})\| d\varphi,$$

$$m(r, \vec{a}, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\varphi})\| \cdot \|\vec{a}\|}{|\vec{G}(re^{i\varphi}) \cdot \vec{a}|} d\varphi.$$

Розглянемо

$$\Delta(\vec{a}, \vec{G}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}.$$

Якщо  $\Delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0$ , то  $\vec{a}$  називається валіронівським дефектним вектором.

Позначимо через  $V(\vec{G}) = \{ \vec{a} \in C^p \setminus \{ \vec{0} \} : \Delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0 \}$  множину валіронівських дефектних векторів цілої кривої  $\vec{G}$ .

Порядком цілої кривої  $\vec{G}$  називається величина  $\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r, \vec{G})}{\ln r}$ .

Відносно множини  $V(\vec{G})$  Фаворовим С.Ю. отримано такий результат [2]: перетин  $V(\vec{G})$  з довільною гіперплощиною з  $C^p$ , яка не

проходить через початок координат, має нульову  $\Gamma$ -ємність. Точніший результат отримав А. Садуллаєв [3]. Перш ніж його сформулювати, нагадаємо, що множина  $E \subset \mathbb{C}^n$  називається  $\mathbb{C}^n$ -полярною, якщо існує плюрісубгармонічна в  $\mathbb{C}^n$  функція  $\Phi(z) \neq -\infty$ , така, що  $E \subset \{z : \Phi(z) = -\infty\}$ . Результат А. Садуллаєва полягає в наступному (ми його формулюємо в змінній, але еквівалентній формі): Переріз  $V(\vec{G})$  з довільною гіперплощиною, яка не проходить через початок координат, є  $\mathbb{C}^{p-1}$  – полярною множиною.

Мною отримано такий результат.

**Теорема.** Нехай  $L \subset \mathbb{C}^p$  – гіперплощина, яка не проходить через початок координат,  $\vec{G}$  –  $p$ -вимірний ціла крива скінченного порядку. Тоді міра Хаусдорфа  $h^*(L \cap V(\vec{G})) = 0$  для всіх вимірюючих функцій  $h(t)$ , які задовольняють умові

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{t^{2p-3}(-\ln t)} dt < \infty. \quad (1)$$

З результату Садуллаєва випливає, що  $h^*(L \cap V(\vec{G})) = 0$  тільки для функцій  $h(t)$ , які задовольняють умові

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{t^{2p-3}} dt < \infty.$$

*Доведення.* Позначимо через  $S^p$  множину одиничних векторів із  $\mathbb{C}^p$ , перша ненульова компонента яких є додатним числом. Очевидно,  $\mathbb{C}^p = \{\lambda \vec{a} : \vec{a} \in S^p, \lambda \in \mathbb{C}\}$ , і для довільної цілої кривої  $\vec{G} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^p$  виконується  $\Delta(\vec{a}, \vec{G}) = \Delta(\lambda \vec{a}, \vec{G})$ ,  $\vec{a} \in \mathbb{C}^p \setminus \{\vec{0}\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Розглянемо довільну гіперплощину  $L = \mathbb{C}^{p-1}(\vec{c}, \lambda) = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p : \vec{a} \cdot \vec{c} = \lambda\}$ ,  $\vec{c} \in \mathbb{C}^p$ ,  $\|\vec{c}\| = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Нехай  $\vec{b} \in S^p$ ,  $\delta > 0$ ,  $r > |\lambda|$ . Покажемо, що множина  $\Theta_r = \mathbb{C}^{p-1}(\vec{c}, \lambda) \cap S^*(\vec{b}, \delta) \cap \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p : \|\vec{a}\| \leq r\}$ , де

$$S^*(\vec{b}, \delta) = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{C}^p : \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|} < \delta \right\},$$

покривається  $\left( \left[ \frac{1}{\delta} \right] + 1 \right)^{2p-4}$   $2p$ -вимірними ку-

бами зі сторонами довжиною  $\frac{4\delta r^2}{|\lambda|}$ . Нас цікавитимуть досить малі  $\delta > 0$ .

$$\text{Подамо} \quad \vec{c} = \beta \vec{b} + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_c \perp \vec{b}. \quad (2)$$

Очевидно,  $|\beta| \leq 1$ . Відповідно до (1) для довільного  $\vec{a} \in \Theta_r$  виконується

$$|\lambda| = |\vec{a} \cdot \vec{c}| = |\beta \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a}_c| \leq |\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{a} \cdot \vec{a}_c| \leq \delta \|\vec{a}\| + \|\vec{a}_c\| \cdot \|\vec{a}\| \leq \delta \cdot r + \|\vec{a}_c\| \cdot r,$$

звідки

$$\|\vec{a}_c\| \geq \frac{|\lambda|}{r} - \delta. \quad (3)$$

Отже, якщо вектор  $\vec{b} \in \mathcal{S}^p$  такий, що не виконується (2), то  $\Theta_r = \emptyset$ . Оскільки нас цікавлять досить малі  $\delta > 0$ , то розглядаємо тільки такі  $\mathcal{S}^*(\vec{b}, \delta)$  ( $\delta < \frac{|\lambda|}{2r}$ ), щоб виконувалось

$$\|\vec{a}_c\| \geq \frac{|\lambda|}{2r}, \quad (4)$$

де  $\vec{a}_c$  визначається умовою (2).

Нехай  $\tilde{\Theta}_r = \left\{ \vec{a} : \vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \in \Theta_r \right\}$ . Тоді для довільного вектора  $\vec{a} \in \tilde{\Theta}_r$  маємо:

$$\|\vec{a}\| \leq \left\| \vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right\| + \left\| \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right\| \leq r + |\lambda|, \quad (5)$$

$$\vec{a}\vec{c} = \left( \vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right) \vec{c} - \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \vec{c} = \lambda - \lambda = 0, \quad (6)$$

$$|\vec{a}\vec{b}| = \left| \left( \vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right) \vec{b} \right| \leq \delta \left\| \vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right\| \leq \delta r. \quad (7)$$

Позначимо  $\vec{d} = \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \in \mathcal{S}^p$ . Тоді  $\vec{d} \perp \vec{b}$ , і, відповідно до (2), (4), (6) та

(7) для довільного  $\vec{a} \in \tilde{\Theta}_r$  виконується

$$|\vec{a}\vec{d}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a}_c|}{\|\vec{a}_c\|} = \frac{|\beta| \cdot |\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}_c\|} \leq \frac{\delta r}{\|\vec{a}_c\|} \leq \frac{2\delta r^2}{|\lambda|} = \sigma. \text{ Оскільки } r > |\lambda|, \text{ то, відповідно до}$$

(7), виконується  $|\vec{a}\vec{b}| \leq \sigma$ .

Отже,  $\tilde{\Theta}_r$  міститься в множині  $\left\{ \vec{a} \in \mathcal{C}^p : |\vec{a}\vec{b}| \leq \sigma, |\vec{a}\vec{d}| \leq \sigma, \|\vec{a}\| \leq r + |\lambda| \right\}$ ,

де  $\vec{b} \perp \vec{d}$  та  $\|\vec{b}\| = \|\vec{d}\| = 1$ . Зрозуміло, що таку множину можна покрити

$$\left( \left[ \frac{r + |\lambda|}{\sigma} \right] + 1 \right)^{2p-4} = \left( \left[ \frac{(r + |\lambda|)|\lambda|}{2\delta r^2} \right] + 1 \right)^{2p-4} \quad 2p\text{-вимірними кубами зі сто-$$

ронами довжиною  $2\sigma$ . Те ж саме можна сказати і про множину  $\Theta_r = \lambda\vec{d} + \tilde{\Theta}_r$ . Нехай тепер  $h(t)$  – довільна вимірююча функція, яка задо-

вольняє умові (1). Але  $h^* \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} h^*(E_j)$ , і для і для довільної цілої

кривої  $\vec{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^p$  скінченного порядку виконується

$$V(\vec{G}) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( \bigcup_{s=1}^{\infty} (U_{\alpha_k} \cap \{ \vec{a} \in \mathcal{C}^p : \|\vec{a}\| \leq s \}) \right) \text{ де } U_{\alpha_k} \text{ – множини із } \mathcal{C}^p,$$

кожна з яких задовольняє умові: існують  $\alpha_k > 0$  і вектори  $\vec{b}_{kn} \in \mathcal{S}^p$ ,  $n=1,2,\dots$ , такі, що для довільного  $\vec{a} \in U_{\alpha_k}$  виконується  $\vec{a} \in \left\{ \vec{c} \in \mathcal{S}^p : |\vec{c} \cdot \vec{b}_{kn}| \leq \exp(-e^{n\alpha}) \right\}$  для нескінченної множини значень  $n$ . Тому нам досить довести, що для довільних  $\alpha > 0$  та  $r > 0$  виконується

$$h^*(U_\alpha \cap \{ \vec{a} \in \mathcal{C}^p : \|\vec{a}\| \leq r \} \cap \mathcal{C}^{p-1}(\vec{c}, \lambda)) = 0.$$

Нехай  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots$  – вектори із  $\mathcal{S}^p$ , що відповідають  $U_\alpha$ . Тоді для довільного  $N \in \mathbb{N}$  виконується

$$\Gamma = U_\alpha \cap \mathcal{C}^{p-1}(\vec{c}, \lambda) \cap \{ \vec{a} \in \mathcal{C}^p : \|\vec{a}\| \leq r \} \subset \bigcup_{j=N}^{\infty} \Theta_r(\vec{b}_j, \exp(-e^{j\alpha})). \quad (8)$$

Умова (1) рівносильна умові  $-\int_0^{\frac{h(t)}{t^{2p-4}}} d\left(\ln\left(\ln\frac{1}{t}\right)\right) < \infty$ , з якої випливає,

що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(t'_j)}{(t'_j)^{2p-4}} \left( \ln\left(\ln\frac{1}{t_j}\right) - \ln\left(\ln\frac{1}{t_{j-1}}\right) \right) < \infty, \quad (9)$$

де  $t'_j$  – точка мінімуму функції  $\frac{h(t)}{t^{2p-4}}$  на відрізку  $[t_j, t_{j-1}]$ .

Виберемо  $t_j = \exp(-e^{j\alpha})$ . Тоді із (9) отримаємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(t'_j)}{(t'_j)^{2p-4}} < \infty, \quad (10)$$

де  $\exp(-e^{j\alpha}) \leq t'_j \leq \exp(-e^{(j-1)\alpha})$ .

Очевидно,  $\Theta_r(\vec{b}_j, \exp(-e^{j\alpha})) \subset \Theta_r(\vec{b}_j, t'_j)$ , а множину  $\Theta_r(\vec{b}_j, t'_j)$ , як по-

казано вище, можна покрити  $\left(\left[\frac{1}{t'_j}\right] + 1\right)^{2p-4}$  кубами зі сторонами довжи-

ною  $\frac{4t'_j r^2}{|\lambda|}$ , або  $\left[\frac{4r^2}{|\lambda|} + 1\right]^{2p} \cdot \left(\left[\frac{1}{t'_j}\right] + 1\right)^{2p-4}$  кубами зі сторонами  $t'_j$ .

Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$ , відповідно до (8) та (10), маємо

$$h^*(\Gamma) \leq \sum_{j=N}^{\infty} \left[\frac{4r^2}{|\lambda|} + 1\right]^{2p} \cdot \left(\left[\frac{1}{t'_j}\right] + 1\right)^{2p-4} h(t'_j) < \varepsilon \text{ при } N = N(\varepsilon), \text{ звідки } h^*(\Gamma) = 0.$$

Теорема доведена.

**Приклад.** Існує  $\mathcal{C}^{p-1}$  – полярна множина  $E$  та вимірююча функція  $h(t)$ , яка задовольняє умові (1), така, що  $h^*(E) = \infty$ .

Дійсно, розглянемо  $K(t) = 2(-\log t)^\alpha - \alpha(-\log t)^{\alpha-1}$ , де  $\alpha < 1$ ;  $\tilde{h}_1(t) = (-\log t)^{-1}$ . За теоремою 4 із [4, с.41] знайдеться множина  $\tilde{E} \subset C$  – така, що

$$\tilde{h}_1^*(\tilde{E}) = 0. \quad (11)$$

З теореми 1 із [4, с.35] випливає, що

$$\tilde{h}^*(\tilde{E}) = \infty, \quad (12)$$

де  $\tilde{h}(t) = (-\log t)^\alpha$ .

Розглянемо множину  $E = \tilde{E} \times C^{p-2}$ . Вона  $C^{p-1}$  – полярна, оскільки, відповідно до (11) та теореми 5.14 із [5] множина  $\tilde{E}$  буде  $C$  – полярною.

Із (12) випливає, що  $\tilde{h}^*(E) = \infty$ , де  $h(t) = t^{2p-4}(-\log t)^\alpha$ . Разом з тим,  $h(t)$  задовольняє умові (1).

### Література

1. Петренко В.П. Целые кривые / В.П.Петренко. – Ч.: В.школа, 1984. – 136 с.
2. Фаворов С.Ю. Об одном свойстве целых кривых / С.Ю.Фаворов // Функц. анализ и его прилож. – 1975. – Т.9, №1. – С. 87-88.
3. Садуллаев А. Дефектные дивизоры в смысле Валирона / А.Садуллаев // Матем. сб. – 1979. – В.108(150). – №4. – С. 567-580.
4. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств / Л.Карлесон. – М.: Мир, 1971. – 128 с.
5. Хейман У. Субгармонические функции / У.Хейман, П.Кеннеди. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 10.05.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В., д.ф.-м.н., професором Лопушанським О.В (м. Львів)*

## ABOUT HAUSDORF'S MEASURE OF GREAT NUMBER OF VALIRON DEFECTIVE VECTORS OF WHOLE CURVE

**Ya. I. Savchuk**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;*

*ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: [math@nung.edu.ua](mailto:math@nung.edu.ua)*

*More precisely metrical description of Valiron imperfect vectors of whole curve of continuity order is given than known earlier.*

**Key words:** *whole curve, description of growth, function of approaching, Valiron imperfect vector, arctic great number, measure Hausdorff.*

## МОНОТОННІ СІМ'Ї НА ЦИКЛІЧНИХ НАПІВГРУПАХ

**В. М. Гаврилків**

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;  
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;  
e-mail: vgavrylkiv@gmail.com*

*У статті вивчаються праві і ліві нулі, односточкові ліві ідеали, мінімальний ідеал, центральні елементи, скоротні зліва і скоротні справа елементи напівгрупи  $\nu(S)$  монотонних сімей на циклічній напівгрупі  $S$ , а також характеризуються циклічні напівгрупи, розширення  $\nu(S)$  яких є комутативним.*

**Ключові слова:** *циклічна напівгрупа, монотонна сім'я, компактифікація Стоуна-Чеха.*

### Вступ

Дана стаття присвячена вивченню структури напівгруп монотонних сімей на циклічних напівгрупах.

Сім'я  $\mathbf{M}$  непорожніх підмножин множини  $X$  називається *монотонною*, якщо з  $B \supset A \in \mathbf{M}$  випливає, що  $B \in \mathbf{M}$ . Замкнена відносно скінченних перетинів монотонна сім'я  $\mathbf{F}$  називається *фільтром*. Фільтр  $\mathbf{F}_X = \{F \subset X : X \setminus F \text{ – скінченна}\}$  називається *фільтром Фреше* на множині  $X$ . Фільтр  $\mathbf{U}$  називається *ультрафільтром*, якщо  $\mathbf{U} = \mathbf{F}$  для будь-якого фільтра  $\mathbf{F}$ , який містить  $\mathbf{U}$ . Множина всіх монотонних сімей на множині  $X$  позначається через  $\nu(X)$ , а сім'я  $\beta(X)$  всіх ультрафільтрів на множині  $X$  називається *компактифікацією Стоуна-Чеха* множини  $X$ , див. [11], [12].

Кожне відображення  $f : X \rightarrow Y$  продовжується до відображення

$$\nu f : \nu(X) \rightarrow \nu(Y), \quad \nu f : \mathbf{M} \mapsto \langle f(M) \subset Y : M \in \mathbf{M} \rangle, \quad \text{див. [9]}$$

Тут для сім'ї  $\mathbf{B}$  непорожніх підмножин множини  $Y$  через  $\langle B \subset Y : B \in \mathbf{B} \rangle$  позначено сім'ю

$$\langle B \subset Y : B \in \mathbf{B} \rangle = \{A \subset Y : \exists B \in \mathbf{B} (B \subset A)\}.$$

Ультрафільтр  $\{x\}$  називається *головним ультрафільтром*, породженим множиною  $\{x\}$ ,  $x \in X$ . Можна вважати, що  $X \subset \beta(X) \subset \nu(X)$ , якщо ототожнити кожен точку  $x \in X$  з головним ультрафільтром  $\langle \{x\} \rangle$ , породженим множиною  $\{x\}$ .

В [9] доведено, що кожна асоціативна бінарна операція  $*$ :  $S \times S \rightarrow S$  продовжується до асоціативної бінарної операції  $\circ$ :  $\nu(S) \times \nu(S) \rightarrow \nu(S)$  за формулою

$$L \circ M = \left\langle \bigcup_{a \in L} a * M_a : L \in \mathbf{L}, \{M_a\}_{a \in L} \subset \mathbf{M} \right\rangle$$

для монотонних сімей  $L, M \in \nu(S)$ . В цьому випадку компактифікація Стоуна-Чеха  $\beta(S)$  є піднапівгрупою напівгрупи монотонних сімей  $\nu(S)$ .

Непорожня підмножина  $I$  напівгрупи  $(S, *)$  називається *ідеалом* (відповідно *правим ідеалом*, *лівим ідеалом*), якщо  $I * S \cup S * I \subset I$  (відповідно  $I * S \subset I$ ,  $S * I \subset I$ ). Елемент  $z$  напівгрупи  $(S, *)$  називається *нулем* (відповідно *лівим нулем*, *правим нулем*) в  $S$ , якщо  $a * z = z * a = z$  (відповідно  $z * a = z$ ,  $a * z = z$ ) для кожного  $a \in S$ . Це рівносильно тому, що  $\{z\}$  є ідеалом (відповідно правим ідеалом, лівим ідеалом) в  $S$ . Ідеал  $I \subset S$  називається *мінімальним*, якщо кожен ідеал напівгрупи  $S$ , що міститься в  $I$ , співпадає з  $I$ . Аналогічно визначаються мінімальні ліві та мінімальні праві ідеали напівгрупи  $S$ . Об'єднання  $K(S)$  всіх мінімальних лівих (правих) ідеалів в  $S$  співпадає з мінімальним ідеалом напівгрупи  $S$ , (див.[11, теор.2.8]). Напівгрупа  $(S, *)$  називається *напівгрупою правих нулів*, якщо  $a * b = b$  для всіх  $a, b \in S$ .

Відображення  $\varphi: S \rightarrow T$  між двома напівгрупами  $(S, *)$  та  $(T, \circ)$  називається *гомоморфізмом*, якщо  $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$  для всіх  $a, b \in S$ . Гомоморфізм  $\varphi: S \rightarrow I$  з напівгрупи  $S$  в ідеал  $I \subset S$  називається *ретракцією*, якщо  $\varphi(a) = a$  для будь-якого елемента  $a \in I$ . Елемент  $a$  напівгрупи  $S$  називається *скоротним зліва (справа)*, якщо для довільних елементів  $x, y \in S$  з рівності  $ax = ay$  (відповідно  $xa = ya$ ) випливає, що  $x = y$ . Це рівносильно тому, що лівий (відповідно правий) зсув  $l_a: S \rightarrow S$ ,  $l_a: x \mapsto a * x$ , (відповідно  $r_a: S \rightarrow S$ ,  $r_a: x \mapsto x * a$ ) є ін'єктивним відображенням. Напівгрупа, всі елементи якої є скоротними зліва (справа), називається *напівгрупою з лівими (правими) скороченнями*.

Напівгрупа  $\langle a \rangle = \{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , породжена елементом  $a$ , називається *циклічною*. Якщо циклічна напівгрупа є нескінченною, то вона ізоморфна до адитивної напівгрупи  $\mathbb{N}$ . Скінченна циклічна напівгрупа  $S = \langle a \rangle$  також має нескладну структуру [7]. Існують натуральні числа  $r$  і  $m$ , які називаються *індексом* і *періодом* напівгрупи  $S$ , такі що:

- $S = \{a, a^2, \dots, a^{m+r-1}\}$  і  $m+r-1 = |S|$ ;

- для кожних  $i, j \in \omega$  рівність  $a^{r+i} = a^{r+j}$  виконується тоді і лише тоді, коли  $i \equiv j \pmod{m}$ ;

- $C_m = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$  є мінімальним ідеалом, циклічною і

максимальною підгрупою напівгрупи  $S$  з одиницею  $e = a^n \in C_m$ , де  $n$  ділиться на  $m$ .



Надалі скінченну циклічну напівгрупу індекса  $r$  і періода  $m$  позначатимемо через  $C_{r,m}$ , а її максимальну підгрупу – через  $C_m$ .

### 1 Гомоморфізми, праві, ліві нулі та мінімальні (ліві) ідеали

**Твердження 1.1.** Для кожного гомоморфізму  $\varphi: S \rightarrow T$  між напівгрупами  $(S, *_1)$  та  $(T, *_2)$  індуковане відображення  $\nu\varphi: \nu(S) \rightarrow \nu(T)$  є гомоморфізмом напівгруп  $(\nu(S), \circ_1)$  та  $(\nu(T), \circ_2)$ .

*Доведення.* Зафіксувавши дві монотонні сім'ї  $L, M \in \nu(S)$ , одержимо

$$\begin{aligned} \nu\varphi(L \circ_1 M) &= \nu\varphi(\langle \bigcup_{x \in L} x *_1 M_x : L \in L, \{M_x\}_{x \in L} \subset M \rangle) = \\ &= \langle \varphi(\bigcup_{x \in L} x *_1 M_x) : L \in L, \{M_x\}_{x \in L} \subset M \rangle = \\ &= \langle \bigcup_{x \in L} \varphi(x) *_2 \varphi(M_x) : L \in L, \{M_x\}_{x \in L} \subset M \rangle = \\ &= \langle \bigcup_{x \in \varphi(L)} x *_2 \varphi(M_x) : L \in L, \{\varphi(M_x)\}_{x \in \varphi(L)} \subset \nu\varphi(M) \rangle = \\ &= \langle \varphi(L) : L \in L \rangle \circ_2 \langle \varphi(M) : M \in M \rangle = \nu\varphi(L) \circ_2 \nu\varphi(M). \end{aligned}$$

Зауважимо, що для піднапівгрупи  $T$  напівгрупи  $S$  відображення  $i: \nu(T) \rightarrow \nu(S)$ ,  $i: A \rightarrow \langle A \rangle_S$  є ін'єктивним гомоморфізмом, а тому надалі ми ототожнюємо напівгрупу  $\nu(T)$  з піднапівгрупою  $i(\nu(T)) \subset \nu(S)$ .

**Лема 1.1.** Нехай  $I$  – ідеал напівгрупи  $S$ . Якщо відображення  $\varphi: S \rightarrow I$  є ретракцією, то відображення  $\nu\varphi: \nu(S) \rightarrow \nu(I)$  також є ретракцією.

*Доведення.* Дійсно, нехай  $A \in \nu(I)$ ,  $M \in \nu(S)$ , тоді

$$\begin{aligned} A \circ M &= \langle \bigcup_{a \in A} a *_1 M_a : A \in A, A \subset I, \{M_a\}_{a \in A} \subset M \rangle = \\ &= \langle \bigcup_{a \in A} a *_1 M_a : A \in A, \{M_a\}_{a \in A} \subset M, \bigcup_{a \in A} a *_1 M_a \subset I \rangle \in \nu(I). \end{aligned}$$

Аналогічно  $M \circ A \in \nu(I)$ , а тому  $\nu(I)$  є ідеалом напівгрупи  $\nu(S)$ .

Якщо  $A \in \nu(I)$ , то

$$\nu\varphi(A) = \langle \varphi(A) : A \subset I, A \in A \rangle = \langle A \subset I : A \in A \rangle = \{A \subset I : A \in A\} = A,$$

а отже,  $\nu\varphi$  – ретракція.

**Лема 1.2.** Нехай  $I$  – ідеал напівгрупи  $S$  і відображення  $\varphi: S \rightarrow I$  є ретракцією. Напівгрупа  $S$  має правий (лівий) нуль тоді і лише тоді, коли напівгрупа  $I$  має правий (лівий) нуль, причому всі праві і ліві нулі напівгрупи  $S$  містяться в  $I$ .

*Доведення.* Нехай  $z$  – правий (лівий) нуль напівгрупи  $S$ , тоді  $sz = z$  ( $zs = z$ ) для будь-якого  $s \in S$ . Оскільки  $\varphi$  – гомоморфізм, то  $\varphi(s)\varphi(z) = \varphi(z)$  ( $\varphi(z)\varphi(s) = \varphi(z)$ ). Зокрема, для будь-якого  $s \in I$  виконується рівність  $\varphi(s) = s$ , а тому  $s\varphi(z) = \varphi(s)\varphi(z) = \varphi(z)$  ( $\varphi(z)s = \varphi(z)\varphi(s) = \varphi(z)$ ). Таким чином,  $\varphi(z)$  – правий (лівий) нуль напівгрупи  $I$ .

Навпаки, нехай  $z \in I$  – правий (лівий) нуль напівгрупи  $I$ . Оскільки  $I$  – ідеал, то для будь-якого  $s \in S$  маємо  $sz, zs \in I$ , а отже,  $sz = \varphi(sz) = \varphi(s)\varphi(z) = \varphi(s)z = z$  ( $zs = \varphi(zs) = \varphi(z)\varphi(s) = z\varphi(s) = z$ ) і  $z$  – правий (лівий) нуль напівгрупи  $S$ .

Якщо  $z$  – правий (лівий) нуль напівгрупи  $S$ , то  $z = sz \in I$  ( $z = zs \in I$ ), де  $s \in I$ . Таким чином, всі праві (ліві) нулі напівгрупи  $S$  містяться в  $I$ .

Нехай  $e$  – одиниця максимальної підгрупи  $C_m$  циклічної напівгрупи  $C_{r,m}$ .

**Лема 1.3.** Відображення  $\varphi: C_{r,m} \rightarrow C_m$ ,  $\varphi(x) = ex$  є ретракцією, причому  $\varphi(x)y = xy$  для будь-яких  $x \in C_{r,m}$  і  $y \in C_m$ .

*Доведення.* Оскільки підгрупа  $C_m$  є ідеалом напівгрупи  $C_{r,m}$ , то  $\varphi(x) = ex \in C_m$ . Тоді  $\varphi(xy) = exy = eexy = exe y = \varphi(x)\varphi(y)$  для будь-яких  $x, y \in C_{r,m}$  і  $\varphi(x) = ex = x$  при  $x \in C_m$ . А отже, відображення  $\varphi: C_{r,m} \rightarrow C_m$  є ретракцією. Далі для будь-яких  $x \in C_{r,m}$  і  $y \in C_m$  маємо, що  $xy \in C_m$ , а тому  $\varphi(xy) = xy$ . З іншого, боку  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x)y$ , бо  $y \in C_m$ .

З лем 1.1.-1.3. випливає наступне:

**Твердження 1.2.** Напівгрупа  $\nu(C_{r,m})$  містить правий (лівий) нуль тоді і лише тоді, коли її піднапівгрупа  $\nu(C_m)$  містить правий (лівий) нуль. Причому кожен правий (лівий) нуль  $\nu(C_{r,m})$  належить  $\nu(C_m)$ .

Нехай  $S$  – напівгрупа. В [9] доведено, що монотонна сім'я  $M \in \nu(S)$  є правим нулем в  $S$  тоді і лише тоді, коли  $M$  є інваріантною в тому сенсі, що  $sM, s^{-1}M \in M$  для будь-якого  $s \in S$  і для будь-якого  $M \in M$ , де  $s^{-1}M = \{a \in S : sa \in M\}$ .

Оскільки фільтр Фреше на нескінченній циклічній напівгрупі  $N$  є інваріантним, то напівгрупа  $\nu(N)$  містить правий нуль. Більше того, аналогічними міркуваннями як в теоремі 2.2 з [1] можна показати, що напівгрупа  $\nu(N)$  містить  $2^c$  правих нулів.

Оскільки для кожної групи  $G$  монотонна сім'я  $\{G\}$  є інваріантною, а отже, правим нулем напівгрупи  $\nu(G)$ , то з попереднього твердження випливає наступне:

**Твердження 1.3.** Для кожної циклічної напівгрупи  $S$  напівгрупа  $\nu(S)$  містить правий нуль.

**Твердження 1.4.** Для скінченної циклічної напівгрупи  $C_{r,m}$  напівгрупа  $\nu(C_{r,m})$  містить (лівий) нуль тоді і тільки тоді, коли період  $m = 1$ .

*Доведення.* Якщо період  $m=1$ , то напівгрупа  $\nu(C_1)$  містить єдиний елемент, який, очевидно, є її нулем. Тоді згідно з твердженням 1.2 напівгрупа  $\nu(C_{r,1})$  також містить (лівий) нуль. У випадку  $m > 1$  напівгрупа  $\nu(C_m)$  містить принаймні два правих нулі  $Z_1 = \{C_m\}$  і  $Z_2 = \langle \{g\} : g \in C_m \rangle$ . Таким чином,  $\nu(C_m)$  не містить жодного лівого нуля, і з твердження 1.2 випливає, що напівгрупа  $\nu(C_{r,m})$  не містить (лівих) нулів.

Далі ми охарактеризуємо циклічні напівгрупи  $S$ , для яких напівгрупа  $\nu(S)$  містить одноточкові мінімальні ліві ідеали.

Монотонна сім'я  $Z \in \nu(S)$  є правим нулем напівгрупи  $\nu(S)$  тоді і тільки тоді, коли одноточкова множина  $\{Z\}$  є мінімальним лівим ідеалом у  $\nu(S)$ . Оскільки всі мінімальні ліві ідеали ізоморфні між собою і об'єднання  $K(\nu(S))$  всіх мінімальних лівих ідеалів в  $\nu(S)$  співпадає з мінімальним ідеалом напівгрупи  $\nu(S)$  (див.[11,теор.2.8]), то з тверджень 1.3 і 1.4 випливає наступна

**Теорема 1.** Для циклічної напівгрупи  $S$  всі мінімальні ліві ідеали напівгрупи  $\nu(S)$  є одноточковими множинами. В цьому випадку мінімальний ідеал  $K(\nu(S))$  напівгрупи  $\nu(S)$  є її піднапівгрупою правих нулів. Циклічна напівгрупа містить одноточкові мінімальні праві ідеали тоді і лише тоді, коли вона є скінченною циклічною напівгрупою періода 1.

## 2 Комутативність та центральні елементи

**Теорема 2.** Для циклічної напівгрупи  $S$  напівгрупа  $\nu(S)$  є комутативною тоді і лише тоді, коли  $S$  є скінченною циклічною напівгрупою періода  $m=1$  і індекса  $r \in \{1,2,3\}$ .

*Доведення.* Якщо період  $m$  скінченної циклічної напівгрупи  $C_{r,m}$  більший одиниці, то з доведення твердження 1.4 відомо, що напівгрупа  $\nu(C_{r,m})$  містить принаймні два правих нулі, а тому не може бути комутативною.

Нехай індекс циклічної напівгрупи  $S$ , породженої елементом  $a$ , більший за 3 або вона є нескінченною циклічною напівгрупою. Розглянемо монотонні сім'ї  $A = \langle \{a\}, \{a^2\} \rangle$  та  $B = \langle \{a, a^2\} \rangle$ . Оскільки  $A \circ B = \langle \{a^2, a^3\}, \{a^3, a^4\} \rangle$ , а  $B \circ A = \langle \{a^3\} \rangle$ , то дані сім'ї не комутують, і напівгрупа  $\nu(S)$  не є комутативною.

Напівгрупа  $\nu(C_{1,1})$  є одноточковою. Для циклічної напівгрупи  $C_{2,1} = \{a, a^2 \mid a^3 = a^2\}$  добуток будь-яких монотонних сімей напівгрупи

$\nu(C_{2,1})$  дорівнює головному ультрафільтру  $\langle\langle a^2 \rangle\rangle$ . Таким чином, напівгрупи  $G(C_{1,1})$  і  $G(C_{2,1})$  комутативні.

Розглянемо циклічну напівгрупу  $C_{3,1} = \{a, a^2, a^3 \mid a^4 = a^3\}$ . З формули множення

$$A \circ B = \langle \bigcup_{a \in A} a * B_a : A \in \mathcal{A}, \{B_a\}_{a \in A} \subset B \rangle$$

впливає, що головні ультрафільтри комутують з усіма монотонними сім'ями. Якщо  $A$  і  $B$  не є головними ультрафільтрами, але всі їх елементи містять елемент  $a$ , то  $A \circ B = B \circ A = \langle\langle a^2, a^3 \rangle\rangle$ . У випадку, коли  $A$  або  $B$  містить елемент  $M \subset C_{3,1} \setminus \{a\}$ , добуток  $MA = AM = \{a^3\}$  для будь-якого  $A \in \mathcal{A}, B$ . І якщо при цьому  $\{a\} \in A$  і  $\{a\} \in B$ , то  $A \circ B = B \circ A = \langle\langle a^2 \rangle\rangle, \langle\langle a^3 \rangle\rangle$ , в іншому випадку  $A \circ B = B \circ A = \langle\langle a^3 \rangle\rangle$ . Таким чином, всі елементи  $\nu(C_{3,1})$  комутують.

Оскільки циклічна напівгрупа  $S$  є комутативною, то з формули множення

$$A \circ B = \langle \bigcup_{a \in A} a * B_a : A \in \mathcal{A}, \{B_a\}_{a \in A} \subset B \rangle$$

впливає, що всі головні ультрафільтри є центральними в напівгрупі  $\nu(S)$ . В статті [9] доведено, що для групи  $G$  монотонна сім'я є центральною в  $\nu(G)$ , тоді і тільки тоді, коли вона є головним ультрафільтром. Ми покажемо, що для скінченної циклічної напівгрупи  $C_{r,m}$  напівгрупа  $\nu(C_{r,m})$  містить центральні елементи, які не є головними ультрафільтрами.

**Лема 2.1.** Нехай  $\varphi: S \rightarrow I$  – ретракція напівгрупи  $S$  на ідеал  $I$ . Якщо  $a$  є центральним елементом у напівгрупі  $S$ , то  $\varphi(a)$  є центральним елементом у напівгрупі  $I$

*Доведення.* Дійсно, для будь-якого  $x \in I$  маємо

$$\varphi(a)x = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(ax) = \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = x\varphi(a).$$

**Теорема 3.** Для кожної скінченної циклічної напівгрупи  $C_{r,m}$  центр напівгрупи  $\nu(C_{r,m})$  містить монотонні сім'ї, які не є головними ультрафільтрами. Центр напівгрупи  $\nu(C_{2,m})$  містить  $m+2$  елементи.

*Доведення.* Оскільки за лемами 1.3 і 1.1 відображення  $\varphi: C_{r,m} \rightarrow C_m$ ,  $\varphi(x) = ex$  і  $\nu\varphi: \nu(S) \rightarrow \nu(I)$  є ретракціями, а центральними елементами напівгрупи  $\nu(C_m)$  є тільки головні ультрафільтри, то з леми 2.1 випливає, що якщо монотонна сім'я  $M \in \nu(C_{r,m})$  є центральною, то  $M \subset \langle(\nu\varphi)^{-1}(\langle\langle x \rangle\rangle)\rangle, x \in C_m$ . Нехай  $a$  – твірний елемент напівгрупи  $C_{r,m}$ . Розглянемо елементи  $a^{r-1}$  та

$\varphi(a^{r-1}) = ea^{r-1}$ . Ми стверджуємо, що монотонні сім'ї  $A = \langle \{a^{r-1}, ea^{r-1}\} \rangle$  і  $B = \langle \{a^{r-1}\}, \{ea^{r-1}\} \rangle$  є центральними в напівгрупі  $\nu(C_{r,m})$ .

Оскільки  $a^{r-1}x \in C_m = \{a^r, \dots, a^{r+m-1}\}$  для будь-якого  $x \in C_{r,m}$ , то  $a^{r-1}x = \varphi(a^{r-1}x) = \varphi(a^{r-1})\varphi(x)$ . З іншого боку, оскільки  $C_m$  – ідеал  $C_{r,m}$ , то  $\varphi(a^{r-1})x \in C_m$  і  $\varphi(a^{r-1})x = \varphi(\varphi(a^{r-1})x) = \varphi(\varphi(a^{r-1}))\varphi(x) = \varphi(a^{r-1})\varphi(x)$ . Таким чином,  $\varphi(a^{r-1})x = a^{r-1}x$  для будь-якого  $x \in C_{r,m}$ . Тоді

$$A \circ M = \langle \{\varphi(a)\} \rangle \circ M = M \circ \langle \{\varphi(a)\} \rangle = M \circ A \quad \text{і}$$

$B \circ M = \langle \{\varphi(a)\} \rangle \circ M = M \circ \langle \{\varphi(a)\} \rangle = M \circ B$  для будь-якого  $M \in \nu(C_{r,m})$ , а тому  $A$  і  $B$  є центральними елементами напівгрупи  $\nu(C_{r,m})$ .

Розглянемо циклічну напівгрупу  $C_{2,m} = \{a, a^2, \dots, a^{m+1} \mid a^{m+2} = a^2\}$ . Одиницею максимальної підгрупи  $C_m$  є елемент  $e = a^m$ . Оскільки  $\varphi(a) = ea = a^m a = a^{m+1}$ , то єдиний елементом групи  $C_m$  з неодноточковим прообразом при ретракції  $\varphi: C_{2,m} \rightarrow C_m$  є  $a^{m+1}$ . Таким чином, центральними елементами в напівгрупі  $\nu(C_{2,m})$ , які не є головними ультрафільтрами, є лише монотонні сім'ї  $\langle \{a\}, \{a^{m+1}\} \rangle$  та  $\langle \{a, a^{m+1}\} \rangle$ , які ми розглянули вище.

### 3 Скоротні справа (зліва) елементи

В цьому підрозділі ми опишемо скоротні зліва (справа) елементи розширення  $\nu(S)$  циклічної напівгрупи  $S$ .

**Твердження 3.1.** Напівгрупа  $\nu(C_{r,m})$  містить скоротні (зліва, справа) елементи тоді і лише тоді, коли індекс  $r$  циклічної напівгрупи  $C_{r,m}$  дорівнює 1.

*Доведення.* Нехай індекс  $r > 1$  і  $a$  – твірний елемент напівгрупи  $C_{r,m}$ . В доведенні теореми 3 ми показали, що  $\varphi(a^{r-1})x = a^{r-1}x$  для будь-якого  $x \in C_{r,m}$ .

Нехай  $M$  – довільна монотонна сім'я на напівгрупі  $C_{r,m}$ , тоді

$$\langle \{a^{r-1}\} \rangle \circ M = \langle \bigcup_{a \in \{a^{r-1}\}} a * M_a : \{M_a\}_{a \in L} \subset M \rangle = \langle a^{r-1}M : M \in M \rangle =$$

$$= \langle \varphi(a^{r-1})M : M \in M \rangle = \langle \varphi(a^{r-1}) \rangle \circ M \quad \text{і}$$

$$M \circ \langle \{a^{r-1}\} \rangle = \langle \bigcup_{a \in M} a * \{a^{r-1}\} : M \in M \rangle = \langle Ma^{r-1} : M \in M \rangle =$$

$$= \langle M\varphi(a^{r-1}) : M \in M \rangle = M \circ \langle \{\varphi(a^{r-1})\} \rangle.$$

Оскільки  $a^{r-1} \neq \varphi(a^{r-1})$ , то монотонна сім'я  $M$  не є ні скоротною зліва, ні скоротною справа.

Якщо  $r = 1$ , то циклічна напівгрупа  $C_{1,m} = C_m$  є групою. Нехай  $e$  – одиниця групи  $C_m$ . Тоді  $\langle\{e\}\rangle \circ M = M = M \circ \langle\{e\}\rangle$  для будь-якого  $M \in \nu(C_m)$  і з рівностей  $X \circ \langle\{e\}\rangle = Y \circ \langle\{e\}\rangle$  та  $\{e\} \circ X = \{e\} \circ Y$  випливає, що  $X = Y$ . Таким чином, головний ультрафільтр  $\langle\{e\}\rangle$  є скоротним елементом напівгрупи  $\nu(C_{1,m})$ .

Якщо  $G$  – група, то з формули множення

$$L \circ M = \langle \bigcup_{a \in L} a * M_a : L \in L, \{M_a\}_{a \in L} \subset M \rangle$$

в напівгрупі  $\nu(G)$  випливає, що добуток  $L \circ M$  двох монотонних сімей  $L$  і  $M$  є головним ультрафільтром тоді і тільки тоді, коли одночасно  $L$  і  $M$  є головними ультрафільтрами. Таким чином, одержуємо наступне

**Твердження 3.2.** Для довільної групи  $G$  множина  $\nu(G) \setminus \{\{g\} : g \in G\}$  є ідеалом в  $\nu(G)$ .

**Лема 3.1.** Напівгрупа  $S$  є напівгрупою з лівими (правими) скороченнями тоді і лише тоді, коли всі головні ультрафільтри є скоротними зліва (справа) елементами в розширенні  $\nu(S)$ .

*Доведення.* Якщо елемент  $a \in S$  не є скоротним зліва (справа) в напівгрупі  $S$ , то й головний ультрафільтр, породжений елементом  $a$ , не є скоротним в  $\nu(S)$ .

Нехай  $S$  є напівгрупою з лівими (правими) скороченнями,  $a \in S$  і  $X, Y \in \nu(S)$ ,  $X \neq Y$ . Не обмежуючи загальності можна вважати, що  $X \in X \setminus Y$  для деякого  $X \in X$ . Тоді  $(S \setminus X) \cap Y \neq \emptyset$  для будь-якого  $Y \in Y$ . Оскільки всі елементи напівгрупи  $S$  є скоротними зліва (справа), то  $(S \setminus aX) \cap aY \neq \emptyset$  ( $(S \setminus Xa) \cap Ya \neq \emptyset$ ), а тому  $\langle\{a\}\rangle \circ X \neq \langle\{a\}\rangle \circ Y$  ( $X \circ \langle\{a\}\rangle \neq Y \circ \langle\{a\}\rangle$ ). Таким чином, лівий  $l_{\langle\{a\}\rangle}$  (правий  $r_{\langle\{a\}\rangle}$ ) зсув є ін'єктивним відображенням і головний ультрафільтр  $\langle\{a\}\rangle$  є скоротним зліва (справа).

**Твердження 3.3.** Елемент  $M \in \nu(C_{1,m})$  є скоротним зліва (справа), тоді і лише тоді, коли  $M$  є головним ультрафільтром.

*Доведення.* Оскільки в будь-якій групі, зокрема циклічній  $C_{1,m}$ , всі елементи є скоротними, то за лемою 3.1 всі головні ультрафільтри є скоротними елементами в розширенні  $\nu(C_{1,m})$ .

Припустимо, що деяка монотонна сім'я  $M \in \nu(C_{1,m}) \setminus \{\{g\} : g \in C_{1,m}\}$  є скоротною зліва. Це означає, що лівий зсув  $l_M : \nu(C_{1,m}) \rightarrow \nu(C_{1,m})$ ,  $l_M : A \mapsto M \circ A$  є ін'єктивним. Згідно з твердженням 3.2 множина  $\nu(C_{1,m}) \setminus \{\{g\} : g \in C_{1,m}\}$  є ідеалом в  $\nu(C_{1,m})$ .

Отже,  $l_M(\nu(C_{1,m})) = M \circ \nu(C_{1,m}) \subset \nu(C_{1,m}) \setminus \{\{g\} : g \in C_{1,m}\}$ . Оскільки  $\nu(C_{1,m})$  є скінченною, то  $l_M$  не може бути ін'єктивним.

Для скоротних справа елементів доведення аналогічне.

Нескінченна підмножина  $T \subset \mathbf{N}$  називається *тонкою*, якщо перетин  $(m+T) \cap (n+T)$  є скінченним для будь-яких  $m, n \in \mathbf{Z}, m \neq n$ .

Прикладом тонкої множини є множина  $T = \{2^n : n \in \mathbf{N}\}$ . Для підмножин  $A, B \in \mathbf{N}$  будемо писати, що  $A \subset^* B$ , якщо  $A \setminus B$  є скінченною, та  $A =^* B$ , якщо  $A \subset^* B$  і  $B \subset^* A$ .

**Теорема 4.** Монотонна сім'я є скоротною зліва в напівгрупі  $\nu(\mathbf{N})$  тоді і лише тоді, коли вона є головним ультрафільтром.

*Доведення.* Оскільки нескінченна циклічна напівгрупа  $\mathbf{N}$  є напівгрупою з лівими і правими скороченнями, то з леми 3.1 випливає, що всі головні ультрафільтри є скоротними елементами в напівгрупі  $\nu(\mathbf{N})$ .

Припустимо, що монотонна сім'я  $M$  є скоротною зліва в  $\nu(\mathbf{N})$ .

Спершу покажемо, що  $M$  містить одноточкову множину. Припустимо протилежне, що  $|M| \geq 2$  для будь-якого  $M \in M$ . Нехай  $T \subset \mathbf{N}$  – деяка тонка множина. Розглянемо фільтри Фреше  $F_N$  і  $F_{N \setminus T}$  на множинах  $\mathbf{N}$  і  $\mathbf{N} \setminus T$  відповідно. Очевидно, що  $F_N \subset F_{N \setminus T}$ . Оскільки  $F_N$  є інваріантним на множині  $\mathbf{N}$ , то  $F_N$  є правим нулем напівгрупи  $\nu(\mathbf{N})$ . Таким чином,  $F_N = M \circ F_N \subset M \circ F_{N \setminus T}$ . Покажемо, що  $M \circ F_{N \setminus T} \subset F_N$ . Нехай

$\bigcup_{m \in M} (m + F_m) \in M \circ F_{N \setminus T}$ , де  $M \in M, F_m \in F_{N \setminus T}$ . Зафіксуємо деякі  $a, b \in M$ ,  $a \neq b$ . Тоді

$$\mathbf{N} \setminus \bigcup_{m \in M} (m + F_m) = \bigcap_{m \in M} (\mathbf{N} \setminus (m + F_m)) \subset (\mathbf{N} \setminus (a + F_a)) \cap (\mathbf{N} \setminus (b + F_b)) =^* (a + (\mathbf{N} \setminus F_a)) \cap (b + (\mathbf{N} \setminus F_b)) =^* (a + T) \cap (b + T).$$

Оскільки перетин  $(a+T) \cap (b+T)$  є скінченним, то й множина  $\mathbf{N} \setminus \bigcup_{m \in M} (m + F_m)$  є скінченною, а отже,  $\bigcup_{m \in M} (m + F_m) \in F_N$ . Таким чином,  $M \circ F_N = M \circ F_{N \setminus T}$ , що протирічить тому, що  $M$  є скоротною зліва монотонною сім'єю напівгрупи  $\nu(\mathbf{N})$ .

Отже,  $M$  містить деяку одноточкову множину  $\{c\}$ . Ми стверджуємо, що  $M$  збігається з головним ультрафільтром, породженим  $\{c\}$ . Припустивши протилежне, отримуємо, що  $\mathbf{N} \setminus \{c\} \in M$ . Нехай  $A$  – монотонна сім'я всіх нескінченних підмножин множини  $\mathbf{N}$ , а  $B$  – монотонна сім'я всіх нескінченних підмножин множини  $\mathbf{N}$ , які не містяться в тонкій множині  $T$ . Тоді  $M \circ B \subset M \circ A \subset A$ . Покажемо, що  $A \subset M \circ B$ . Нехай  $A \in A$ . Покладемо  $B = (A - c) \cap \mathbf{N}$ . Якщо  $B$  не є підмножиною множини  $T$ , то

$$M \circ B \ni \{c\} + B = c + ((A - c) \cap \mathbf{N}) \subset c + (A - c) = A.$$

Звідки випливає, що  $A \in M \circ B$ . В іншому випадку, якщо  $B = (A - c) \cap \mathbf{N} \subset T$ , то для кожного  $x \in \mathbf{N} \setminus \{c\} \in M$  покладемо

$B_x = (A-x) \cap \mathbf{N}$ . Маємо, що  $B_x =^* A-x = A-c + (c-x) \subset^* T + (c-x)$  і  $B_x \cap T \subset^* (T + (c-x)) \cap T$ . Оскільки множина  $T$  є тонкою, то перетин  $B_x \cap T$  є скінченним і  $B_x$  не є підмножиною множини  $T$ . Отже,  $B_x \in \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M} \circ \mathbf{B} \ni \bigcup_{x \in (\mathbf{N} \setminus \{c\})} (x + B_x) \subset A$  і  $A \in \mathbf{M} \circ \mathbf{B}$ . Таким чином,  $\mathbf{M} \circ \mathbf{B} = \mathbf{M} \circ \mathbf{A} = \mathbf{A}$ , що суперечить вибору  $\mathbf{M}$  як скоротної зліва монотонної сім'ї в  $\nu(\mathbf{N})$ .

### Література

1. Banakh T. Algebra in superextensions of groups, I: zeros and commutativity / T.Banakh, V.Gavrylkiv, O.Nykyforchyn // Algebra Discrete Math. – 2008. – No.3. – P. 1-29.
2. Banakh T. Algebra in superextension of groups, II: cancelativity and centers / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 2008. – No.4. – P. 1-14.
3. Banakh T. Algebra in superextension of groups: minimal left ideals / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 31 (2009). – P. 142-148.
4. Banakh T. Algebra in the superextensions of twinic groups / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Dissert. Math. – 473 (2010). – 74 pp.
5. Banakh T. Algebra in superextensions of semilattices / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 13:1 (2012). – P. 26-42.
6. Banakh T. Algebra in superextensions of inverse semigroups, / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 13:2 (2012). – P. 147-168.
7. Clifford A.H. The algebraic theory of semigroups. Vol. I. / A.H.Clifford, G.B.Preston / Mathematical Surveys. – 7. AMS, Providence, RI, 1961.
8. Gavrylkiv V. The spaces of inclusion hyperspaces over noncompact spaces / V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 28:1 (2007). – P. 92-110.
9. Gavrylkiv V. Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces / V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 29:1 (2008). – P. 18-34.
10. Gavrylkiv V. On representation of semigroups of inclusion hyperspaces / V.Gavrylkiv // Carpathian Mathematical Publication. – 2:1 (2010). – P. 24-34.
11. Hindman N. Algebra in the Stone-Čech compactification, de Gruyter / N.Hindman, D.Strauss. – Berlin, New York, 1998.
12. Teleiko A. Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces A.Teleiko, M.Zarichnyi. – VNTL, Lviv, 1999.

*Стаття поступила в редакційну колегію 24.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.ф-м.н., доцентом Заторським Р.А.,  
д.т.н., професором Обжерінім Ю.Є. (м. Севастополь)*



---

**MONOTONE FAMILIES ON CYCLIC SEMIGROUPS****V. M. Gavrylkiv***Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;**76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;**e-mail: vgavrylkiv@gmail.com*

*Given a cyclic semigroup  $S$  we study right and left zeros, singleton left ideals, the minimal ideal, central elements, left cancelable and right cancelable elements of extensions  $\nu(S)$  and characterize cyclic semigroups whose superextensions are commutative.*

**Key words:** *cyclic semigroup, monotone family, Stone-Čech extension.*

УДК 517.55

## THE METRIC PROPERTIES OF A SPACE OF ENTIRE FUNCTIONS OF BOUNDED $L$ -INDEX IN DIRECTION

**A. I. Bandura**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;  
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: andriykopanytsia@gmail.com*

*The metric properties of a space of entire functions of bounded  $L$ -index in direction are investigated. It is shown that the space of entire functions with  $L$ -index in direction less than  $p$  is of the first category in the topology generated of Iyer's metric.*

**Key words:** *entire function, bounded  $L$ -index in direction, bounded value  $L$ -distribution in direction, directional derivative.*

K. Ekblaw investigated properties of a space of entire functions of bounded index for one variable in [1]. He proved that in topology generated by metric  $d(f, g) = \sup\{|a_0 - b_0|, |a_p - b_p|^{1/p} : p \in \mathbf{N}\}$  the entire functions of bounded index,  $B$ , are of the first category. Later M. Bordulyak generalized this result for entire functions of several complex variables in [2]. We introduced the entire functions of bounded  $L$ -index in direction in [3].

Therefore results of Bordulyak and Ekblaw are generalized for entire functions in  $\mathbf{C}^n$  of bounded  $L$ -index in direction.

Let  $L(z)$ ,  $z \in \mathbf{C}^n$ , be a positive continuous function.

**Definition 1** (see[3]). *An entire function of  $F(z)$ ,  $z \in \mathbf{C}^n$ , is called function of bounded  $L$ -index in the direction of  $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$ , if there exists  $m_0 \in \mathbf{Z}_+$  such that for  $m \in \mathbf{Z}_+$  and every  $z \in \mathbf{C}^n$  next inequality is true:*

$$\frac{1}{m!L^m(z)} \left| \frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m} \right| \leq \max \frac{1}{k!L^k(z)} \left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| : 0 \leq k \leq m_0,$$

where  $\frac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} = F(z)$ ,  $\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$ ,  $\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left( \frac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}} \right)$ ,  $k \geq 2$ .

The least such integer  $m_0$  is called the  $L$ -index in direction of  $F(z)$  and is denoted by  $N_{\mathbf{b}}(F, L)$ . If such  $m_0$  does not exist then we put  $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \infty$  and  $F$  is said of unbounded  $L$ -index in direction. We also denote by  $N_{\mathbf{b}}(F, L, z^0)$  as  $L$ -index in direction  $\mathbf{b}$  of function  $F$  in a point  $z^0$  that is the least integer  $m_0$  for which inequality (1) is true at  $z = z^0$ .

For entire in  $\mathbf{C}^n$  functions  $F(z)$ ,  $G(z)$  we put

$$d(F, G) = \sup_{p \in \mathbf{N}} \left| F(0) - G(0) \right|, \left| \frac{1}{p! |\mathbf{b}|^{2p}} \frac{\partial^p F(0)}{\partial \mathbf{b}^p} - \frac{1}{p! |\mathbf{b}|^{2p}} \frac{\partial^p G(0)}{\partial \mathbf{b}^p} \right|^{1/p},$$

and a space of entire functions with such metric is denoted  $E_{\mathbf{b}}^n$ .

Let  $B_{\mathbf{b}}^n(L)$  be a set of entire functions in  $\mathbf{C}^n$  of bounded  $L$ -index in direction and  $B_{\mathbf{b}, \nu}^n(L)$  be a set of functions with  $B_{\mathbf{b}}^n(L)$  such that  $N_{\mathbf{b}}(F, L) \leq \nu$ . It is clear that  $B_{\mathbf{b}}^n(L) = \bigcup_{\nu} B_{\mathbf{b}, \nu}^n(L)$ .

Besides we denote  $a, c = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j$  be a scalar product in  $\mathbf{C}^n$ ,  $a, c \in \mathbf{C}^n$ .

**Lemma 1.** For any  $F \in E_{\mathbf{b}}^n$ ,  $\nu_0 \in \mathbf{N}$  and  $\varepsilon > 0$  there exists  $\delta > 0$  such that if  $G \in E_{\mathbf{b}}^n$  and  $d(F, G) < \delta$  then  $d\left(\frac{\partial^k F}{\partial \mathbf{b}^k}, \frac{\partial^k G}{\partial \mathbf{b}^k}\right) < \varepsilon$  for  $k = 0, 1, 2, \dots, \nu_0$ .

*Proof.* Let  $F \in E_{\mathbf{b}}^n$ ,  $\nu_0 \in \mathbf{N}$  and  $\varepsilon > 0$  be given. Let

$$T > \sup_{p \in \mathbf{N}, k = 0, 1, 2, \dots, \nu_0} \max\{1, |\mathbf{b}|^{2+2k/p}\} \frac{(p+k)!}{p!}^{1/p}.$$

It is straightforward to verify that if  $G(z) \in E_{\mathbf{b}}^n$  and  $d(F, G) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + T} < 1$  then

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial^k F}{\partial \mathbf{b}^k}, \frac{\partial^k G}{\partial \mathbf{b}^k}\right) &= \sup_{p \in \mathbf{N}} \left\{ k! |\mathbf{b}|^{2k} \left| \frac{1}{k! |\mathbf{b}|^{2k}} \frac{\partial^k F(0)}{\partial \mathbf{b}^k} - \frac{1}{k! |\mathbf{b}|^{2k}} \frac{\partial^k G(0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right|, \left( \frac{(p+k)! |\mathbf{b}|^{2k+2p}}{p!} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left| \frac{1}{(p+k)! |\mathbf{b}|^{2k+2p}} \frac{\partial^{p+k} F(0)}{\partial \mathbf{b}^{p+k}} - \frac{1}{(p+k)! |\mathbf{b}|^{2k+2p}} \frac{\partial^{p+k} G(0)}{\partial \mathbf{b}^{p+k}} \right| \right)^{1/p} : p \in \mathbf{N} \right\} < \\ &< \sup_{p \in \mathbf{N}} \left\{ k! |\mathbf{b}|^{2k}, \left( \frac{(p+k)! |\mathbf{b}|^{2k+2p}}{p!} \right)^{1/p} : p \in \mathbf{N} \right\} \sup_{p \in \mathbf{N}} \left\{ \left| \frac{1}{k! |\mathbf{b}|^{2k}} \frac{\partial^k F(0)}{\partial \mathbf{b}^k} - \frac{1}{k! |\mathbf{b}|^{2k}} \frac{\partial^k G(0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right|^k, \right. \\ &\left. \left| \frac{1}{(p+k)! |\mathbf{b}|^{2k+2p}} \frac{\partial^{p+k} F(0)}{\partial \mathbf{b}^{p+k}} - \frac{1}{(p+k)! |\mathbf{b}|^{2k+2p}} \frac{\partial^{p+k} G(0)}{\partial \mathbf{b}^{p+k}} \right|^{\frac{1}{p+k} \frac{p+k}{p}} : p \in \mathbf{N} \right\} < \\ &< \sup_{p \in \mathbf{N}} \max\{1, |\mathbf{b}|^{2+2k/p}\} \frac{(p+k)!}{p!}^{1/p} \sup_{p \in \mathbf{N}} \left| \frac{1}{k! |\mathbf{b}|^{2k}} \frac{\partial^k F(0)}{\partial \mathbf{b}^k} - \frac{1}{k! |\mathbf{b}|^{2k}} \frac{\partial^k G(0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right|^k, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k+2p}} \frac{\partial^{p+k} F(0)}{\partial \mathbf{b}^{p+k}} - \frac{1}{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k+2p}} \frac{\partial^{p+k} G(0)}{\partial \mathbf{b}^{p+k}} \right|^{\frac{1}{p+k}} : p \in \mathbf{N} <$$

$$< T \sup |F(0) - G(0)|, \left| \frac{1}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} \frac{\partial^p F(0)}{\partial \mathbf{b}^p} - \frac{1}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} \frac{\partial^p G(0)}{\partial \mathbf{b}^p} \right|^{1/p} : p \in \mathbf{N} < T \frac{\varepsilon}{T+\varepsilon} < \varepsilon$$

for  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Theorem 1** Let  $F \in E_{\mathbf{b}}^n$ ,  $v \in \mathbf{N}$ ,  $N_{\mathbf{b}}(F, L) > v$ . There exists  $\delta > 0$  such that if  $G \in E_{\mathbf{b}}^n$  and  $d(F, G) < \delta$  then  $N_{\mathbf{b}}(G, L) > v$ .

*Proof.* As  $N_{\mathbf{b}}(F, L) > v$  then there exists  $z^0 \in \mathbf{C}^n$  and  $v_0 > v$  such that  $N_{\mathbf{b}}(F, L, z^0) = v_0 > v$ . For every  $k \leq v_0 - 1$  next inequality is true

$$\frac{1}{k!L^k(z^0)} \left| \frac{\partial^k F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| < \frac{1}{v_0!L^{v_0}(z^0)} \left| \frac{\partial^{v_0} F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^{v_0}} \right|.$$

This inequality is strict because  $v_0$  is least integer for constrict inequality at point  $z^0$ . Then there exists  $\delta^* > 0$  such that

$$\frac{1}{k!L^k(z^0)} \left| \frac{\partial^k F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| + \delta^* < \frac{1}{v_0!L^{v_0}(z^0)} \left| \frac{\partial^{v_0} F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^{v_0}} \right|.$$

It is obviously that

$$|a - c| + |b - d| \geq (a - c) + (b - d).$$

Then  $a - b \geq c - d$ ,  $|a - c| \leq |b - d|$ . We apply this inequality and we have

$$\frac{1}{v_0!L^{v_0}(z^0)} \left| \frac{\partial^{v_0} G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^{v_0}} \right| - \frac{1}{k!L^k(z^0)} \left| \frac{\partial^k G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| \geq \frac{1}{v_0!L^{v_0}(z^0)} \left| \frac{\partial^{v_0} F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^{v_0}} \right| - \frac{1}{k!L^k(z^0)} \left| \frac{\partial^k F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| -$$

$$- \frac{1}{v_0!L^{v_0}(z^0)} \left\| \frac{\partial^{v_0} G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^{v_0}} \right\| - \left\| \frac{\partial^{v_0} F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^{v_0}} \right\| - \frac{1}{k!L^k(z^0)} \left\| \frac{\partial^k G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right\| - \left\| \frac{\partial^k F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right\|. \quad (3)$$

Using idea of proof Taylor's formula we can prove that

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} \frac{\partial^p F(0)}{\partial \mathbf{b}^p} z, \mathbf{b}^p$$

and

$$G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} \frac{\partial^p G(0)}{\partial \mathbf{b}^p} z, \mathbf{b}^p.$$

Hence clearly

$$\left\| \frac{\partial^k G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right\| - \left\| \frac{\partial^k F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right\| \leq d \left( \frac{\partial^k F}{\partial \mathbf{b}^k}, \frac{\partial^k G}{\partial \mathbf{b}^k} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( d \left( \frac{\partial^k F}{\partial \mathbf{b}^k}, \frac{\partial^k G}{\partial \mathbf{b}^k} \right) \right)^j |\langle z^0, \mathbf{b} \rangle|^j$$

By Lemma 1 we can choose a number  $\delta$  such that if  $d(F, G) < \delta$  then  $d \frac{\partial^k F}{\partial \mathbf{b}^k}, \frac{\partial^k G}{\partial \mathbf{b}^k} < \varepsilon < 1$  and  $d \frac{\partial^k F}{\partial \mathbf{b}^k}, \frac{\partial^k G}{\partial \mathbf{b}^k} \mid z^0, \mathbf{b} \mid < \varepsilon < 1$  for all  $k \leq \nu_0$ .

Therefore, for all  $k \leq \nu_0$

$$\left| \frac{\partial^k G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| \left| \frac{\partial^k F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{\varepsilon(2 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon}$$

and from (2) and (3) for all  $k \leq \nu_0 - 1$  we have

$$\frac{1}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} \left| \frac{\partial^{\nu_0} G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^{\nu_0}} \right| - \frac{1}{k! L^k(z^0)} \left| \frac{\partial^k G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| \geq \delta^* - \frac{\varepsilon(2 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon} \left( \frac{1}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} + \frac{1}{k! L^k(z^0)} \right)$$

whence, in view of arbitrary of  $\varepsilon$ , it follows

$$\frac{1}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} \left| \frac{\partial^{\nu_0} G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^{\nu_0}} \right| - \frac{1}{k! L^k(z^0)} \left| \frac{\partial^k G(z^0)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| > \frac{\delta^*}{2}$$

for all  $k \leq \nu_0 - 1$  that is  $\infty \geq N_{\mathbf{b}}(L, G) \geq N_{\mathbf{b}}(L, G, z^0) \geq \nu_0 > \nu$ . Theorem 1 is proved.

**Remark 1** The condition  $N_{\mathbf{b}}(F, L) > \nu$  in Theorem 1 is equivalent that  $F \in E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b}, \nu}^n(L)$ . Therefore we can reformulate the Theorem 1.

**Theorem** Let  $F \in E_{\mathbf{b}}^n, \nu \in \mathbf{N}, F \in E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b}, \nu}^n(L)$ . There exists  $\delta > 0$  such that if  $G \in E_{\mathbf{b}}^n$  and  $d(F, G) < \delta$  then  $G \in E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b}, \nu}^n(L)$ .

**Corollary 1** The set  $B_{\mathbf{b}, \nu}^n(L)$  is closed in  $E^n$ .

**Lemma 2** If  $P(z)$  is a polynomial of degree  $p$  then  $F(z) = \exp z, a + P(z)$  is of  $L$ -index in direction  $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$  less or equal  $p+1$ , where  $a \in \mathbf{C}^n, L(z) = \max\{1, |\mathbf{b}, a|\}, \mathbf{b}, a \neq 0$ . If  $\mathbf{b}, a \neq 0$  then  $F(z)$  is index in direction  $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$  of 0.

*Proof.* Let  $k > p+1$ . Thus

$$\begin{aligned} \frac{1}{k! L^k(z)} \left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| &= \frac{|\exp\langle z, a \rangle|}{k! L^k(z)} |\langle \mathbf{b}, a \rangle|^k \leq \frac{|\exp\langle z, a \rangle|}{k!} < \frac{|\exp\langle z, a \rangle|}{(p+1)! L^{p+1}(z)} |\langle \mathbf{b}, a \rangle|^{p+1} = \\ &= \frac{1}{(p+1)! L^{p+1}(z)} \left| \frac{\partial^{p+1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{p+1}} \right| \end{aligned}$$

and hence  $F(z)$  is of  $L$ -index in direction  $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$  less or equal  $p+1$ . If  $\mathbf{b}, a \neq 0$  then for all  $k > 1$  we have

$$\frac{1}{k! L^k(z)} \left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| = \frac{|\exp z, a|}{k! L^k(z)} |\mathbf{b}, a|^k \leq \frac{|\exp z, a|}{k!} = 0.$$

Therefore  $F(z)$  is index in direction  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$  of 0.

We denote

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, t_0, \eta) = \inf \left\{ \frac{L(z + t\mathbf{b})}{L(z + t_0\mathbf{b})} : |t - t_0| \leq \frac{\eta}{L(z + t_0\mathbf{b})} \right\},$$

$$\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, t_0, \eta) = \sup \left\{ \frac{L(z + t\mathbf{b})}{L(z + t_0\mathbf{b})} : |t - t_0| \leq \frac{\eta}{L(z + t_0\mathbf{b})} \right\},$$

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta) = \inf \{ \lambda_1^{\mathbf{b}}(z, t_0, \eta) : t_0 \in \mathbb{C} \}, \lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) = \inf \{ \lambda_2^{\mathbf{b}}(z, t_0, \eta) : t_0 \in \mathbb{C} \},$$

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf \{ \lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta) : z \in \mathbb{C}^n \}, \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf \{ \lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) : z \in \mathbb{C}^n \}.$$

A class of functions  $L$ , which satisfy the condition  $0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$  for all  $\eta \leq 0$ , we denote by  $Q_{\mathbf{b}}^n$ . We need the following lemma.

**Lemma 3** *If  $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$  and an entire transcendental function  $F(z)$  is of bounded  $L$ -index in direction  $b \in \mathbb{C}^n$ , then for all  $z^0 \in \mathbb{C}^n$*

$$\ln M(r, F, z^0) = O\left(\int_0^r L(z^0 + t\mathbf{b}) dt\right), r \rightarrow +\infty,$$

where  $M(r, F, z^0) = \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = r\}$ .

*Proof.* The proof follows from the same lemma for the case of functions of one variable (see Theorem 3.3 on page 71 in [4]) and the fact that  $F(z^0 + t\mathbf{b})$  is a function of one variable  $t \in \mathbb{C}$  if  $z^0$  is fixed.

**Theorem 2** *If  $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$  then for every  $v \in \mathbb{Z}_+$  the set  $B_{\mathbf{b},v}^n(L)$  is nowhere dense in  $B_{\mathbf{b}}^n(L)$  and thus  $B_{\mathbf{b}}^n(L)$  is of the first category. The sets  $E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b},v}^n(L)$  and  $E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b}}^n(L)$  is dense in  $E_{\mathbf{b}}^n$*

*Proof.* Let  $F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} F_p \langle z, \mathbf{b} \rangle^p$  be an entire function such that for all  $z^0 \in \mathbb{C}^n$

$$\frac{\ln M(r, F, z^0)}{\int_0^r L(z^0 + t\mathbf{b}) dt} \rightarrow +\infty, r \rightarrow +\infty,$$

where  $M(r, F, z^0) = \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = r\}$ . Then by Lemma 3  $F$  is of

unbounded  $L$ -index in direction  $b \in \mathbb{C}^n$ . Let  $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p \langle z, \mathbf{b} \rangle^p$  be an entire function of bounded  $L$ -index  $N_{\mathbf{b}}(F, L)$  in direction  $b$ . We denote  $f_j^*(z) = \sum_{p=0}^j \langle z, \mathbf{b} \rangle^p + \sum_{p=j+1}^{\infty} F_p \langle z, \mathbf{b} \rangle^p$  and  $f_{j,m}(z) = \sum_{p=0}^j \langle z, \mathbf{b} \rangle^p + \sum_{p=j+1}^m F_p \langle z, \mathbf{b} \rangle^p$ , where  $m > j$ .

Then  $f_j^*$  is of unbounded  $L$ -index in direction  $\mathbf{b}$  for any  $j$  i. e.  $N_{\mathbf{b}}(L, f_j^*) > N$ ,  $j > 0$ . It is easy see that  $d(f, f_j^*) \rightarrow 0$ ,  $d(f_j^*, f_{j,m}^*) \rightarrow 0$  and  $d(f, f_{j,m}^*) \rightarrow 0$  as  $j \rightarrow \infty$ . By Theorem 1  $N_{\mathbf{b}}(L, f_{j,m}^*) > N$  for sufficiently large  $m$ . On other hand  $N(L; f_{j,m}^*) \leq m$ . Thus,  $f_{j,m}^* \in B_{\mathbf{b}}^n(L) \setminus B_{\mathbf{b},v}^n(L)$  that is  $B_{\mathbf{b},v}^n(L)$  is nowhere dense in  $B_{\mathbf{b}}^n(L)$ .

If  $f$  is any function from  $B^n(\mathbf{b}, L)$ , we choose  $f_j^*$  as above. Then  $f_j^* \in E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b}}^n(L)$  and  $d(f, f_j^*) \rightarrow 0$  as  $j \rightarrow \infty$ . Thus, the sets  $E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b}}^n(L)$  is dense in  $E$ .

Finally, let  $f \in E_{\mathbf{b}}^n \setminus (B_{\mathbf{b}}^n(L) \setminus B_{\mathbf{b},v}^n(L))$  i. e. either  $f$  is unbounded  $L$ -index in direction  $\mathbf{b}$  or  $N_{\mathbf{b}}(f, L) \leq N$ . We will show that in both cases  $f$  is limiting for some functions  $f_j^*$  with  $N < N_{\mathbf{b}}(L; f_j^*) < +\infty$ . In the first case we choose

$$f_j^*(z) = \sum_{p=0}^j f_n \langle z, \mathbf{b} \rangle^p.$$

Then  $d(f, f_j^*) \rightarrow 0$  as  $j \rightarrow +\infty$  and by Theorem 1  $N_{\mathbf{b}}(L, f_j^*) \leq N$  for large  $j$ . In the second case for  $j \in B_{\mathbf{b},v}^n(L)$  we choose, as above,  $f_{j,m}^* \in B_{\mathbf{b}}^n(L) \setminus B_{\mathbf{b},v}^n(L)$ . Theorem 2 is proved.

### References

1. Ekblaw K.A. The functions of bounded index as a subspace of a space of entire functions / K.A.Ekblaw // Pacific J. Math. – 1971. – V.37. – P. 353-355.
2. Bordulyak M.T. The space of entire in  $\mathbb{C}^n$  functions of bounded  $L$ -index / M.T.Bordulyak // Math. Stud. – 1995. – V.4. – P. 53-58 (in Ukrainian).
3. Bandura A.I. Entire functions of bounded  $L$ -index in direction / A.I.Bandura, O.B.Skaskiv // Math. Stud. – 2007. – 27, N.1. – P. 30-52 (in Ukrainian).
4. Sheremeta M. Analytic functions of bounded index / M.Sheremeta // Sheremeta Myroslav. – Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 p.

*Стаття поступила в редакційну колегію 10.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д. ф.-м. н., професором Загороднюком А.В.,  
д.ф.-м.н., професором Лопушанським О.В (м. Львів)*

---

**МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОСТОРУ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ  
ОБМЕЖЕНОГО  $L$ -ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМОМ****А. І. Бандура**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: andriykoranytsia@gmail.com*

*Досліджено метричні властивості простору цілих у  $C^n$  функцій обмеженого  $L$ -індексу за напрямом. Доведено, що простір цілих функцій,  $L$ -індекс за напрямом яких не перевищує  $p$ , є простором першої категорії у топології, породженій метрикою  $I_{era}$ .*

**Ключові слова:** *ціла функція, обмежений  $L$ -індекс за напрямом, метрика  $I_{era}$ , простір першої категорії, похідна за напрямом.*



**ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ  
ДРУГИМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА**

**С. І. Гургула<sup>1</sup>, Р. І. Собкович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: [math@nung.edu.ua](mailto:math@nung.edu.ua)

<sup>2</sup>Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;  
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;  
тел. +380 (342) 59-60-16; e-mail: [algeo@pu.if.ua](mailto:algeo@pu.if.ua)

Для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на заданих гіперповерхнях розширеного фазового простору одержано критерії стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості тривіального розв'язку, аналогічні тим, які дає другий метод Ляпунова для систем звичайних диференціальних рівнянь.

**Ключові слова:** імпульсна дія, стійкість, функція Ляпунова.

Досліджуватимемо питання стійкості тривіального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією виду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i(x), \quad (1)$$

$$\Delta x|_{t=t_i(x)} \equiv x(t+0) - x(t) = I_i(x),$$

де  $t \geq t_0$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in R^n$ ,  $I_i \in R^n$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Функція  $f(t, x)$  вважається заданою в області

$$Z = \{t \geq t_0, x \in \bar{J}_h\}, \quad (2)$$

де  $\bar{J}_h = \{x \in R^n, \|x\| \leq h, h > 0\}$  і  $f(t, 0) = 0$ , функції  $I_i(x)$  визначені і неперервні в кулі  $\bar{J}_h$ ,  $I_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Відносно функцій  $t_i(x)$  припускаємо, що вони неперервні,  $t_{i-1}(x) < t_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , де  $t_0(x) \equiv t_0 = const$  і  $t_i(x) \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$ . Крім того вважається, що відсутнє явище так званого "биття" розв'язків системи (1) до поверхні  $t = t_i(x)$ .

Функція Ляпунова  $V(t, x)$ , про яку йтиметься нижче, вважається скалярною і неперервно диференційовною по всіх своїх аргументах; функції  $\varphi(s)$  і  $\psi(s)$  вважаються неперервними, причому  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ ,  $\varphi(s) > 0$ ,  $\psi(s) > 0$  при  $s > 0$ , функція  $\rho(t)$  – заданою і неперервною при  $t \geq t_0$ .

Розглянемо достатні умови стійкості і асимптотичної стійкості. Ці умови даються наступними двома теоремами.

**Теорема 1.** Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова  $V(t, x)$ , функції  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  і  $\rho(t) \geq 0$  такі, що всюди в області (2) виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \text{grad } V, f \rangle \leq \rho(t)\varphi(V), \quad (3)$$

$$V(t_i(x), x + I_i(x)) \leq \psi(V(t_i(x), x)), \quad i=1, 2, \dots, \quad (4)$$

а також існують константи  $\theta_2 > 0$  і  $\rho_0 > 0$  такі, що для всіх  $i=1, 2, \dots$

$$\max_{\|x\| \leq h} t_i(x) - \min_{\|x\| \leq h} t_{i-1}(x) \leq \theta_2 \quad (5)$$

і для всіх  $t \geq t_0$

$$\int_t^{t+\theta_2} \rho(\tau) d\tau \leq \rho_0. \quad (6)$$

Тоді, якщо при деякому  $a_0 > 0$  для всіх  $a \in (0, a_0]$

$$\int_{\psi(a)}^a \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0, \quad (7)$$

то розв'язок  $x \equiv 0$  системи стійкий за Ляпуновим, а якщо можна вказати  $\gamma > 0$  таке, що

$$\int_{\psi(a)}^a \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0 + \gamma, \quad (8)$$

то цей розв'язок асимптотично стійкий.

**Доведення.** Нехай  $0 < \varepsilon < h$  і  $l = \inf_{t \geq t_0, \|x\| \geq \varepsilon} V(t, x)$ , причому можна

вважати, що  $l \leq a_0$ . Виберемо  $\delta > 0$  так, щоб виконувалась нерівність

$$\int_m^l \frac{ds}{\varphi(s)} > \rho_0, \quad (9)$$

де  $m = \sup_{\|x\| < \delta} V(t_0, x) < l$ . В силу (7) це завжди можна зробити; досить взяти

$\delta$  таким, щоб виконувалась нерівність  $m < \psi(l)$ . Нехай  $x(t)$  – довільний нетривіальний розв'язок системи (1), де  $x(t_0) = x_0 \in J_\delta$ . Доведемо, що цей розв'язок не вийде за межі кулі  $J_\varepsilon$ . Для цього досить довести, що  $V(t, x(t)) < l$  для всіх  $t \geq t_0$ . Згідно з (3) для функції  $v(t) = V(t, x(t))$  на проміжках неперервності виконана нерівність  $v'(t) \leq \rho(t)\varphi(v(t))$ ,  $x(t) \in \bar{J}_h$ . Припустимо, що цей розв'язок, не досягнувши поверхні  $t = t_1(x)$ , попаде на сферу радіуса  $\varepsilon$  в деякий момент часу

$t^*$ . Інтегруючи нерівність  $\frac{v'(t)}{\varphi(v(t))} \leq \rho(t)$  в межах від  $t_0$  до  $t^*$  після заміни в лівій частині  $s = v(\tau)$  і з урахуванням (5) і (6) одержуємо

$$\int_{v(t_0)}^{v(t^*)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \int_{t_0}^{t^*} \rho(\tau) d\tau \leq \int_t^{t_0+\theta_2} \rho(\tau) d\tau \leq \rho_0. \quad (10)$$

Але, з іншого боку, враховуючи, що  $v(t^*) \geq l$  і  $v(t_0) \leq m$  із (9), маємо

$$\int_{v(t_0)}^{v(t^*)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \int_m^l \frac{ds}{\varphi(s)} > \rho_0.$$

Це суперечність, отже  $x(t)$  попадає на поверхню  $t = t_1(x)$  в деякій точці  $(t_1(x_1), x_1)$  і  $x_1 \in J_\varepsilon$ , причому, як випливає із (10) при  $t^* = t_1(x_1)$ ,

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_1(x_1))} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \rho_0.$$

Із нерівностей (4) і (7) одержуємо

$$\int_{v(t_1(x_1)+0)}^{v(t_1(x_1))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \int_{\psi(v(t_1(x_1)))}^{v(t_1(x_1))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0.$$

Із двох останніх нерівностей легко одержати

$$\int_{v(t_1(x_1)+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq 0,$$

що означає, що  $v(t_1(x_1)+0) \leq v(t_0)$ . Для завершення доведення твердження про стійкість досить застосувати метод математичної індукції по числу поверхонь, пройдених розв'язком.

Нехай тепер виконана нерівність (8). Оскільки має місце стійкість тривіального розв'язку системи, то розглядуваний розв'язок  $x(t) \in J_\varepsilon$ ,  $t \geq t_0$ . Цей розв'язок буде асимптотично стійким, якщо  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t)) = 0$ . Нехай  $x(t)$  попадає на поверхні  $t = t_i(x)$  в точках  $(t_i(x_i), x_i)$  і нехай  $t_i(x_i) < t \leq t_{i+1}(x_{i+1})$ . Як і при виведенні нерівності (10), легко одержати для довільного  $i$

$$\int_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \rho_0.$$

Із нерівностей (4) і (7) випливає, що

$$\int_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t_i(x_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \int_{\psi(v(t_i(x_i)))}^{v(t_i(x_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0 + \gamma.$$

Почленно віднявши ці нерівності, одержуємо

$$\int_{v(t)}^{v(t_i(x_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \gamma. \quad (11)$$

Звідси випливає, що  $v(t) < v(t_i(x_i))$ , а поклавши  $t = t_{i+1}(x_{i+1})$ , маємо  $v(t_{i+1}(x_{i+1})) < v(t_i(x_i))$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Сукупність цих двох умов приводить до нерівності  $v(t) < v(t_i(x_i))$  при  $t > t_i(x_i)$ . Для завершення доведення досить показати, що  $\lim_{i \rightarrow \infty} v(t_i(x_i)) = 0$ . Припустивши, що це не так, в силу додатності і монотонності послідовності  $\{v(t_i(x_i))\}$ , ми повинні зробити висновок, що  $\lim_{i \rightarrow \infty} v(t_i(x_i)) = \alpha > 0$ . Позначимо  $\min_{\alpha \leq s \leq l} \varphi(s) = c > 0$ . Тоді із (11) при  $t = t_{i+1}(x_{i+1})$  одержуємо

$$\gamma \leq \int_{v(t_{i+1}(x_{i+1}))}^{v(t_i(x_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \frac{1}{c} \int_{v(t_{i+1}(x_{i+1}))}^{v(t_i(x_i))} ds = \frac{1}{c} (v(t_i(x_i)) - v(t_{i+1}(x_{i+1}))),$$

або  $v(t_i(x_i)) - v(t_{i+1}(x_{i+1})) \geq \gamma c = \text{const}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , що суперечить тому, що послідовність  $\{v(t_i(x_i))\}$  збіжна. Теорему доведено.

Аналогічно може бути доведена друга теорема.

**Теорема 2.** Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова  $V(t, x)$ , функції  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  і  $\rho(t) \leq 0$  такі, що всюди в області (2) виконані нерівності (3) і (4), а також існують константи  $\theta_1 > 0$  і  $\rho_0 > 0$  такі, що для всіх  $i = 1, 2, \dots$

$$\min_{\|x\| \leq h} t_i(x) - \max_{\|x\| \leq h} t_{i-1}(x) \geq \theta_1 \quad (12)$$

і для всіх  $t \geq t_0$

$$\int_t^{t+\theta_1} \rho(\tau) d\tau \leq -\rho_0.$$

Тоді, якщо при деякому  $a_0 > 0$  для всіх  $a \in (0, a_0]$

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \rho_0,$$

то тривіальний розв'язок системи (1) буде стійким, а якщо існує  $\gamma > 0$ , таке, що

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \rho_0 - \gamma,$$

то цей розв'язок буде асимптотично стійким.

Переходимо до теорем про нестійкість. Достатні умови нестійкості тривіального розв'язку системи (1) передбачають існування функції Ляпунова  $V(t, x)$ , яка володіє властивостями:

а) область додатності  $V(t, x)$   $D = \{(t, x) \in Z, V(t, x) > 0\}$  при всякому  $t \geq t_0$  має непорожній відкритий переріз гіперплощиною  $t = \text{const}$ , який дотикається до початку координат;

б) в області  $D$   $V(t, x)$  обмежена; позначимо  $a_0 = \sup_{(t, x) \in D} V(t, x)$ .

Справедливі наступні теореми.

**Теорема 3.** Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова  $V(t, x)$ , наділена властивостями а) і б), функції  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  і  $\rho(t) \leq 0$  такі, що в області  $D$  виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \text{grad } V, f \rangle \geq \rho(t)\varphi(V), \quad (13)$$

$$V(t_i(x), x + I_i(x)) \geq \psi(V(t_i(x), x)), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

функції  $t = t_i(x)$  задовольняють умову (5), а функція  $\rho(t)$  така, що для всіх  $t \geq t_0$

$$\int_t^{t+\theta_2} \rho(\tau) d\tau \geq -\rho_0, \quad \rho_0 > 0. \quad (15)$$

Тоді, якщо при деякому  $\gamma > 0$  для всіх  $a \in (0, a_0]$  виконана нерівність

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0 + \gamma, \quad (16)$$

то розв'язок  $x \equiv 0$  системи (1) нестійкий.

**Доведення.** Нехай  $\delta > 0$  як завгодно мале. За умовою знайдеться  $x_0 \in J_\delta$  таке, що  $V(t_0, x_0) > 0$ . Покажемо, що розв'язок  $x(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , з часом вийде за межі кулі  $\bar{J}_h$ . Припустимо супротивне:  $x(t) \in \bar{J}_h$  при  $t \geq t_0$ . Тоді  $(t, x(t)) \in D$ . Справді, нехай, як і вище,  $v(t) = V(t, x(t))$ ,  $x(t)$  попадає на поверхні  $t = t_i(x)$  в точках  $(t_i(x_i), x_i)$  і  $t^* \in (t_i(x_i), t_{i+1}(x_{i+1}))$  – момент часу, коли вперше виконається рівність  $v(t) = 0$ . В силу (13) на проміжках неперервності  $v'(t) \geq \rho(t)\varphi(v(t))$ , тоді, з урахуванням (5) і (15), маємо

$$\int_{t_i(x_i)}^{t^*} \frac{v'(\tau)}{\varphi(v(\tau))} d\tau \geq \int_{t_i(x_i)}^{t^*} \rho(\tau) d\tau \geq \int_{t_i(x_i)}^{t_i(x_i)+\theta_2} \rho(\tau) d\tau \geq -\rho_0,$$

або, після заміни  $s = v(\tau)$ ,

$$\int_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t^*)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq -\rho_0. \quad (17)$$

Оскільки  $v(t^*) = 0$ , то ми приходимо до нерівності  $\int_0^{v(t_i(x_i)+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \rho_0$ , що неможливо, бо, як легко одержати із (16), невласний інтеграл

$\int_0^{v(t_i(x_i)+0)} \frac{ds}{\varphi(s)}$  є розбіжним. Отже  $(t, x(t)) \in D$ , що означає, що  $v(t)$  – обмежена функція. Із (17) при  $t^* = t_{i+1}(x_{i+1})$  одержуємо

$$\int_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t_{i+1}(x_{i+1}))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq -\rho_0.$$

В силу (14) і (16) маємо

$$\int_{v(t_{i+1}(x_{i+1}))}^{v(t_{i+1}(x_{i+1})+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \int_{v(t_{i+1}(x_{i+1}))}^{\psi(v(t_{i+1}(x_{i+1})))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0 + \gamma.$$

Із двох останніх нерівностей випливає, що  $\int_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t_{i+1}(x_{i+1})+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \gamma$ . До-

даючи почленно такі нерівності, для будь-якого натурального  $n$ , отримуємо

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_n(x_n)+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq n\gamma,$$

звідки випливає, що  $v(t_n(x_n)+0) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , а це суперечить тому, що  $v(t)$  – обмежена функція. Теорему доведено.

Аналогічно доводиться наступне твердження.

**Теорема 4.** Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова  $V(t, x)$ , наділена властивостями а) і б), функції  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  і  $\rho(t) \geq 0$  такі, що в області  $D$  виконані нерівності (13) і (14), функції  $t = t_i(x)$  задовольняють умову (12), а функція  $\rho(t)$  така, що для всіх  $t \geq t_0$

$$\int_t^{t+\theta_1} \rho(\tau) d\tau \geq \rho_0, \quad \rho_0 > 0.$$

Тоді, якщо існує  $\gamma > 0$  таке, що для всіх  $a \in (0, a_0]$  має місце нерівність

$$\int_{\varphi(a)}^a \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \rho_0 - \gamma,$$

то нульовий розв'язок системи (1) нестійкий.

### Література

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Гургула С.І. Про стійкість розв'язків імпульсних систем / С.І.Гургула, М.О.Перестюк // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1981. – Вип.23. – С. 33-40.

3. Гургула С.І. Про другий метод Ляпунова в системах з імпульсною дією / С.І.Гургула, І.Й.Перкатюк // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2008. – №1(1). – С. 9-15.
4. Гургула С.І. Про стійкість в системах з імпульсами / С.І.Гургула, Р.І.Собкович // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2009. – №1(5). – С. 24-29.
5. Гургула С.І. Про другий метод Ляпунова для диференціальних рівнянь з імпульсами / С.І.Гургула, Р.І.Собкович, І.Й.Перкатюк // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2010. – №1(9). – С. 14-20.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 5.09.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором,  
академіком НАН України Перестюком М.О. (м. Київ),  
д.ф.-м.н., доцентом Королем І.І. (м. Ужгород)*

### INVESTIGATION OF THE STABILITY OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE ACTION BY THE SECOND LIAPUNOV'S METHOD

**S. I. Gurgula<sup>1</sup>, R. I. Sobkovych<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivsk, Carpats'ka str., 15;*

*ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: [math@nung.edu.ua](mailto:math@nung.edu.ua)*

<sup>2</sup>*PreCarpathian National University by Vasil Stefanic;*

*76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;*

*ph. +380 (342) 59-60-16; e-mail: [algeo@pu.if.ua](mailto:algeo@pu.if.ua)*

*Criteria of stability, asymptotic stability and non-stability of simple solution in an analogy to those according to secondary Liapunov's method for systems of ordinary differential equations, were issued for a system of differential equations with impulsive action on the given hyperplanes of extended phase space.*

**Key words:** *impulsive action, stability, function of Liapunov.*

УДК 51(075.8)

**ТУРНІРИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ТА НЕРОЗВ'ЯЗАНІ  
ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ****І. В. Федак**

*Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника;  
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;  
e-mail: Fedak\_ivan @ rambler.ru*

*Розв'язана одна із задач Леонарда Ейлера.*

*Ключові слова: турніри, проблеми, Ейлер.*

Важливими формами позакласної роботи з учнями є предметні олімпіади, конкурси та турніри.

На державному рівні турніри юних математиків започатковані у 1998 році і з кожним роком набували все більшої популярності серед учнів та творчо працюючих учителів математики.

В Івано-Франківській області аналогічні турніри проводяться з 2005 року на базі Обласного ліцею-інтернату для обдарованих дітей з сільської місцевості. Переможцем першого турніру стала команда Надвірнянського ліцею, а потім 5 років підряд тріумфували команди Фізико-технічного ліцею при Івано-Франківському національному технічному університеті нафти і газу. На сьомому турнірі їх гегемонію вдалося перервати команді «Париська Сорбонна» Парищенської ЗОШ І-ІІІ ступенів Надвірнянської районної ради, капітан якої став абсолютним переможцем обласного турніру в особистій першості.

Саме ця команда представляла Івано-Франківську область на XIV Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, який проходив 24-29 жовтня 2011 року у Львові. І вперше за чотирнадцять років проведення Всеукраїнських турнірів юних математиків сільська команда стала одним з переможців, а Чіх Володимир став першим лауреатом спеціального призу імені професора Лейфури В.М. як абсолютний переможець турніру в особистій першості, випередивши за набраними балами найближчого переслідувача майже вдвічі.

У процесі підготовки команди до турніру вдалося розв'язати проблему, яка була сформульована Ейлером понад 250 років тому, але досі залишалася невіршеною:

*Доведіть, що існує така трійка натуральних чисел  $a, b, c$ , що кожне з чисел  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$ ,  $a^2 + b^2 + c^2$  та  $abc$  є точним квадратом. Дослідіть питання щодо скінченності чи нескінченності множини всіх таких трійок (числа однієї трійки не можуть бути отримані множенням відповідних чисел іншої трійки на те саме число).*



Наводимо розв'язання даної задачі.

1. Неважко переконатися, що умову задовольняє трійка чисел:

$$a=136=8 \cdot 17, \quad b=153=9 \cdot 17, \quad c=72=8 \cdot 9.$$

При цьому отримуємо

$$a+b+c=19^2, \quad ab+bc+ca=204^2, \quad a^2+b^2+c^2=217^2, \quad abc=1224^2.$$

Зрозуміло, що розв'язками є також трійки чисел:

$$a=136n^2, \quad b=153n^2, \quad c=72n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Але їх отримуємо з початкової трійки множенням відповідних чисел на  $n^2$ .

2. Для знаходження інших трійок покладемо

$$a=x(x+y), \quad b=y(x+y), \quad c=xy, \quad x, y \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} abc &= (xy(x+y))^2, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= (x^2 + xy + y^2)^2, \\ ab + bc + ca &= 2xy(x+y)^2, \\ a + b + c &= x^2 + 3xy + y^2. \end{aligned}$$

Таким чином, для розв'язування задачі достатньо знайти такі натуральні числа  $x, y$ , щоб точними квадратами були значення виразів  $2xy$  та  $x^2 + 3xy + y^2$ .

Зокрема, числа  $x=8, y=9$ , які відповідають знайденому вище розв'язку, цю вимогу задовольняють.

3. Нехай для взаємно простих натуральних чисел  $x, y$  виконуються рівності

$$2xy = r^2, \quad x^2 + 3xy + y^2 = t^2, \quad r, t \in \mathbb{N}.$$

Позначимо

$$|x-y| = q, \quad x+y = s$$

і покладемо

$$X = 2r^2t^2 > x, \quad Y = q^2s^2 > y.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} 2XY &= (2qrst)^2, \\ X^2 + 3XY + Y^2 &= (X + Y + q^2r^2)^2, \end{aligned}$$

то пара натуральних чисел  $X, Y$  також є розв'язком задачі.

4. Покажемо, що числа  $X, Y$  взаємно прості. Справді, з рівності  $2xy = r^2$  і взаємної простоти чисел  $x, y$  випливає, що числа  $x, y$  різної парності, а отже, числа  $q, s$  непарні. Крім того, справджуються рівності:

$$q^2 + 2r^2 = s^2, \quad 2s^2 + r^2 = 2t^2, \quad q^2 + 4t^2 = 5s^2.$$

Припустивши, що  $X, Y$  не є взаємно простими, з цих рівностей для кожного з можливих при цьому чотирьох випадків:

$$\text{НСД}(q, r) : p, \quad \text{НСД}(s, r) : p, \quad \text{НСД}(q, t) : p, \quad \text{НСД}(s, t) : p,$$

де  $p$  – просте число, отримаємо, що числа  $q, s$  одночасно діляться на  $p$ . Тоді числа  $x, y$  теж діляться на  $p$ , що суперечить умові про їх взаємну простоту.

Таким чином, пара  $X, Y$  не може бути отримана з жодної іншої пари множенням на те саме число.

**5.** Нехай тепер

$$\begin{aligned} x_1 &= 8, \quad y_1 = 9, \\ x_{n+1} &= 4x_n y_n (x_n^2 + 3x_n y_n + y_n^2), \\ y_{n+1} &= (x_n - y_n)^2 (x_n + y_n)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

З доведеного випливає, що трійки чисел

$$a_n = x_n (x_n + y_n), \quad b_n = y_n (x_n + y_n), \quad c_n = x_n y_n$$

є розв'язками задачі для кожного натурального  $n$ . При цьому жодну з цих трійок не можна отримати множенням чисел іншої трійки на те саме число.

**6. Висновок.** Існує нескінченна кількість трійок натуральних чисел  $a, b, c$ , визначених вказаною вище рекурентною послідовністю, таких, що кожне з чисел  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$ ,  $a^2 + b^2 + c^2$  та  $abc$  є точним квадратом. При цьому числа жодної трійки не є добутками відповідних чисел іншої трійки на те саме число.

**7.** Додатково були знайдені всі пари взаємно простих чисел  $x, y$ , для яких вираз  $x^2 + 3xy + y^2$  є точним квадратом. Для цього ми розглядали рівність

$$x^2 + 3xy + y^2 = n^2$$

як квадратне рівняння відносно  $x$  з натуральними  $y, n$ . Для раціональності його коренів дискримінант такого рівняння має бути точним квадратом, тобто маємо

$$9y^2 - 4(y^2 - n^2) = m^2 \Leftrightarrow 5y^2 = (m - 2n)(m + 2n).$$

Пари взаємно простих чисел  $x, y$  отримуємо лише за умови, що хоч один множник у правій частині останньої рівності не має дільників числа  $y$ . З врахуванням цієї умови отримали чотири набори пар чисел  $x, y$ , залежних від натурального параметра  $k$ :

- 1)  $y = 2k + 1, x = k^2 - 2k, k \geq 3,$   
 $x^2 + 3xy + y^2 = (k^2 + k - 1)^2;$
- 2)  $x = 8k, y = 4k^2 - 12k + 5, k \geq 3,$

$$x^2 + 3xy + y^2 = (4k^2 - 5)^2, k \neq 5l;$$

$$3) \quad y = 2k + 1, x = 5k^2 + 2k,$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = (5k^2 + 5k + 1)^2;$$

$$4) \quad x = 8k, y = 20k^2 - 12k + 1,$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = (20k^2 - 1)^2.$$

Зокрема, у випадку 4) при  $k = 1$  отримуємо пару  $x_1 = 8, y_1 = 9$ , а у випадку 3) при  $k = \frac{1}{2}(17^2 - 1)$  матимемо

$$x_2 = 2 \cdot (2 \cdot 8 \cdot 9)(8^2 + 3 \cdot 8 \cdot 9 + 9^2) = 2 \cdot 12^2 \cdot 19^2, \quad y_2 = (8 - 9)^2 (8 + 9)^2 = 17^2.$$

Проте виявити серед них хоч одну пару чисел  $x, y$ , відмінну від елементів знайденої вище послідовності пар  $x_n, y_n$ , для якої  $2xy$  також є точним квадратом, так і не вдалося.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 03.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором,  
академіком НАН України Перестюком М.О. (м. Київ),  
к.ф.-м.н., доцентом Гургулою С.І.*

## ON TOURNAMENTS OF YUNG MATHEMATICIANS AND UNSOLVED MATHEMATICAL PROBLEMS

**I. V. Fedak**

*Precarpathian National University by V. Stefanyuc;*

*76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;*

*e-mail: Fedak\_ivan@rambler.ru*

*One Leonard Euler problem has solved.*

**Key words:** *tournaments, problems, Euler.*

# *Фізика і хімія твердого тіла*

---

---

УДК 621.315.592

## **ОПТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ І ТОПОЛОГІЯ НАНОКРИСТАЛІЧНИХ СТРУКТУР НА ОСНОВІ ПЛЮМБУМ ТЕЛУРИДУ: МОДЕЛЬНІ ПІДХОДИ**

**Г. Є. Малашкевич<sup>1</sup>, Д. М. Фреїк<sup>2</sup>, Я. С. Яворський<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Інститут молекулярної і атомної фізики НАНБ;*

*Білорусь, 220072, Мінськ, проспект Незалежності, 70;*

*e-mail: malash@imaph.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;*

*76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;*

*e-mail: freik@pu.if.ua*

*Виконано чисельне моделювання полів для обмеженої зони планарних двовимірних і лінійних агрегатів напівпровідникових наночастинок PbTe. Виявлено концентраційні ефекти затемнення і просвітлення у спектрах пропускання моношарів. Встановлено залежність спектральних характеристик від ступеня впорядкованості наноструктур.*

**Ключові слова:** *оптичні властивості, наноструктури, плюмбум телурид, модельні розрахунки.*

### **Зміст**

#### **Вступ**

- I. Методи чисельних розрахунків оптичних характеристик наноструктур
- II. Елементи теорії для визначення спектральних характеристик наноструктур
- III. Моделі оптичних полів у ближній зоні напівпровідникових наноструктур
- IV. Спектрально-селективні властивості нанокристалічних структур
  - 4.1. Концентраційні ефекти
  - 4.2. Розмірна залежність спектральних характеристик
- Висновки
- Література

## Вступ

Структури на основі сполук  $\text{AlVbVI}$  є перспективними вузькощілинними напівпровідниками. Прилади на їх основі функціонують в середньому інфрачервоному діапазоні, в тому числі і в перспективному для тепловачення діапазоні 8-14 мкм. Крім того, вони знаходять застосування в якості базових термоелектричних матеріалів для середньої області температур (600-850 K). При використанні цих сполук на базі гетероструктур можуть виготовлятися гетеролазери і гетеросвітлодіоди в області 4-46 мкм, фотодіоди і фототранзистори. Наноструктури на основі цих сполук перспективні для виготовлення інжекційних лазерів терагерцового діапазону. Високі значення коефіцієнта поглинання ( $103\text{-}104\text{)cm}^{-1}$  дозволяють створювати на їх основі багатоелементні матриці. Сполуки, до складу яких входить телур, є перспективними і для створення пристроїв оптичної пам'яті. Ці пристрої можуть базуватися на фазових переходах з аморфного стану в кристалічний або можуть бути засновані на морфологічних змінах у матеріалах.

У даний час накопичено досить великий обсяг інформації про властивості напівпровідникових сполук на основі телуриду свинцю, (див., наприклад, огляд [1]). Зокрема встановлено, що одним з основних факторів, що визначають робочі характеристики приладів з використанням даних елементів, є атомні дефекти базового матеріалу – вакансії, міжвузлові атоми і т.д. Відомо також, що при переході від суцільних плівок до наногранулярних і наноструктур змінюються не лише умови формування об'ємних і поверхневих дефектів в матеріалі наночастинок, але й істотно зростає роль поверхневих дефектів у порівнянні з об'ємними. Крім того, виникають топологічні дефекти наноструктур, які також стають одним з факторів, що впливають на електронні та оптичні властивості структур, особливо в ближній зоні. Однак роботи, в яких би описувалися технологічні процеси формування різних типів кристалічних топологічних структур, і спроби керування електронними та оптичними властивостями наноструктур телуриду свинцю шляхом спрямованого формування в них топологічних нанодефектів, в літературі відсутні.

Метою цієї роботи було визначення впливу топологічних особливостей напівпровідникових наноструктур  $\text{PbTe}$  на їх оптичні властивості. На основі створеної комп'ютерної програми для розрахунку ближньопольових характеристик і оптичних перетинів наночастинок агрегатів  $\text{PbTe}$  з різною топологією, досліджено спектрально-селективні властивості у видимій та інфрачервоній області спектру та виявлено стійкі кореляції між топологічними особливостями і оптичними характеристиками.

## **I. Методи чисельних розрахунків оптичних характеристик наноструктур**

Чисельні дослідження оптичних перетинів і картин розподілу ближнього поля для наноструктурних агрегатів виконувалися з викори-

станням спеціально розробленого програмного забезпечення, яке базується на застосуванні VIEF-методу, або формалізму інтегрального об'ємного рівняння [2-4]. VIEF-метод є чисельним методом, заснованим на використанні інтегральних рівнянь Максвелла. Електромагнітне поле в будь-якій точці простору описується через дипольне уявлення середовища, коли кожна точка простору з відносним показником заломлення, відмінним від одиниці, випромінює як диполь з амплітудними і фазовими характеристиками, обумовленими локальними полем і показником заломлення. При цьому напруженість електричного поля в будь-якій точці простору задається за допомогою інтегрального рівняння:

$$E_{(r_1)} = E_{(r_1)}^{in} + \frac{k^2}{(4\pi)} \iiint [m_{(r_2)}^2 - 1] E_{(r_2)} G_{(r_1, r_2)} d^3r_2, \quad (1)$$

де  $E$  означає повне поле в розглянутій точці,  $E^{in}$  – падаюче поле,  $G$  – тензорна функція Гріна,  $m$  – комплексний відносний показник заломлення.

Такий підхід застосовний до тіл будь-яких форм і внутрішніх структур і є перспективним для розрахунку характеристик розсіяння і поглинання асферичних і неоднорідних наночастинок, а також малочастинних агрегатів.

На основі викладеного підходу була розроблена спеціальна програма «VIEF-Мультимер», яка дозволяє розраховувати оптичні перетини і картини розподілу ближнього поля для планарних лінійних і нелінійних агрегатів, що складаються з частинок сферичної або циліндричної форми. Частинки сферичної форми можуть бути двошаровими, що дозволяє враховувати наявність тонких оболонок на їх поверхні. За основу була взята раніше розроблена програма «VIEF-Частинка» [5], призначена для розрахунку факторів ефективності ослаблення, поглинання і розсіяння в ближній і дальній зонах окремих частинок сферичної та циліндричної форми.

Світлина 1 дає уявлення про інтерфейс модифікованої програми «VIEF-Мультимер». Як видно, програма передбачає розрахунок факторів ефективності поглинання  $Q_{abs}$ , розсіювання  $Q_{sca}$ , ослаблення  $Q_{ext}$  і картин розподілу поля всередині мультимера і поблизу його поверхні для різного стану поляризації падаючого світла. Можлива зміна відстані між частинками в мультимері, а також їх кількості (від 1 до 7).

Розроблена програма тестувалася згідно рис.2 порівнянням результатів, отриманих для окремих сферичних частинок телуриду свинцю з розрахунками за теорією Мі [6]. При тестуванні оцінювався вплив кроку сітки розбиття на точність розрахунків і були встановлені параметри чисельного розрахунку, що забезпечують необхідну точність.

Необхідно відзначити, що, як видно з рис.2, спектральна залежність фактора ефективності ослаблення наночастинок телуриду свинцю є немонотонної, з максимумом в області 400 нм. Проведені раніше оцінки вказують на можливість виконання умови Фреліха для наночастинок

плумбум телуриду у видимій області спектра при виборі матриці з показником заломлення 1.34-3.18. Внаслідок цього, в спектрі ослаблення системи наночастинок PbTe, найімовірніше, проявляється резонанс поверхневе ослаблення.

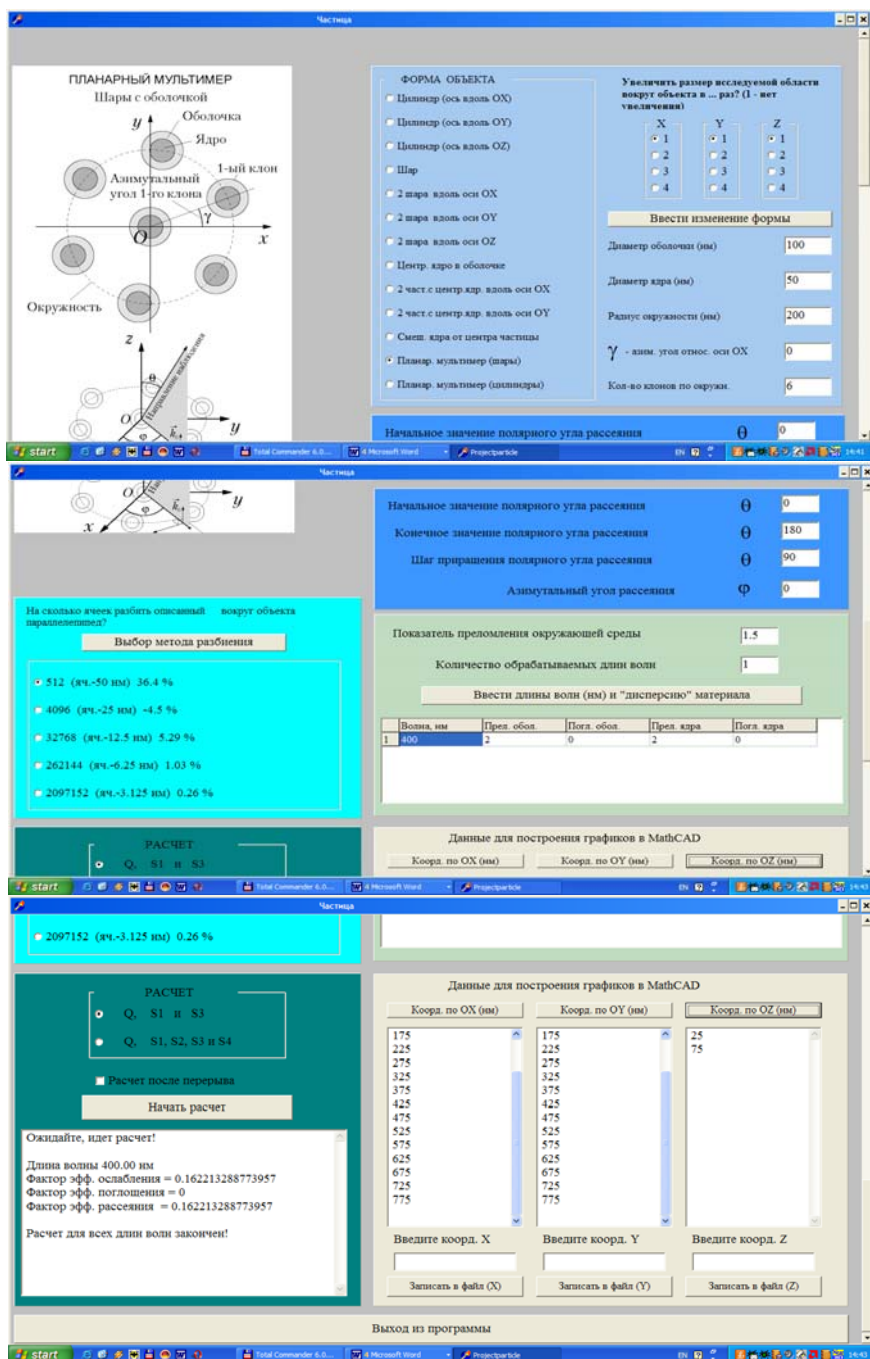


Рис. 1. Копія світлини з екрана монітора із модифікованою програмою «VIEF-Мультимер»

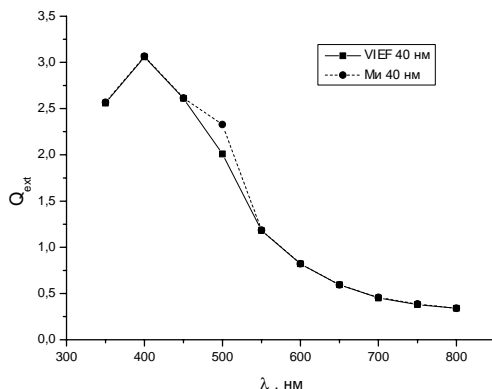


Рис.2. Порівняння результатів розрахунку спектрів фактора послаблення PbTe отриманих за формулами теорії Мі і чисельним методом VIEF

### II. Елементи теорії для визначення спектральних характеристик наноструктур

У щільноупакованих частково-впорядкованих наноструктурах можливий спектральний прояв ефектів когерентної природи [7,8]. Це обумовлено тим, що при високій концентрації частинок виникає ближній порядок, і їх місця розташування стають частково корельованими, а розсіяні ними хвилі – частково-когерентними. Збільшення щільності упаковки частинок (параметра перекриття  $\eta$ ) призводить до появи ближньої впорядкованості в їх розташуванні [9]. У залежності від спектральної області, інтерференція багаторазово розсіяних хвиль може бути як конструктивною, так і деструктивною. Це призводить до додаткового структурування спектра пропускання розсіюючої системи і до зміни спектрів її відбивання і поглинання. Найбільш істотні ефекти, пов'язані з когерентністю розсіяних хвиль, можуть проявлятися в щільноупакованих моношарах, коли мінімальний внесок некогерентного багатократно розсіяння.

Для моделювання та аналізу цих оптичних процесів необхідне застосування теорії багатократного розсіяння хвиль (ТБРХ), в якій результуюче поле представляється у вигляді суми полів всіляких багаторазово розсіяних хвиль з урахуванням їх фази, причому кожна частинка знаходиться не в полі падаючої хвилі, а в деякому ефективному полі. Тоді когерентне пропускання моношару може бути представлено у вигляді:

$$T_{\text{ког}} = \left| 1 - \frac{2\eta}{x^2} S_{\text{eff}}(0) \right|^2, \quad (2)$$

де  $S_{\text{eff}}(0)$  – ефективна амплітудна функція розсіювання окремої частки, яка в квазікристалічному наближенні задається наступним виразом:

$$2S_{\text{eff}}(0) = \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)(c_l \pm d_l) = \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)[a_l + b_l + c_s(a_l C_l + b_l D_l)] = 2S(0) + c_s A, \quad (3)$$



$$A = \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) [ a_l C_l + b_l D_l ]. \quad (4)$$

Тут  $x=\pi d/\lambda$  – дифракційний параметр,  $\eta$  – параметр перекриття, а  $S(0)$  – амплітудна функція розсіювання в напрямку вперед для окремої частки, розміщеної у вільному просторі. Другий доданок в правій частині виразу (3) пов'язано з ефектами когерентного взаємоперепромінення частками.

Розкриваючи формулу (2) з використанням (3), отримуємо:

$$T = 1 - \eta Q_{eff}^{ext} + \frac{4\eta^2}{x^4} [\text{Re}^2 S(0) + \text{Im}^2 S(0)] + \frac{16\eta^3}{\pi x^4 d^2} [\text{Re} S(0) \text{Re} A + \text{Im} S(0) \text{Im} A] + \frac{16\eta^4}{\pi^2 x^4 d^4} [\text{Re}^2 A + \text{Im}^2 A]. \quad (5)$$

Якщо переопромінення можна повністю знехтувати, то рівняння (5) переходить в

$$T = 1 - \eta Q_{ext} + \frac{4\eta^2}{x^4} [\text{Re}^2 S(0) + \text{Im}^2 S(0)]. \quad (6)$$

Цей випадок (співвідношення (6)) відповідає наближенню однократного розсіювання (НОР). У такому наближенні передбачається, що ефективне поле на кожній частці збігається з падаючим, переопромінення частками один одного відсутня і когерентні взаємодії зводяться лише до інтерференції одноразово розсіяних хвиль (кооперативні ефекти 1-го роду). НОР є непоганим наближенням для систем частинок, що мають сильно витягнуті індикатриси розсіювання в напрямку вперед. Позитивним у НОР є можливість отримання простих аналітичних співвідношень, що визначають концентраційні та розмірні області прояву цих ефектів.

Згідно НОР, концентраційна залежність (залежність від параметра перекриття) оптичної щільності моношару в максимумі гібридної смуги є немонотонною і досягає, максимуму при

$$\eta_0 = x^4 Q / 8 |S(0)|^2, \quad (7)$$

при цьому

$$T_0 = 1 - x^4 Q^2 / 16 |S(0)|^2. \quad (8)$$

Якісно немонотонний характер залежності  $T_\lambda(\eta)$  можна пояснити конкуренцією двох процесів: зменшення оптично вільного простору і інтерференція розсіяного вперед світла на зростаючій кількості розсіювачів.

Цікаво відзначити, що, згідно НОР, за певних умов може реалізуватися граничний випадок повного придушення когерентного пропускання, коли величина  $T=0$  [1]. Повне погашення реалізується в ситуації, коли падаюча і розсіяна моношаром хвилі рівні за амплітудою і протилежні за фазою. З формули НОР випливає, що повне гасіння спостерігається при одночасному виконанні умов (7) і (9)

$$16 |S(0)|^2 / x^4 Q^2 = Q. \quad (9)$$

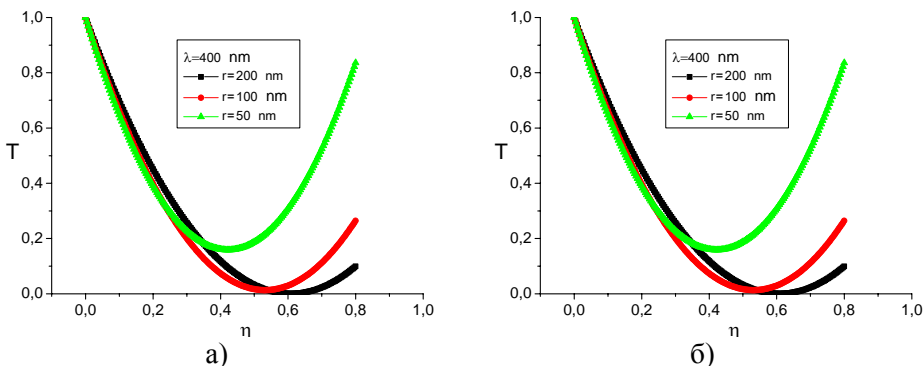


Рис.3. Залежність коефіцієнта спектрального пропускання моношару частинок РbТе різного розміру від їх поверхневої концентрації  $\lambda$ , нм: 400 (а) і 650 (б)

Рис.3 демонструє концентраційну залежність коефіцієнта спектрального пропускання моношару частинок телуриду свинцю для довжин хвиль 400 нм і 650 нм при зміні розміру часток. Як видно, у загальному випадку концентраційна залежність пропускання є немонотонною. Глибина мінімуму пропускання зростає при збільшенні розмірів частинок. Для субмікронних частинок РbТе з радіусом 200 нм при значеннях параметра перекриття порядку 0.5-0.6 виконуються умови реалізації повного інтерференційного гасіння пропускання.

### III. Моделі оптичних полів у ближній зоні напівпровідникових наноструктур

Для виявлення впливу типу агрегату на спектри ослаблення світла і картини розподілу ближнього поля розглядалися пленарні мультимерилінійні агрегати (бісфери і тримери) і нелінійні агрегати різної конфігурації. Число часток в нелінійних агрегатах змінювалося від чотирьох до семи (гептамери).

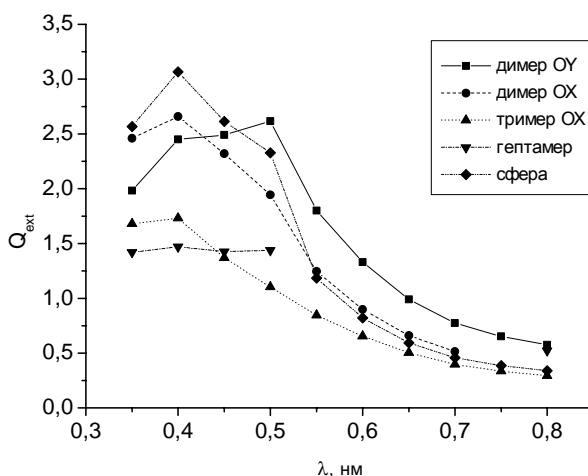


Рис.4. Спектральна залежність факторів ефективності ослаблення наночастинок плюмбум телуриду та їх агрегатів різного типу

На рис.4 для прикладу наведена спектральна залежність факторів ефективності ослаблення сферичних наночастинок плумбум телуриду з діаметром 40 нм і їх агрегатів різного типу. Показник заломлення матриці 1.6. Як видно, для лінійних агрегатів, орієнтованих уздовж напрямку поляризації падаючого поля, резонанс поверхневого ослаблення (РПО) має дублетні структури, що пов'язано з довгохвильовим зміщенням резонансу поглинання ( $\lambda \sim 500$  нм) відносно резонансу розсіювання ( $\lambda \sim 400$  нм). Для лінійних агрегатів, орієнтованих ортогонально напрямку поляризації падаючого поля, як і для окремих наносфер, резонанс присутній тільки в спектральній залежності фактора ефективності поглинання ( $\lambda \sim 400$  нм). Посилення фактора ефективності ближньопольового розсіювання досягається для окремих наночастинок в спектральній області  $\lambda \sim 500$  нм. Ця обставина, поряд із зазначеним вище впливом стану поляризації падаючого світла на інтенсивність ближньопольової взаємодії, призводить до того, що для нелінійних агрегатів резонанс поверхневого ослаблення виражений набагато слабкіше, ніж для лінійних агрегатів.

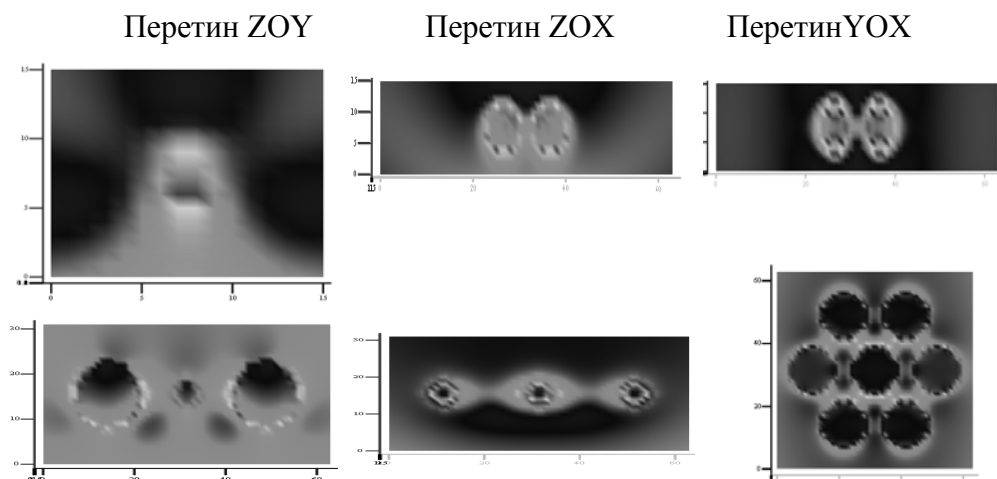


Рис.5. Вплив топології агрегату наночастинок PbTe на картину розподілу локального поля: а – димер із сферичних наночастинок, орієнтований вздовж осі OX,  $k_{\max}=1.5$ ; б – гептамер із сферичних наночастинок PbTe  $k_{\max}=2$

На рис.5 проводиться порівняння картин розподілу локального поля на довжині хвилі 400 нм для двох типів планарних мультимерів, що відрізняються топологією і числом складових їх частинок. Всі перетини проходять приблизно через центр паралелепіпеда, в який вписано розглянутий мультимер. Падаюче світло поширюється вздовж осі OZ. Електричний вектор падаючого світла спрямований по осі OY. Діаметр кожної наночастинок  $d=40$  нм, відстань між центрами частинок  $R=50$  нм., показник заломлення матриці  $n_0=1.6$ . У верхньому рядку (рис.5,а) наведено дані для димера з наночастинок PbTe сферичної форми, орієнтованого уздовж осі OX. Для цієї ситуації фактор ефективності ослаблення

$Q_{ext}=2,66$ ; фактор ефективності поглинання  $Q_{abs}=2,18$ ; фактор ефективності розсіювання  $Q_{sca}=0,48$ ; максимально досяжний коефіцієнт посилення ближнього поля  $k_{max}=1,5$ . У нижньому рядку (рис.5,б) наведено дані для гептамера з наносфери PbTe, який являє собою шість частинок, симетрично розташованих навколо центральної частинки. У цьому випадку  $Q_{ext}=1,47$ ;  $Q_{abs}=0,78$ ;  $Q_{sca}=0,69$ ,  $k_{max}=2$ .

Як видно з рис.5, в розподілі поля можна виділити характерні області локалізації «гарячих плям», тобто ділянок простору зі значними коефіцієнтами посилення локального поля. Для мультимерів обох розглянутих типів найбільш інтенсивні «гарячі плями» розташовуються поблизу площини центрального перетину, близько поверхні кожній з зовнішніх сфер, зверненої до центральної частці, у напрямку вектора поляризації падаючого світла. Близькі за своїм значенням і максимально досяжні коефіцієнти локального поля в кожному з характерних перерізів. Слід, однак, відзначити, що зі збільшенням числа частинок в агрегаті збільшується кількість «гарячих плям» в цих характерних перетинах.

Рис.6 демонструє зміну картини розподілу ближнього поля в центральних перетинах гептамера при переході з короткохвильової в довгохвильову область. Можна відзначити, що електродинамічні взаємодії проявляється найбільш сильно в короткохвильовій області спектра і слабшають при просуванні в довгохвильову область, у міру збільшення дійсної і уявної частин комплексного показника заломлення телуриду свинцю [10]. Така залежність може призводити до сильної якісної трансформації спектрів в щільно упакованих планарних наноструктурах.

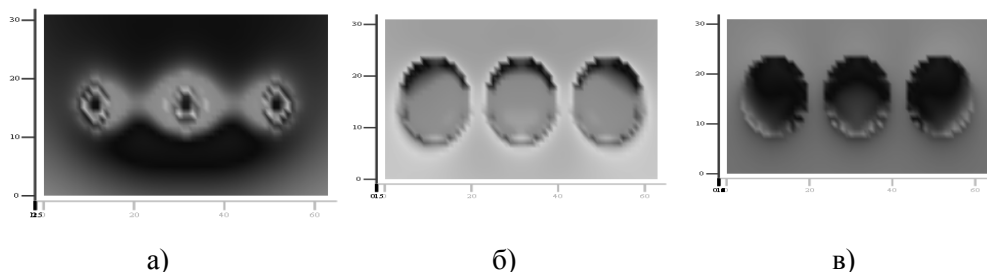


Рис.6. Вплив довжини хвилі падаючого випромінювання на картини розподілу локального поля в центральному перерізі нелінійного агрегату з 7 частинок PbTe, розташованого на площині XOY:

а –  $\lambda=400$  нм,  $n=1$ ,  $k=1,2$ ; б –  $\lambda=500$  нм,  $n=1,35$ ;  $k=2,86$ ;  
в –  $\lambda=800$  нм,  $n=3,7$ ;  $k=3$

Досліджувалися також закономірності зміни розподілу ближнього поля і оптичних перерізів для агрегатів різної топології (лінійні та нелінійні двомірні агрегати) при варіюванні розміру наночастинок телуриду свинцю, що утворюють агрегат, відстані між ними і показника заломлення матриці, в яку поміщені наночастинок. Метою такого досліджен-

ня було встановлення впливу перерахованих параметрів на електродинамічні взаємодії між близько розташованими наночастинками, що може бути причиною сильної якісної трансформації спектрів в щільноупакованих планарних наноструктурах. Дослідження проводилися для спектрального діапазону 300-450 нм, оскільки внаслідок особливостей спектральної залежності параметра виживання фотона електродинамічні взаємодії між наночастинками телуриду свинцю в агрегаті найбільш сильно проявляються в короткохвильовій області спектра і слабшають у міру просування в довгохвильову область, у міру збільшення дійсної і уявної частин комплексного показника заломлення телуриду свинцю.

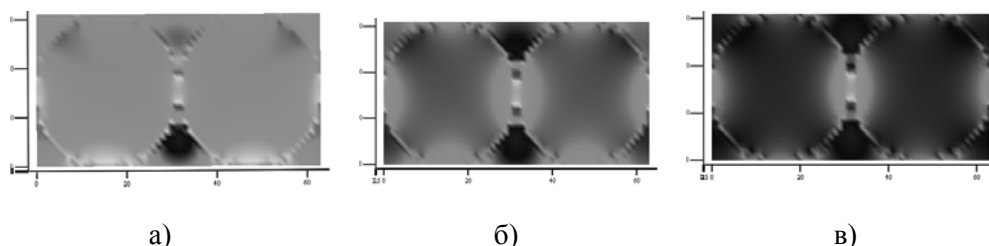


Рис.7. Димер із дотичних наносфер PbTe різного розміру, орієнтованих вздовж осі OY. Перетин ZOY, довжина хвилі 400 нм, показник заломлення матриці  $n_0=1.6$ .

а: діаметр 60 нм,  $Q_{ext}=1.027$ ,  $Q_{abs}=0.720$ ,  $Q_{sca}=0.307$ ,  $K_{max}=1.2$ ;

б: діаметр 40 нм,  $Q_{ext}=0,771$ ,  $Q_{abs}=0,612$ ,  $Q_{sca}=0.159$ ,  $K_{max}=1.5$ ;

в: діаметр 20 нм,  $Q_{ext}=0,439$ ,  $Q_{abs}=0,368$ ,  $Q_{sca}=0,070$ ,  $K_{max}=2.0$ .

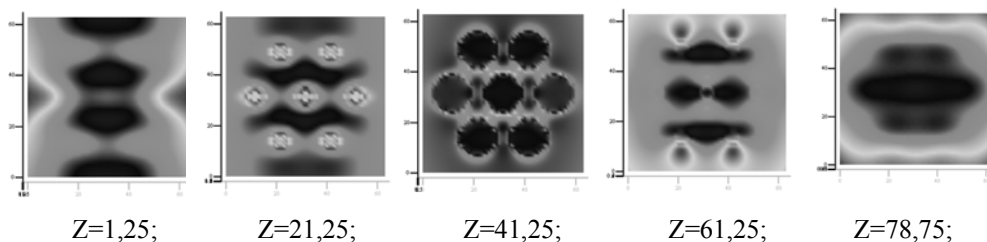


Рис.8. Гептамер із семи наносфер з діаметром 40 нм, відстань між центрами 50 нм. Довжина хвилі 400 нм,  $n_0=1,6$

Трансформація картини розподілу ближнього поля в перерізі XOY зі зміною відстані від площини, в якій розташований планарний мультимер

Для прикладу на рис.7 представлені картини розподілу локального поля для довжини хвилі 400 нм поблизу димера з двох дотичних сфер різного розміру. Всі перетини проходять приблизно через центр паралелепіпеда, в який вписано розглянутий мультимер. Електричний вектор падаючого світла, що поширюється уздовж осі OZ, спрямований по осі OY. Як видно з наведеного рисунка, у всіх розглянутих випадках найбільш інтенсивні «гарячі плями» (тобто ділянки простору зі значними коефіцієнтами посилення локального поля) розташовуються поблизу

точки дотику поверхонь наночастинок. Слід зазначити, що збільшення розміру наночастинок (в області значень 20-60 нм), показника заломлення матриці (в області значень 1-1,6) і відстаней між центрами частинок (в області значень  $R=d-2d$ ) призводить до істотного (приблизно двократному) зменшенню максимально досяжного коефіцієнта підсилення локального поля.

На рис.8 на прикладі гептамера з наночасток телуриду свинцю з діаметрами 40 нм показана типова трансформація картини розподілу ближнього поля в перерізі XOY при зміні відстані від площини, в якій розташований планарний мультимер. Як видно з малюнка, в міру віддалення від центрального перетину, відповідного значенню  $Z=40$  нм, «гарячі плями» швидко розмиваються і практично зникають при видаленні від поверхні частинок приблизно на 20 нм.

#### **IV. Спектрально-селективні властивості нанокристалічних структур**

##### **4.1. Концентраційні ефекти**

Спектральні характеристики дисперсних середовищ, до числа яких відносяться і нанокристалічні структури PbTe, формуються в результаті спільної дії селективного розсіювання та поглинання. Просторова кореляція окремих неоднорідностей призводить до необхідності додатково враховувати ще й інтерференцію багаторазово розсіяних хвиль, яка може істотно трансформувати спектральні характеристики. До виникнення часткової упорядкованості ансамблю частинок призводить, наприклад, збільшення щільності їх упаковки або забезпечення періодичності розподілу принаймні в одному з вимірів. Для теоретичного моделювання спектрально-селективних властивостей нанокристалічних планарних структур на основі PbTe з різною топологією використовувалися методи статистичної теорії багатократного розсіяння хвиль [7]. Спектри пропускання, відбивання і поглинання щільноупакованих моношарів з наночасток плюмбум телуриду розраховувалися на основі квазікристалічного наближення (ККП) [8]. Для виявлення можливості управління спектральними характеристиками за рахунок ефектів фотонного обмеження розглядалися також так звані квазіодномірні фотонні кристали, тобто планарні багатошарові системи, що складаються з по чергованих щільноупакованих моношарів наночастинок плюмбум телуриду, розділених субхвильовими по оптичній товщині діелектричними плівками. Спектральні характеристики таких квазіодномірних фотонних кристалів на основі наночасток плюмбум телуриду розраховувалися з використанням ККП в поєднанні з методом матриці переносу (метод МП-ККП) [11].

Досліджувалися закономірності зміни спектрів пропускання, відбивання і поглинання планарних наноструктур при варіюванні розміру наночастинок PbTe, щільності їх упаковки в окремих моношарах і числа цих моношарів в одновимірно-періодичних (багатошарових) системах. На рис.9 представлені спектральні характеристики моношарів наночас-

тинок п्लомбум телуриду з різними діаметрами і параметрами перекриття, поміщених у матрицю з показником заломлення 1.6. Параметр перекриття являє собою відношення площі, зайнятої частками, до площі всього моношару, тобто ця величина пропорційна поверхневій концентрації частинок. Для порівняння на малюнку приведені також спектри пропускання розрідженого зразка з тією ж кількістю частинок, розраховані за законом Бугера:  $T_{\text{Буг}} = \exp(-\eta Q_{\text{ext}})$ .

Порівняння рис.9,а та 9,б показує, що збільшення числа частинок в моношарі (зростання їхньої поверхневої концентрації) призводить до якісної трансформації спектральної залежності як пропускання, так і відбивання. Найбільш сильні зміни спостерігаються у короткохвильовій області спектра (рис.10). Крім того, як видно з рис.9,б, для щільноупакованих моношарів для наночастинок п्लомбум телуриду з розмірами 40 нм (з параметром перекриття  $\eta=0.4$ ) у всій видимій області спектра спостерігаються концентраційні ефекти затемнення, тобто із збільшенням щільності упаковки одного і того ж кількості частинок пропускання зменшується. Такий характер концентраційної залежності властивий системам часток з низьким параметром виживання фотонів. При збільшенні розміру частинок до 100 нм, коли зростає внесок розсіювання в екстинкції окремої частки, ефекти затемнення компенсуються за рахунок процесів інтерференції багаторазово розсіяного світла (рис.9,в).

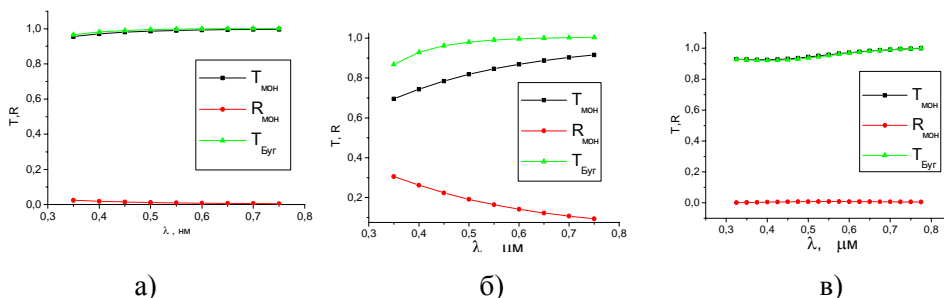


Рис.9. Спектри пропускання (а) і відбивання (б,в) щільноупакованими моношарами з наночастинок п्लомбум телуриду з розмірами 40 нм (а,б) і 100 нм (в). Параметр перекриття  $\eta=0.1$  (а), 0.4 (б,в)

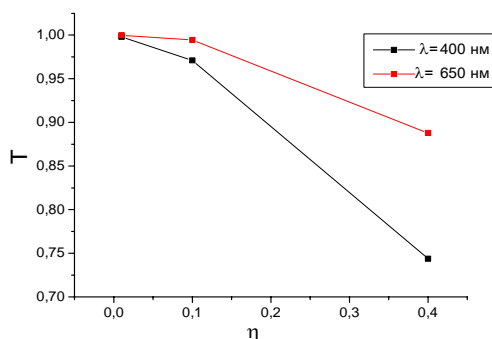


Рис.10. Залежність пропускання моношару наночастинок PbTe з діаметром 40 нм від параметра перекриття

На рис.11,а,б,в, на прикладі одновимірно-періодичних (багатошарових) систем, що містять чергуючі моношари наночастинок плумбум телуриду свинцю і тонкі діелектричні плівки, продемонстрована можливість управління спектрами поглинання ( $A=1-T-R$ ) за рахунок використання ефектів просторового обмеження. Як видно з наведених даних на рисунках, багаторазове перевідбиття випромінювання на межах моношарів одновимірно-періодичної системи призводить до значного посилення поглинання у всій видимій області спектра. При цьому максимум спектра поглинання багатошарової системи може бути зміщений відносно максимуму спектра поглинання відповідного моношара (згідно з рис.11,в), що пов'язано з селективністю коефіцієнта відбиття моношарів (згідно з рис.9,в).

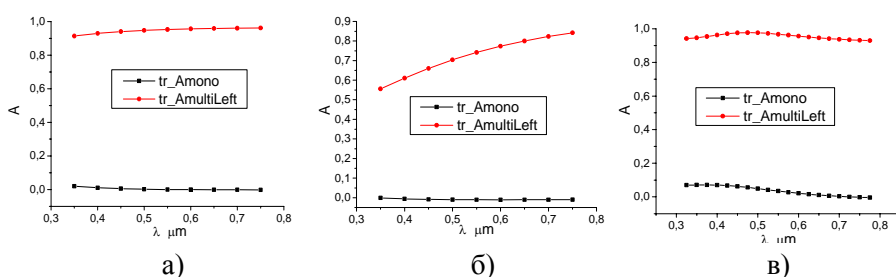


Рис.11. Спектри поглинання моно- та багатошарових систем з наночастинок плумбум телуриду з розмірами 40 нм (а,б) і 100 нм (в). Параметр перекриття  $\eta=0,1$  (а), 0,4 (б,в)

Відзначимо також, що в короткохвильовій області спектра поглинання багатолісників з розмірами 40 нм зменшується при збільшенні параметра перекриття. Мабуть, це пов'язано зі зростанням коефіцієнта відбиття окремих моношарів (рис.9,а,б), і з викликаним цією обставиною зменшенням глибини проникнення випромінювання в дисперсну систему.

#### 4.2 Розмірна залежність спектральних характеристик

Однією з причин короткохвильового зсуву межі пропускання наночастинок PbTe може бути зміна ефективності розсіювання у випадку зміни їх розміру. Для перевірки цього припущення з використанням теорії Мі були проведені розрахунки факторів ефективності поослаблення, розсіяння і поглинання частинок плумбум телуриду сферичної форми з різними розмірами.

Як видно з рис.12, для більш дрібних частинок радіусом 500 нм спектральна область найбільш значного послаблення збігається зі спектральною областю смуги поглинання плумбум телуриду. Для більш великих часток, для яких значний внесок вносить і розсіювання на частинках, істотно збільшується послаблення в довгохвильовій області спектра, за межами смуги поглинання плумбум телуриду.



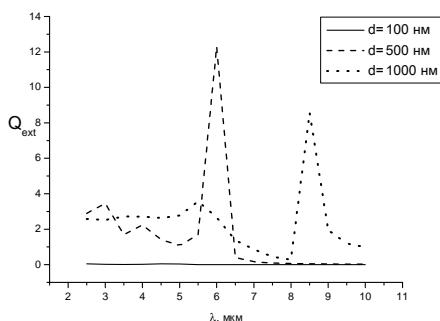


Рис.12. Спектральна залежність факторів ефективності послаблення сфер плумбум телуриду з різними розмірами

Розмірна залежність факторів ефективності послаблення, розсіювання і поглинання ( $Q_{ext}$ ,  $Q_{sca}$ ,  $Q_{abs}$ ) часток плумбум телуриду в широкій області зміни їх розмірів (100-1000 нм) наведена на рис.13.

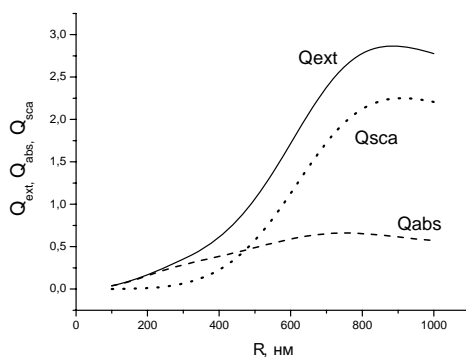


Рис.13. Розмірна залежність факторів ефективності послаблення  $Q_{ext}$ , розсіювання  $Q_{sca}$  і поглинання  $Q_{abs}$  наночастинок плумбум телуриду в матриці з показником заломлення  $n_0=1$  на довжині хвилі 5 мкм

Для кожної довжини хвилі в розглянутій області розмірів (100-1000) нм залежність фактора послаблення немонотонна. В області розмірів (100-260) нм для всього дослідженого спектрального діапазону (2.5-10) мкм фактор ефективності послаблення монотонно зростає.

Як видно з аналізу наведених рис.11-13, картина розмірної залежності оптичної щільності для монодисперсних систем (з частинок PbTe одного розміру) може бути досить складною. Це обумовлено сильною дисперсією комплексного показника заломлення плумбум телуриду в розглянутій спектральній області. Слід, однак, відзначити, що, розкид частинок за розмірами згладжує різкі екстремуми розмірної залежності усередненого фактора ефективності розсіювання і в результаті виявляється тільки загальна тенденція збільшення оптичної щільності в довгохвильовій області спектра при збільшенні середнього розміру наночастинок.

### **Висновки**

Встановлено, що для планарних нелінійних агрегатів наносфери PbTe, що володіють центральною симетрією, області найбільш інтенсивного посилення локального поля розташовуються поблизу площини центрального перетину, близько поверхні кожній з зовнішніх сфер, зверненої до центральної частинки. Для лінійних агрегатів наносфери PbTe області найбільш інтенсивного посилення локального поля розташовуються поблизу точки дотику поверхонь наночастинок. Показано, що в міру збільшення числа частинок в агрегаті зростає ступінь просторової неоднорідності структури ближнього поля.

Виявлено, що для нелінійних агрегатів резонанс поверхневого ослаблення виражений набагато слабкіше, ніж для лінійних агрегатів. Для лінійних агрегатів, крім того, структура смуги ослаблення і спектральне положення резонансу поверхневого ослаблення залежать від стану поляризації падаючого світла.

Встановлено, що електродинамічні взаємодії між наночастинками в агрегаті найбільш сильно проявляються в короткохвильовій області спектра і слабшають при просуванні в довгохвильову область, у міру збільшення дійсної і уявної частин комплексного показника заломлення плюмбум телуриду;

У спектрах пропускання частково-впорядкованих щільноупакованих моношарів з наночасток плюмбум телуриду спостерігаються концентраційні ефекти затемнення і просвітлення. Зменшення розміру часток і, пов'язане з цим зменшення ймовірності виживання фотона, призводить до розширення спектральної області прояву ефектів затемнення.

Зміною розміру наночастинок плюмбум телуриду та їх щільності упаковки в моношарі можна впливати на величину і спектральну селективність поглинання одновимірно-періодичними багат шаровими системами з таких моношарів.

Виявлений вплив концентраційних ефектів затемнення і просвітлення на спектральну залежність пропускання тонких нанокристалічних шарів плюмбум телуриду може бути використано для оптимізації параметрів таких структур при вирішенні задач фільтрації випромінювання короткохвильового діапазону видимій області спектра.

Встановлена залежність ефектів просторового обмеження в періодичних багат шарових структурах на основі моношарів плюмбум телуриду від розміру наночастинок та їх щільності упаковки в моношарі може бути використана для регулювання величини і спектральної селективності поглинання випромінювання видимого діапазону.

### *Література*

1. Иванов А.П. Распространение света в плотноупакованных дисперсных средах / А.П.Иванов, В.А.Лойко, В.П.Дик. – Минск: Наука и техника, 1988. – 191 с.
2. Goodman J.J. Application of fast-Fourier-transform techniques to the discrete-dipole approximation / J.J.Goodman, В.Т.Draine, P.J.Flatau //

- Optics Letters. – 1991. – Vol. 16, № 15. – P. 1198-1200;
3. Hage J.I. Scattering from arbitrarily shaped particles: theory and experiment / J.I.Hage, J.M.Greenberg, and R.T.Wang // Appl. Optics. – 1991. – V. 30. – P. 1141-1152,
  4. Mishchenko, M.I. Scattering, absorption and emission of light by small particles / M.I. Mishchenko, L.D. Travis, A. Lacis– Cambridge: University Press, 2002. – 445 p.
  5. Верещагин В.Г. Рассеяние излучения конечными диэлектрическими цилиндрами / В.Г.Верещагин, Р.А.Дынич, А.Н.Понявина // Журн. прикл. спектр. – 1998. – Т.65, N2. – С. 256-260.
  6. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К.Борен, Д.Хафмен.– Москва: Мир, 1986. – 664 с.
  7. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / А.Исимару. – М.: Мир, 1981. – Т.2. – 317 с.
  8. Понявина А.Н. Когерентное отражение и пропускание плотноупакованных монослоев рассеивателей / А.Н.Понявина, Н.И.Сильванович // Журн. прикл. спектр. – 1990. – Т. 53, N 2. – С. 299-305.
  9. Займан Дж. Модели беспорядка / Дж.Займан. – М.: Мир, 1982. – 391 с.
  10. Palik E.D. Handbook of optical constants of solids / E.D.Palik. – Washington: Academic Press, 1985.
  11. Понявина А.Н. Интерференционные эффекты и спектральные характеристики многослойных рассеивающих систем / А.Н. Понявина, Н.И. Сильванович // Опт.и спектр. – 1994. – Т.6, N4. – С. 648-655.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Рувінським М.А.,  
д.ф.-м.н., професором Стасюком І.В.(м. Львів)*

## OPTICAL PROPERTIES AND TOPOLOGY OF NANOCRYSTALLINE STRUCTURES BASED ON LEAD TELLURIDE: MODEL APPROACHES

**G. E. Malashkevych<sup>1</sup>, D. M. Freik<sup>2</sup>, Ya. S. Yavorskiy<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Molecular and Atomic Physics, NASB;  
220072, Belarus, Minsk, Independence Avenue, 70;  
e-mail: [malash@imaph.bas-net.by](mailto:malash@imaph.bas-net.by)*

<sup>2</sup>*Vasyl Stefanyk Precarpatian National University;  
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57; e-mail: [freik@pu.if.ua](mailto:freik@pu.if.ua)*

*Numerical simulation of fields in a limited area of two-dimensional planar and linear aggregates of semiconductor nanoparticles PbTe. The concentration effects of the eclipse and enlightenment in the transmission spectra of monolayers. The dependence of the spectral characteristics of the degree of ordering of the nanostructures.*

**Key words:** *optical properties, nanostructure, lead telluride, model calculations.*

УДК 621.891

## ЗАЛЕЖНІСТЬ ЗНОСОСТІЙКОСТІ ОСАДЖЕНОГО КОМПОЗИТНОГО ПОКРИТТЯ ВІД ДИСПЕРСНОСТІ ЙОГО НАПОВНЮВАЧА

П. І. Мельник<sup>1</sup>, М. В. Кіндрачук<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Івано-Франківський університет права імені Короля Данила Галицького;  
76018, Івано-Франківськ, вул. Коновальця, 35

<sup>2</sup>Національний авіаційний університет;  
03680, м. Київ, проспект Космонавта Комарова, 1

*Проведено дослідження процесу зношування КЕП на нікелевій основі при сухому терті ковзання в залежності від розміру карбідної фази TiC та дифузійного хромовання, виходячи з уявлень про перетворення енергії пластичної деформації в зоні контакту в енергію дислокацій в зоні тертя, що веде до викришування твердої фази.*

**Ключові слова:** зношування, карбідна фаза, дисипативна енергія, дислокації, крихкість.

### Вступ та постановка задачі дослідження

Питання поверхневого зміцнення конструкційних матеріалів займає чільне місце у загальній проблемі підвищення надійності та довговічності деталей машин, ресурс роботи яких визначається в основному їх опором до конкретного виду контактної взаємодії. Вирішення задач контактного руйнування значною мірою визначається ефективністю захисту поверхні деталі.

Одним із напрямків вирішення триботехнічних задач є формування покриттів на деталях машин нанесенням різними методами та іншими технологіями їх зміцнення. Активно розвивається напрям створення захисних структур триботехнічного призначення – композиційні електролітичні покриття (КЕП), які одержують із суспензій, що є електролітами з додаванням визначеної кількості високодисперсного порошку твердої фази [1]. Такі покриття є доцільними в першу чергу на сталях групи X18H10T, які є достатньо корозійностійкими, але мають низьку зносостійкість, що обмежує їх застосування в техніці у якості конструкційних матеріалів. Осадження КЕП на нікелевій основі на поверхню таких сталей зберігає їх корозійну стійкість та підвищує зносостійкість, крім цього такі покриття можна суттєво зміцнювати.

Зміцнення осадженого покриття методом електролізу проводиться різними способами: дифузійне відпалювання, оплавлення, лазерна і електроіскрова обробка та інші. Хіміко-термічна обробка забезпечує отримання якісно нових дифузійнолегованих композиційних покриттів, що володіють підвищеними фізико-хімічними, механічними та експлуа-

таційними властивостями. Процес хіміко-термічної обробки попередньо нанесених електролітичних осадів допускає також цілеспрямовану зміну хімічного і фазового складу поверхневих шарів виробу в результаті реакційної дифузії, а тому викликає інтерес з точки зору ефективності підвищення їх експлуатаційних властивостей в процесі зношування деталей машин, зокрема при терті ковзання. Крім цього, дифузійне насичення КЕП забезпечує підвищену міцність значення покриття з осново, що є суттєвим при нанесенні їх на нержавіючі сталі.

Отже, доцільним є дослідити вплив хіміко-термічної обробки електролітичних осаджень на їх зносостійкість в залежності від фазового складу, вмісту твердої фази та її дисперсності.

#### Аналіз експериментальних даних

Працями багатьох дослідників показана ефективність електролітичних осаджень, механізм формування яких розроблений Р.С. Сайфулініним і проаналізований в роботі [2]. Чисельні дослідження показали, що властивість таких осаджень залежить як від складу електроліту, режиму процесу, так і подальшої їх обробки з метою ущільнення, підвищення адгезії з матрицею та структуроформування.

Так, в роботі [3] досліджено та систематизовано триботехнічні характеристики дифузійних, напилених та осаджених покриттів, а в роботі [4] досліджено композиційні електролітичні покриття (КЕП) на нікелевій основі, які містять в собі як зміцнюючу фазу карбід кремнію та завдяки структурним відмінностям надають оброблюваній поверхні необхідних властивостей. На прикладі SiC включень в осаді показано залежність зносостійкості таких КЕП від вмісту і дисперсності карбідної фази. На рис.1 наведено характер зносостійкості системи покриття Ni-SiC від вмісту наповнювача, а на рис.2 – залежність від розміру частинок SiC.

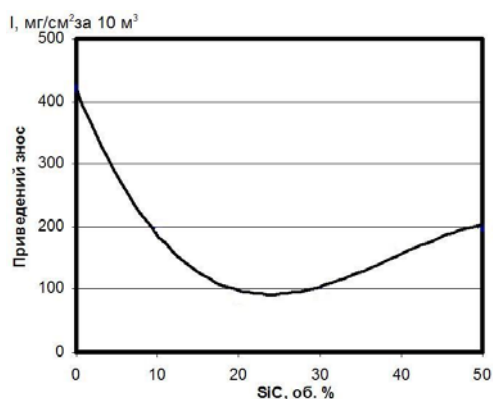


Рис.1. Залежність зносостійкості КЕП Ni-SiC від вмісту наповнювача при навантаженні 20Н і швидкості тертя 0,5м/с. Величина частинок 28/20 мкм [4]

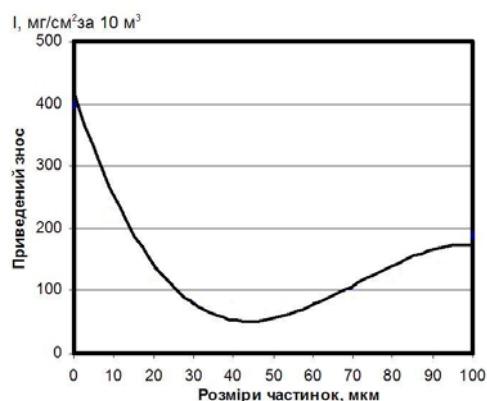


Рис.2. Залежність зносостійкості КЕП Ni-SiC від розміру частинок SiC при навантаженні 20Н і швидкості тертя 0,5м/с. Об'ємний вміст наповнювача 24% [4]

З наведених даних видно, що зносостійкість КЕП змінюється зі змінною як кількості, так і розмірів частинок наповнювача, що характеризує структуру покриття, яку можна позитивно удосконалювати шляхом додаткової хіміко-термічної обробки.

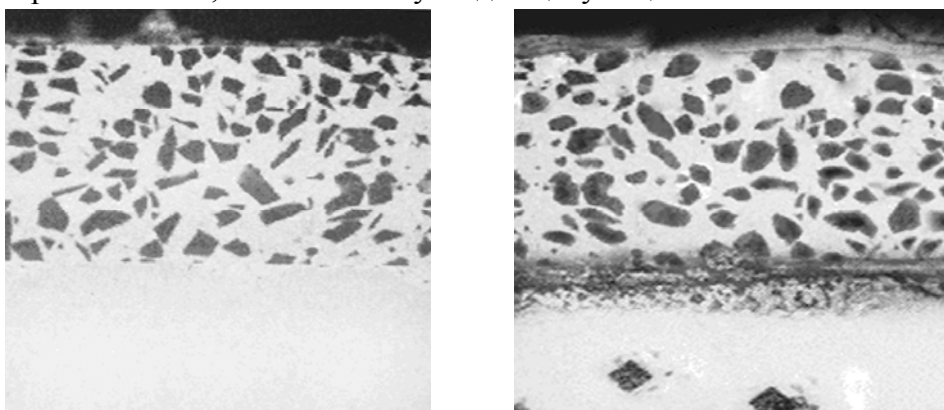
**Методика досліджень та обговорення їх результатів**

Композиційні електролітичні покриття одержували шляхом сумісного осадження із електроліту нікелю і зміцнюючої фази TiC різної дисперсності на зразки розміром 10×10×5 мм. Зразки отримані у ванні РН 3-4, густині струму 10 А/дм<sup>2</sup> при температурі 25<sup>0</sup>С.

Випробування на зносостійкість в умовах тертя без мащення проводилось на установці М-22М при швидкості ковзання 0,5 м/с та навантаженні 20 Н. Схема спряження – вал-площина і шлях тертя складав 1 км.

Досліджувався композит Ni-TiC з різними фракціями TiC від 5 до 100 мкм. Дифузійне хромування проводилось із суміші порошків складу: 65%Cr, 25%Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, 1,5%NH<sub>4</sub>Cl при температурі 1100<sup>0</sup>С протягом 3-5 годин в металевих контейнерах з плавким затвором.

На рис.3,а наведено мікроструктуру КЕП Ni-TiC з наповнювачем TiC дисперсністю 30 мкм. На фотографії видно достатньо рівномірне розташування частинок наповнювача по площині шліфа. А на рис.3,б показана фотографія мікроструктури КЕП після дифузійного хромування. Поверхневий шар покриття збіднений частинками TiC, а на глибині його карбідна фаза дещо коагулізувалась, але залишилась досить рівномірно розподіленою по площині мікроструктури, що суттєво не змінило структури по глибині шару, крім поверхневої, яка зазнала легування хромом. Особливістю є те, що сформувалась дифузійна зона на границі покриття-основа, яка і забезпечує підвищену міцність зчеплення КЕП.



а)

б)

Рис.3. а) Мікроструктура КЕП Ni-TiC з наповнювачем TiC × 300;  
 б) Мікроструктура КЕП після дифузійного хромування × 300

На рис.4 подано залежність зносостійкості КЕП з різною фракцією TiC, але однакоvim об'ємним наповнення в осаді рівним 25% об'ємних після його дифузійного хромування при 1100<sup>0</sup>С на протязі 3-х годин.

Випробування походились в режимі ковзання при різних навантаженнях та довжині шляху тертя.

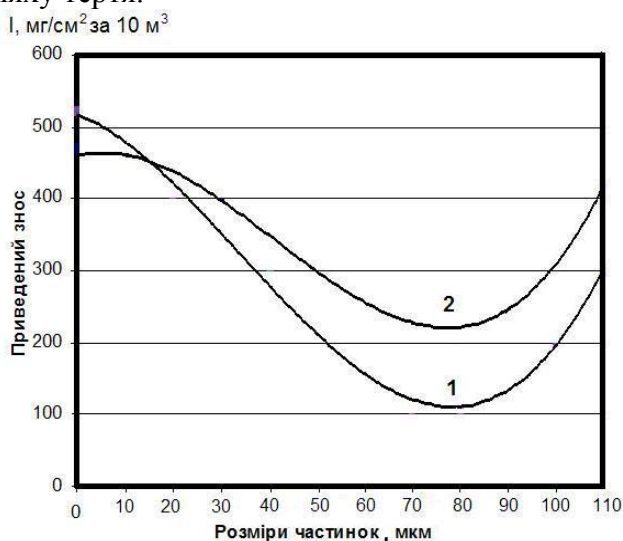


Рис.4. Залежність зносостійкості КЕП системи Ni-TiC після дифузійного хромування при навантаженні 10Н (1) і 20Н (2)

Як видно з рис.2 та 4, характер залежності зносостійкості від величини частинок наповнювача відрізняється лише тим, що зниження зносостійкості у першому випадку починається від величини карбідного включення приблизно 50 мкм, а у другому випадку – від 70 мкм при навантаженні 20Н і 80 мкм при навантаженні 10Н. Це пояснюється тим, що у першому випадку випробування на зносостійкість проводились на зразках, які не піддавались хіміко-термічній обробці, а у другому випадку – зразки пройшли дифузійне хромування. Отже, у першому випадку сили зчеплення частинок карбідної фази є дещо меншими, ніж сили їх зчеплення в матриці, яка пройшла дифузійне хромування, бо в обох випадках присутні сили пружності, а відповідно енергія пластичної деформації є різною.

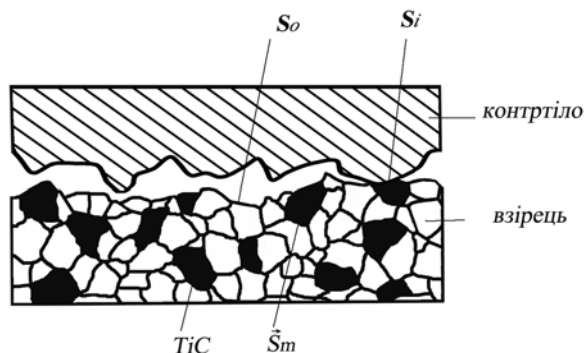


Рис.5. Схема розташування частинок TiC у поверхневому шарі КЕП

На рис.5 представлено схему площини тертя з розташуванням в одній із них твердої фази. Під дією сил тертя окремі частинки опиняються на вершині зубців нерівності і в матриці їх утримує енергія взаємодії, яка залежить як від природи матеріалу, так і величини частинок. Сили тертя обумовлюють пластичну деформацію, відсутність якої в зоні контакту приводить до накопичення в ній пружних деформацій і супроводжується розсіюванням частини енергії, затраченої роботою сил тертя. Оскільки ці процеси є термодинамічно невривноваженими, то їх можна описати з допомогою дисипативної функції [5]:

$$T \frac{dS_i}{dt} = \bar{\Psi} = \sum \frac{dW_{\text{diss}}^i}{dt} + \bar{I}_c A_c,$$

де  $T$  – температура системи в  $^{\circ}\text{K}$ ;  $\frac{dS_i}{dt} = \frac{dS_i}{S_k dt}$  – швидкість зміни енергії системи;

$\frac{dW^i}{dt} = \frac{dW_{\text{diss}}^i}{S_k dt}$  – швидкість розсіювання енергії;  $S_i$  – площа

поверхні тимчасового контакту;  $\bar{I}_c A_c$  – потужність пливу попутних факторів.

Дисипативні функції процесів пластичної деформації та утворення вільних поверхонь взаємодії різних фаз в яких концентруються сили розсіювання енергії та зародження дефектів кристалічної структури – дислокацій, яким передують пластична деформація визначаються з таких міркувань. Дислокації накопичуються на границях фаз, що призводить до руйнування сил зв'язку між ними і, як результат – викришування однієї із фаз (у даному випадку йдеться про фазу TiC, яка сприяє виникненню абразивного зношування).

Для зручності введемо поняття хімічного потенціалу дислокації – робота, яка затрачається для утворення одиничної дислокації:

$$\varphi_d = \frac{\tau}{\beta}, \quad A_d = \Delta\varphi_d = \frac{\Delta\tau}{\Delta\beta},$$

де  $\varphi_d$  – хімічний потенціал дислокації;  $\tau$  –напруження, що діють в металах;  $\beta$  – число дислокацій, яке припадає на одиницю деформованої речовини;  $A_d$  – утворення та переміщення дислокацій;  $\Delta\varphi_d$  – різниця хімічних потенціалів для двох напружених станів матеріалу;  $\Delta\tau$  – зміцнення матеріалу в процесі його пластичного деформування.

У свою чергу, робота пластичної деформації, яка призводить до виникнення дислокації, записується так:

$$dW_{\text{пл}} = d\bar{D} A_d,$$

де  $d\bar{D} = \frac{dD}{S_i}$  – швидкість накопичення дислокацій в системі.



Поділивши обидві частини цього рівняння на  $dt$ , отримаємо вираз для дисипативної функції пластичного деформування матеріалу:

$$\Phi_{\text{ouc}} = \frac{dW_{\text{пл}}}{dt} = \frac{d\vec{D}}{dt} A_d = \vec{I}_d A_d,$$

де  $\vec{I}_d = \frac{d\vec{D}}{dt}$  – швидкість накопичення дислокацій, віднесеної до одиниці поверхні контакту і залежить від енергії пластичної деформації в зоні контакту.

Представляючи процес руйнування в зоні тертя як відколювання частинок на границях їх об'єму за рахунок накопичення по них дислокацій, запишемо:

$$\Sigma \sigma_i dS_i = \sigma_m d\vec{S}_m + \sigma_0 dS_0 - \sigma_d d\vec{S}_d,$$

де  $\sigma_0$  – питома поверхнева енергія в зоні контакту;  $dS_0$  – питома площа поверхні контакту (зона пластичної деформації);  $\sigma_m$  – питома поверхнева енергія в процесі зміни площі контакту  $dS_m$ ;  $\sigma_d d\vec{S}_d$  – питома поверхнева енергія і зміна площі поверхні дислокаційних границь.

Отже, дисипативна енергія пластичнодеформованих поверхонь контакту тертя з врахуванням швидкості зміни їх площі (швидкість тертя) приводить до виразу дисипативної функції:

$$\Psi_s = \frac{d\vec{S}_0}{dt} (-\Delta\sigma_0) + \frac{d\vec{S}_m}{dt} (-\Delta\sigma_m),$$

де  $\Delta\sigma_0 = \sigma_0 - \frac{\sigma_d^0}{2}$ ;  $\Delta\sigma_m = \sigma_m - \frac{\sigma_d^m}{2}$ .

Вирази  $\frac{d\vec{S}_0}{dt}$  та  $\frac{d\vec{S}_m}{dt}$  є показниками швидкості зміни дисипативної енергії пластичної деформації на площах контакту в процесі тертя і залежить від багатьох факторів, і в першу чергу, від навантаження та швидкості процесу тертя. Це знаходить підтвердження в роботах багатьох дослідників [6,7], які довели, що енергія тертя трансформується в енергію дислокацій, що призводить до крихкості поверхневих шарів і сколювання окремих фаз у зоні тертя.

Вводячи у вираз дисипативної функції коефіцієнти, які характеризують фактори умов тертя (навантаження, швидкість руху, циклічність, температуру і т.п.), а також структурну будову речовини, можна ексклюзивно оцінити характер і ступінь зношування матеріалу у процесі тертя.

Виходячи з отриманих результатів, знаходяться пояснення екстремальних результатів залежності зносостійкості від розмірів частинок наповнювача в КЕП, тобто, чим більший розмір частинок наповнювача, тим швидше дисипативна енергія по границі зерна перетвориться на

пружну енергію, яка веде до окрихчування – втрати сил зв'язку з матрицею і, як результат, його викришування. В подальшому ці карбіди забезпечують абразивне зношування. Підвищення зносостійкості за наявності включень карбідів з величиною зерна до певних розмірів пов'язано, очевидно, із закономірностями пропрацьовування пари тертя та незруйнованими силами зв'язку зерна з матрицею через недостатню кількість пружної енергії, яка забезпечує крихке відшарування карбідного зерна.

### **Висновки**

Зносостійкість композиційних електролітичних покриттів системи TiC від розміру карбідного зерна залежить, насамперед, від сил зв'язку з матрицею. Дифузійне хромовання такого покриття підвищує цей зв'язок, очевидно, за рахунок додаткової взаємодії між атомами різних компонентних систем.

Різне зменшення зносостійкості за різних навантажень починається при різних значеннях розміру зерна карбіду, що пояснюється крихким сколюванням його в площині контакту тертя. Крім цього, дифузійне насичення КЕП забезпечує його підвищену міцність зчеплення з поверхнею матриці, що є суттєвим при нанесенні їх на нержавіючі сталі.

Процес крихкого сколювання карбідної фази пов'язаний з тим, що дисипативна енергія, яка є результатом пластичної деформації в зоні тертя, перетворюється в пружну і зосереджується на границях фази, що і збільшує крихке сколювання карбідного зерна.

### *Література*

1. Износостойкие диффузионнолегированные композиционные покрытия / [М.В. Лучка, М.В.Киндрачук, П.И.Мельник та ін.]. – К.: Техніка, 1993. – 144с.
2. Сайфулин Р.С. Композиционные покрытия и материалы / Р.С. Сайфулин. – М.: Химия, 1977. – 272с.
3. Структуроутворювання та формування триботехнічних властивостей евтектичних покриттів / [М.В. Кіндрачук, Ю.А.Куницький, О.І.Дудка та ін.]. – К.: Вища школа, 1997. – 120 с.
4. Кіндрачук М.В. Експериментально-аналітичні дослідження триботехнічних характеристик покриттів матричнонаповненого типу / М.В.Кіндрачук, М.В.Лучка, А.О.Корнієнко // Проблеми трибології. – 2005. – №2. – С. 74-80.
5. Хазе Р. Термодинамика необратимых процессов / Р.Хазе. – М.: Мир, 1967. – 544 с.
6. Gassner E. On the influence of fretting corrosion on the fatigue life of notched specimen of an Al – Cu – Mg 2 Alloy. Fatigue Aircraft Struct. Oxford – L – N – Y – Paris, Pergamon Press, 87-95, 1963.
7. Warlow – Davies E.J. Fretting corrosion and fatigue strength: brief results of preliminary experiments. Proc. Inst. of Mech. Eng. 146, 32, 1941.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 05.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.х.н., професором Фреїком Д.М.,  
д.ф.-м.н., професором Ільчуком Г.А. (м. Львів)*

**THE DEPENDENCE OF THE WEAR RESISTANCE  
OF THE COMPOSITE COATING PRECIPITATED  
ON THE DISPERSION OF ITS FILLER**

**P. I. Melnik<sup>1</sup>, M. V. Kindrachuk<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ivano-Frankivsk University of Law named after King Danylo Galician;  
76018, Ivano-Frankivsk, str. Konovalca, 35*

<sup>2</sup>*National Aviation University; 03680, Kyiv, Prospect Komarova, 1*

*Research shows that the process of wearout TCT is conducted on nickeliferous basis at the dry friction of sliding. Factory configured that depending on the size of carbidic phase of TiC and diffusive chrome-plating, coming from the understanding of transformation energy of flowage in the area of contact to energy of distributions in the area of friction which conduces to painting of hard phase.*

**Key words:** *wear, carbidic phase, dissipative energy, distributions, fragility.*

УДК 621.315.592

**НАНОКОМПОЗИТНІ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНІ МАТЕРІАЛИ:  
ОТРИМАННЯ, ВЛАСТИВОСТІ, ВИКОРИСТАННЯ (ОГЛЯД)****Д. М. Фреїк<sup>2</sup>, О. С. Криницький<sup>1</sup>, О. М. Матківський<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76018, Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;**e-mail: [oleksandr.krynytsky@gmail.com](mailto:oleksandr.krynytsky@gmail.com)*<sup>2</sup>*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;  
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;**e-mail: [freik@pu.if.ua](mailto:freik@pu.if.ua)*

*Проведено детальний аналіз технологічних методів, що використовуються для отримання нанокompозитних структур напівпровідникових термоелектричних матеріалів та способів їх компактування у масивні зразки. Особлива увага звернена на характеристику різного класу сполук для отримання нанокompозитів: структуру, термоелектричні властивості, методи компактування, шляхи використання. Вказано нові стратегії у отриманні нанокompозитів.*

**Ключові слова:** термоелектрика, наноструктура, нанокompозити

**Зміст****Вступ****I. Методи отримання нанокompозитних матеріалів**

- 1.1. Кулькові млини
- 1.2. Механічне стирання
- 1.3. Синтез методом мокрої хімії
- 1.4. Золь-гель синтез
- 1.5. Електрохімічне осадження
- 1.6. Конденсація в інертному газі
- 1.7. Сонохімічний синтез
- 1.8. Хімічне осадження з парової фази (CVD)

**II. Методи компактування нанокompозитних матеріалів**

- 2.1. Холодне пресування
- 2.2. Гаряче пресування
- 2.3. Іскро-плазмове спікання

**III. Термоелектричні властивості нанокompозитних матеріалів**

- 3.1. Нанокompозити на основі  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$
- 3.2. Нанокompозити на основі  $\text{PbTe}$
- 3.3.  $\text{AgSbTe}_2\text{-(PbTe)}_m$  сполуки (LAST-m)
- 3.4. Нанокompозити на основі  $\text{Mg}_2\text{Si}$
- 3.5. Скутерудити на основі  $\text{CoSb}_3$
- 3.6. Si-Ge нанокompозити

## 3.7. Халькогеніди Лантану

## 3.8. Половинні сполуки Гейслера

## IV. Нові стратегії формування нанокompозитів

## Висновки

## Література

**Вступ**

Запаси викопного палива вичерпуються, в той час як світове споживання енергії щорічно зростає. У цих умовах необхідним стає створення і впровадження альтернативних джерел енергії. Термоелектричні явища, суть яких полягає у взаємоперетворенні теплової та електричної енергій, лежать в основі розробки матеріалів для виробництва енергії з тепла і для охолодження під дією електричного струму (рис.1).

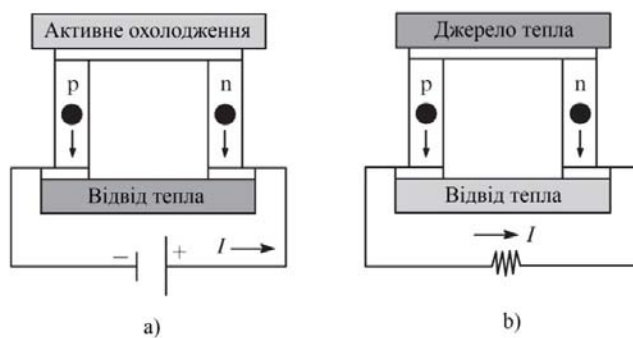


Рис.1. Схема найпростішого термоелектричного пристрою для охолодження (а) і для генерування струму (б) [1]

Запропоновані ще у 1950-х рр., напівпровідникові термоелектричні матеріали на основі телуридів вісмуту і свинцю не можуть задовольнити зростаючої потреби виробництва. Так, зокрема, важливою проблемою є перетворення тепла, що виділяється при роботі машин, на електричну енергію. Очікується, що перетворення відведеного від двигунів внутрішнього згоряння автомобіля тепла в електричний струм для живлення бортового устаткування сприятиме до економії 20-25% палива. Крім того, використання ефективних термоелектричних охолоджувачів є вкрай вигідний з кількох причин. По-перше, термоелектричні пристрої, в порівнянні з традиційними компресорними холодильними установками, надзвичайно компактні і не містять рухомих частин, чим забезпечується їх висока надійність і безшумність роботи (термін служби до 200 000 годин, тобто близько 25 років); крім того, вони не вимагають технічного обслуговування. По-друге, термоелектричні охолоджувачі можуть бути інтегровані в пристрої, де потрібне локальне охолодження однієї або декількох частин. По-третє, термоелектричні охолоджувачі не містять шкідливих хімічних сполук, що зумовлює їх екологічну привабливість. Очікується, що при досягненні  $ZT=3$  ефективність термоелект-

ричних матеріалів буде достатню для повсюдного витіснення компресорних холодильних агрегатів термоелектричними. Тут

$$Z = \frac{\sigma S^2}{\chi}, \quad (1)$$

де  $Z$  – термоелектрична добротність,  $S$  – термо-е.р.с. (коефіцієнт Зеєбека),  $\sigma$  – питома електропровідність,  $\chi$  – теплопровідність.

Найбільш зручними для використання в термоелектричних пристроях є тонкі плівки, наночастинки, суперґратки, нанопроводи, неорганічні нанотрубки і нанокомпозити, що дозволяють зменшити теплопровідність.

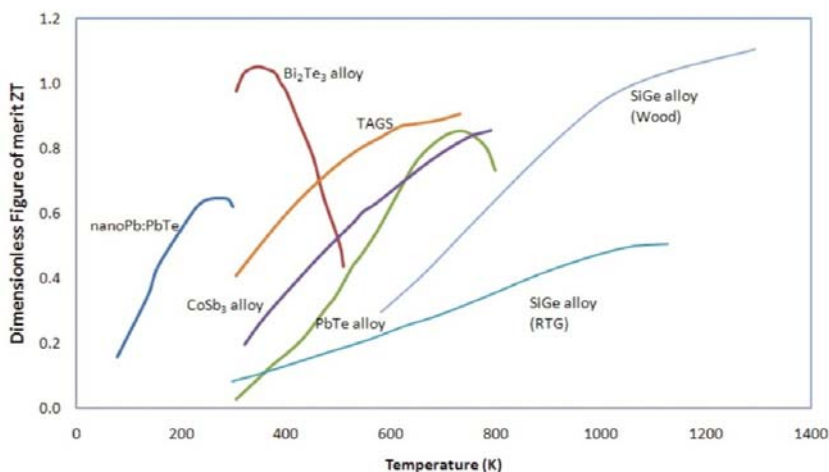


Рис.2. Значення добротності  $ZT$  в різних діапазонах температури для традиційних матеріалів [2]

Згідно з (1) видно, що високоякісний термоелектричний матеріал повинен одночасно мати високу електропровідність, велику термо-е.р.с. і низьку теплопровідність. Термо-е.р.с. і провідність визначаються тільки електронними властивостями матеріалу, і тому їх часто об’єднують у величину

$$P = \sigma S^2, \quad (2)$$

яку називають “фактором потужності”. Теплопровідність  $\chi = \chi_e + \chi_L$  є сума електронного  $\chi_e$  і ґраткового внесків  $\chi_L$ , тому, щоб максимально збільшити термоелектричну добротність, електронна провідність повинна бути якнайбільшою при найменшій теплопровідності. Однак, оптимізувати значення  $ZT$  виявилось не так просто, адже зі зростанням провідності термо-е.р.с. зазвичай зменшується. Основним зі способів поліпшення термоелектричних властивостей існуючих матеріалів (рис.2) сьогодні є використання просторово-неоднорідних матеріалів з неоднорідностями, розміри яких порівнянні з характерними довжинами хвиль електронів або фононів, тобто лежать у нанометровій області (рис.3).

У даній статті зроблена спроба систематизувати існуючий у літературі матеріал стосовно технологічних можливостей формування нанокompозитних термоелектричних структур різного класу сполук та їх основних властивостей.

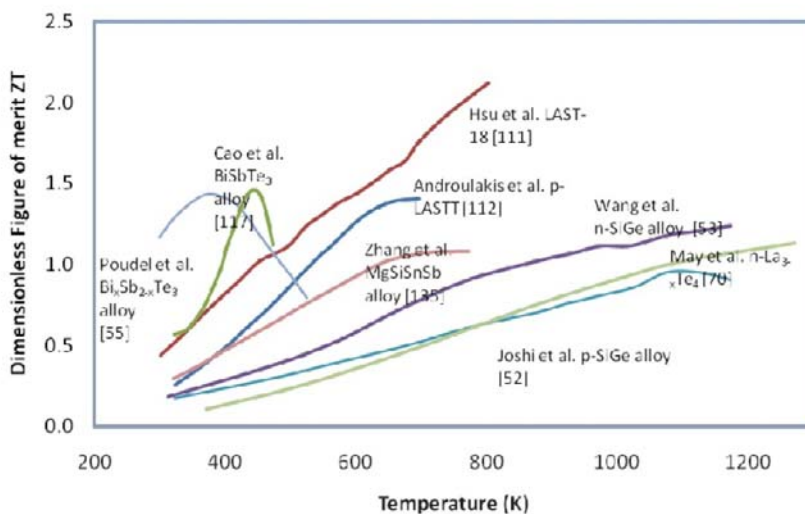


Рис.3. Температурна залежність безрозмірної добротності ZT для нанокompозитних матеріалів [2]

## I. Методи отримання нанокompозитних матеріалів

Для отримання нанокompозитів, термоелектричні наночастинки зазвичай готують, а потім ущільнюють в об'ємні тверді тіла. Термоелектричні наночастинки можуть бути отримані із застосуванням таких методів: гідротермальним, хімічними реакціями і кульковими млинами [3-21]. Серед цих методів, кулькові млини є ефективним промисловим підходом для отримання нанодисперсних частинок.

### 1.1. Кулькові млини



Рис.4. а) – Схематичне зображення кулькового млина; б) – кульковий млин із завантаженим матеріалом для подрібнення; с) – зовнішній вигляд лабораторного кулькового млина [24]

Звичайні кулькові млини використовувались для отримання великої кількості дрібних часток з розміром від одного до декількох мікрон (рис.4). Високоенергетичні кулькові млини, розроблені в 1970-х

роках в якості промислового процесу, можуть створити наночастинки розміром кілька нанометрів [22]. Було доведено, що високоенергетичні кулькові млини є ефективною і потужною технікою для обробки для отримання великих кількостей термоелектричних наночастинок із злитків протягом короткого часу [21]. На рис.5,a,b показано, кристалічні злитки і кристаліти р-типу  $(\text{Bi,Sb})_2\text{Te}_3$  злитка, до їх подрібнення ніж використовують кулькових млинах. Злитки є об'ємними монокристалами. Після застосування кулькового млина, можуть бути отримані наночастинки (рис.5,c,d). Крім кристалічних злитків, термоелектричні наночастинки також можуть бути отримані безпосередньо з окремих елементів за допомогою методу високоенергетичних кулькових млинів [17-21]. Наприклад, кристалічний  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  нанопорошок, показаний на рис.5,d, може бути безпосередньо синтезований з елементів Bi і Te шляхом механічного легування.

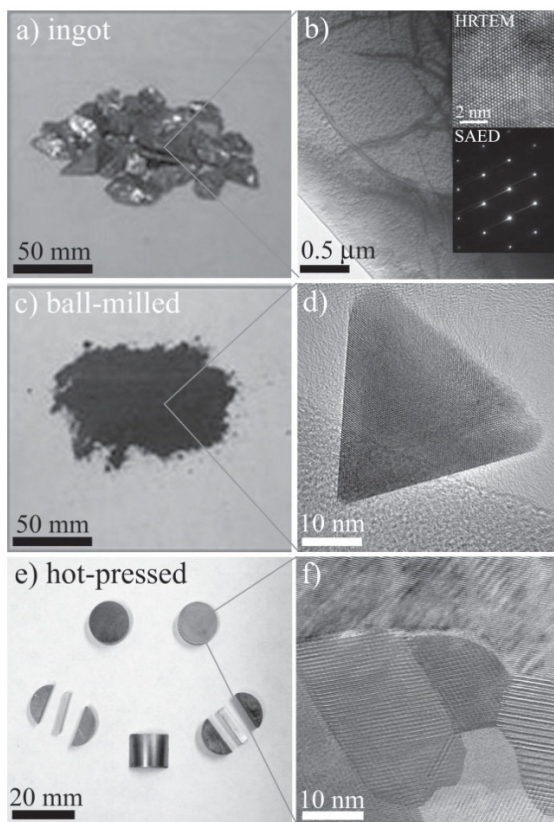


Рис.5. а) Оптичне зображення кристалічних злитків до їх подрібнення у кульковому млині; б) ПЕМ (просвічуюча електронна мікроскопія) зображення р-типу  $(\text{Bi,Sb})_2\text{Te}_3$  злитка. Вставки є HRTEM (просвічуюча електронна мікроскопія з високою роздільною здатністю) злитка; с) Оптичне зображення подрібнених нанопорошків із злитків кульковим млином; d) HRTEM зображення типових  $(\text{Bi,Sb})_2\text{Te}_3$  нанопорошків – подрібнених кульковим млином злитків; е) оптичне зображення гарячоспресованих наноконкомпозитів із подрібнених порошків, показаних на (с); f) HRTEM зображення декількох нанозерен р-типу  $(\text{Bi,Sb})_2\text{Te}_3$ , виготовлених методом гарячого пресування [23]



### **1.2. Механічне стирання**

Механічне стирання є одним з найбільш популярних методів синтезу наноструктур з об'ємної сировини. Це пов'язано не тільки із зручністю і мінімальною вимогою до складного обладнання, але й, універсальністю в плані кількості різних систем матеріалів, які можуть бути підготовлені у такий спосіб. Так, внаслідок структурного подрібнення крупних зерен на більш дрібні в результаті пластичної деформації за кімнатної температури можуть бути створені наноструктури. Цей процес може бути виконаний на млині відцентрового типу та млині вібраційного типу. Наночастинки розміром від 200 нм до мінімального (5-10) нм можуть бути отримані шляхом розтирання, із застосуванням вібраційних млинів і горизонтальних кулькових млинів [25]. Оскільки процес чутливий до забруднення, контроль атмосфери є важливим для підтримання чистоти матеріалу, зокрема, щоб уникнути окислення. Тому процес приготування термоелектричних матеріалів відбувається в атмосфері газу аргону або азоту. Забруднення від зносу подрібнюючих машин – також проблема механічного стирання, яке може негативно вплинути на якість сплавів, що вимагає вибору раціонального часу обробки і крупності подрібнення [26]. Механічне стирання було використане для отримання нанопорошків сплавів Fe-Si, Si-Ge сплавів, PbTe і PbSbTe сплавів, BiSbTe сплавів, MgSiSn, CoSb<sub>3</sub>, а також таких матеріалів, як La<sub>3-x</sub>Te<sub>4</sub>, які складно синтезувати іншими традиційними методами [17,27-35,16].

### **1.3. Синтез методом мокрої хімії**

Спосіб “микрої хімії” є потужним інструментом для отримання наноструктур різних форм. Це, наприклад, солвотермальний (в тому числі гідротермальний) метод синтезу наноструктур – розчинення у воді (або придатному розчиннику) неорганічних прекурсорів за підвищених температур (вище критичної точки розчинника), і завдяки чому створюється тиск в автоклаві (рис.6), з подальшою кристалізацією розчиненої речовини з рідини. У порівнянні з іншими методами підвищення температури реакції, солвотермальний метод може призвести до прискореного зростання кристалів, яке супроводжується точним розподілом частинок за розмірами і формами кристалітів.

Ще однією перевагою цього методу є те, що можуть бути синтезовані наноструктури різної морфології, такі, як нанопорошки, нанотрубки, багатогранні наночастинки. Крім того, більшість матеріалів можуть бути розчинені у розчиннику шляхом нагрівання за тиску, близькому до критичної точки. Такий підхід є обґрунтований для синтезу наноструктур широкого спектру матеріалів. Гідротермальний синтез був використаний для отримання наноструктур Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub>, Sb<sub>2</sub>Te<sub>3</sub>, PbX (X = S, Se, Te), CoSb<sub>3</sub> і т.д. [37-43]. На рис.7 показано ПЕМ-зображення Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> нанотрубок, синтезованих гідротермальним методом. З іншого боку, гідротермальний метод може працювати в м'яких умовах для виготовлення різних видів наноструктур в анізотропному процесі зростання шляхом до-

давання різних поверхнево-активних речовин або додаткових умов реакції, такі як температура, рН і т.д. У роботах [44, 45] з використанням цього методу були виготовлені нанотрубки  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ .

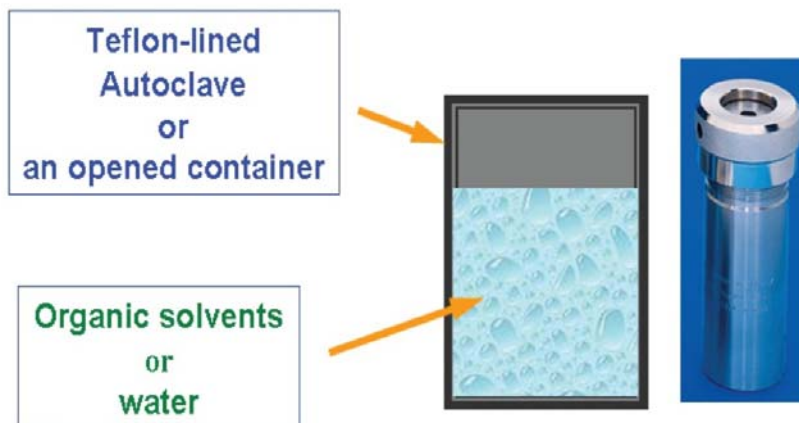


Рис.6. Схематичне зображення автоклаву для гідротермального синтезу наноструктур [36]

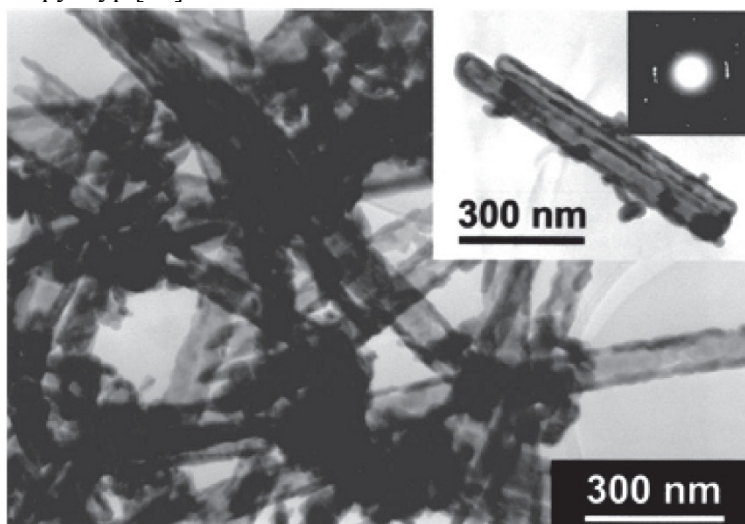


Рис.7. ПЕМ-фотографії гідротермально синтезованих  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  нанотрубок [37]

#### 1.4. Золь-гель синтез

Цей метод реалізується в рідкій фазі. Цей процес забезпечує утворення наночасток, а також наноструктурованих поверхонь і тривимірних наноструктурованих матеріалів.

«Золь» є одним з видів колоїдних розчинів, в яких дисперсні тверді фази змішуються в однорідний рідкий розчин. Прикладом природного золю є кров. Як випливає з назви, золь-гель – це процес, що включає в себе утворення через формування колоїдної суспензії (золь).

На першому етапі в золь-гель процесі відбувається синтез колоїдних розчинів, у яких прекурсорами є, як правило, іони металів. Алкоок-

сидами металів і алкоксисілани є найпопулярнішими, так як вони легко реагують з водою (гідроліз). Найбільш широко використовуваним із алкоксиланів є тетраметоксилан (TMOS) і тетраетоксилан (TEOS), які утворюють силікатгель. Алкоксиди, (як алюмінати, титанати і борати) також використовуються, часто з домішкою TMOS або TEOS. Крім того, оскільки алкоксиди і вода не змішуються, їх спільним розчинником є алкоголь.

Золь-гель синтез складається з чотирьох етапів. Перший етап – реакція гідролізу, в якому -OR група замінюється на -OH групу. Реакція гідролізу може відбуватися без каталізатора, але вона є швидшою у разі його використання. Як і в будь-якій реакції гідролізу, каталізатором може бути NaOH або NH<sub>3</sub> або кислоти HF, CH<sub>3</sub>COOH.

Після гідролізу, сіль починає конденсуватися і полімеризується. Це призводить до зростання часток, які, в залежності від умов (напр. як рН), досягають розмірів у кілька нанометрів. Реакції конденсації/полімеризації є досить складними і проходять з виникненням проміжних продуктів, у тому числі циклічних структур. Потім частинки агломерату починають формуватися у всьому рідкому середовищі в результаті згущення. Так утворюється гель.

Синтез, залежить від початкових умов реакції гідролізу і конденсації/полімеризації: рН, температури, часу реакції, природи каталізатора і тощо.

Золь-гель процес є основним для дотримання силікагелю. Також можуть бути утворені інші типи гелів. Особливістю алюмосилікатних гелів є можливість формування трубчастих структур. Одним з таких продуктів є іможоліт, зовнішнім діаметром близько 2,5 нм і внутрішнім діаметром трубки 1,5 нм. Ці типи наноструктур – добрі адсорбенти для аніонів, таких як хлорид, хлорат, сульфатів і фосфатів. Структура іможоліту (imogolite) може бути розчинена HF. Таким чином, ці наноструктури можуть бути використані для матричного синтезу: трубка може бути заповнена атомами і потім розчиняється, залишаючи ряди атомів (2,5 атомів золота з рядом розмірів 1 нм).

На рис.8 зображено різні матеріали, які можна отримати золь-гель методом. Щоб отримати максимально великі площі поверхні наночастинок, гель слід розмістити на поверхні. Інша стратегія полягає у формуванні аерогелю. Це – тривимірна безперервна мережа частинок з повітрям (або будь-яким іншим газом). Аерогелі характеризуються пористістю і над легкістю, однак і вони не в змозі витримати навантаження, у 100 разів більшого своєї ваги.

Золь-гель синтез – універсальний спосіб створення впорядкованих наноструктур на поверхні. Особливістю рідких кристалів є те, що вони мають кристалічну структуру, але існують в рідкій (а не твердій) фазі. Цим способом отримано наноструктурований кремній з контрольованим розміром пор, форм і порядком [71].

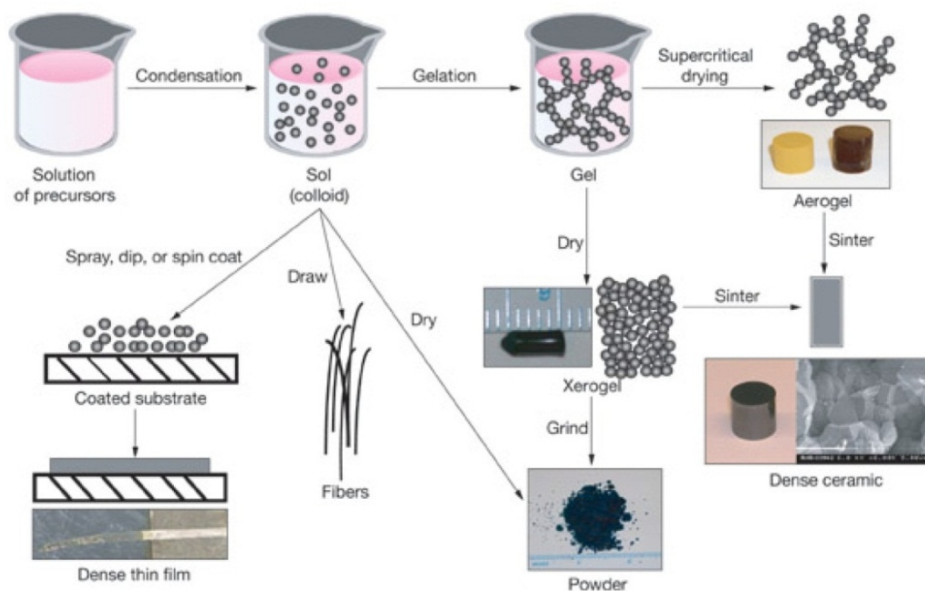


Рис.8. Схема матеріалів, які можуть бути отримані за допомогою золь-гель процесу [71]

### 1.5. Електрохімічне осадження

Електрохімічне осадження забезпечує легкий і ефективний спосіб виготовлення різних наноструктурованих металевих сплавів для термоелектричних пристроїв [46,47]. Так, за допомогою процесу електроосадження (рис.9) з використанням пористого анодного оксиду алюмінію (ПАК) як шаблону було виготовлено високоякісний масив нанопроводів  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ . Ця техніка була швидко розвинута як популярний метод для отримання різних термоелектричних масивів нанопроводів, такі як:  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ,  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ ,  $\text{Bi-Sb-Te}$ ,  $\text{Bi-Te-Se}$ ,  $\text{CoSb}_3$ ,  $\text{PbTe}$  та ін [49-53].

Високий ступінь контролювання діаметра і довжини нанопроводів може бути здійснено в цьому методі. Діаметр отриманих нанопроводів становить від 20 до 300 нм і пов'язаний з розміром пор шаблону, а довжина залежить від часу електроосадження. Крім того, склад сплаву можна регулювати, змінюючи вміст розчину електроліту, орієнтація масиву нанопроводів може бути змінена налаштуванням напруги осадження або з використанням імпульсних процесів електроосадження [55,56]. Рівномірність зростання також може бути досягнута гальванопокрыттям за низьких температур [57].

Електроосадження також може бути використане для синтезу різних гетероструктурних наноматеріалів.

Використанням шаблонів імпульсного електроосадження під дією потужності (напруги) осадження [58,59] різної величини можна отримати різні види термоелектричних матеріалів, їхнього почергово і періодично розміщення. Автори [60] повідомили деталі вивчення системи

Bi-Sb-Te і успішного керування ростом нанопроводів гетероструктур  $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{Sb}$  із заданими періодом. Так, мінімальний розмір, синтезованих нанопроводів  $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{Sb}$  гетероструктури становив 10 нм (рис.10). Були також виготовлені  $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{Te}$  гетероструктури [61].

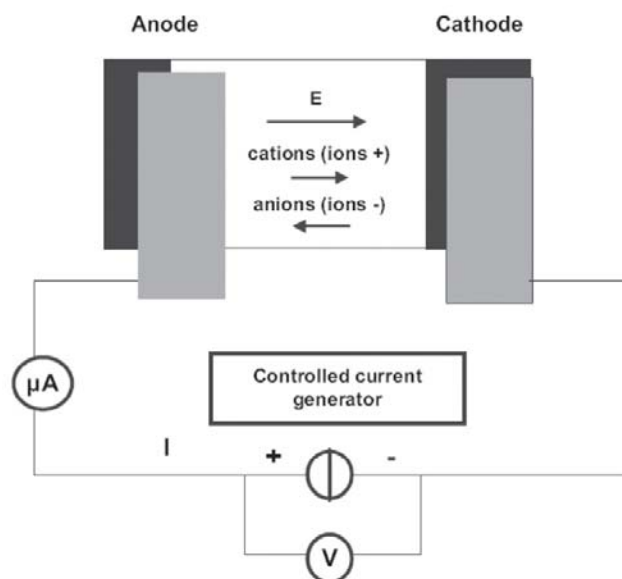


Рис.9. Загальна схема процесу електрохімічного осадження [54]

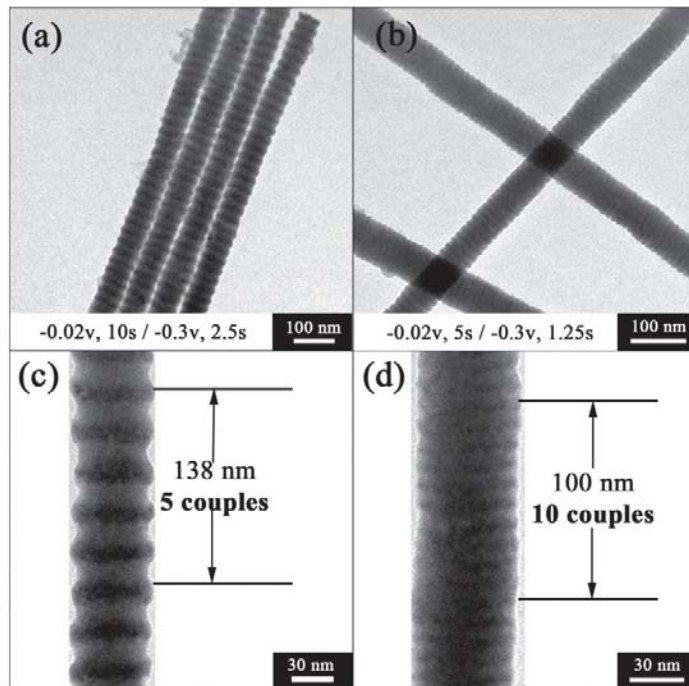


Рис.10. ПЕМ-зображення багат шарових нанодротикув  $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{Sb}$ , створених за різних умов (помічені в нижній частині кожного рисунка) (a,b); відповідні ПЕМ-зображення з високою роздільною здатністю (c,d) [60]

**1.6. Конденсація в інертному газі**

Конденсації в інертному газі є універсальним процесом, що використовується для синтезу експериментальних кількостей наноструктурованих металевих і інтерметалевих порошоків. Особливістю процесу є можливість генерувати неагломерований нанопорошок, шляхом спікання за відносно низьких температур. Джерело випаровування використовується для генерації часток порошку, який транспортується конвективно і збирається на холодній підкладці (рис.11). Наночастки формуються в термальній зоні трохи вище джерела випаровування через взаємодію між гарячою парою та набагато холоднішими атомами інертного газу (тиск в камері зазвичай (1-20) мбар). Останнім часом цей метод був використаний для виготовлення Si-Ge нанокompозитів [62].

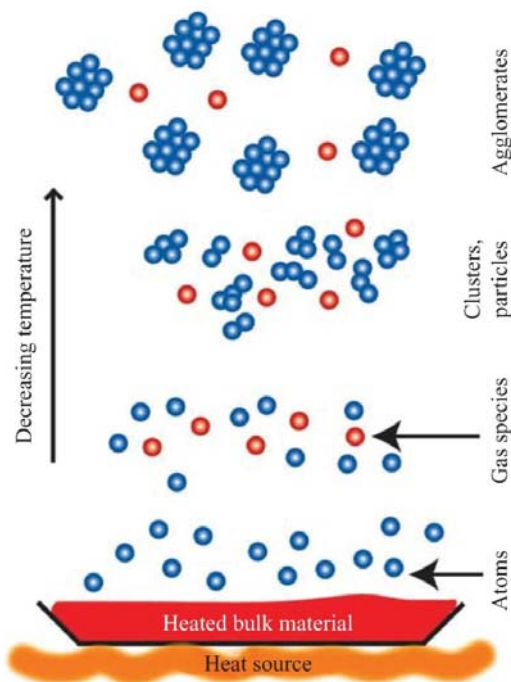


Рис.11. Ілюстрація процесу конденсації в інертних газах [63]

**1.7. Сонохімічний синтез**

Основний механізм сонохімії виникає з акустичного явища кавітації, тобто утворення, зростання і імпульзійного лускання бульбашок в рідкому середовищі в результаті опромінення ультразвуковими хвилями (рис.12).

Надзвичайно висока температура (>5000 K), тиск (>20 МПа) і дуже висока швидкість охолодження (>10<sup>7</sup> K/c) може бути досягнута локально під час акустичної кавітації, які призводять до багатьох унікальних властивостей опроміненого розчину [65]. Чудові переваги цього методу включають швидку швидкість реакції, керовані умови реакції та здатність до утворення наночасток однакової форми, вузьким розподі-



лом за розмірами і високої чистоти. Сонохімічний метод синтезу був використаний для отримання нанокристалів  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$ ,  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  та проміжних сполук, інших телуридів і селенідів металів [66-68]. На рис.13 показана ПЕМ мікрофотографія  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  нанокристалів, отриманих сонохімічним синтезом.

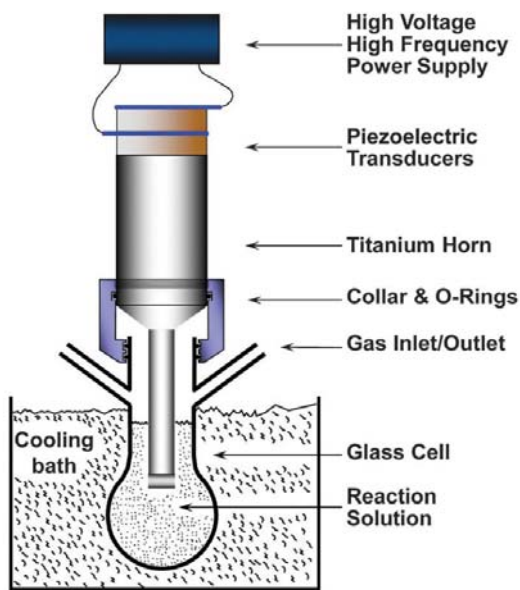


Рис.12. Типова лабораторна установка для сонохімічних реакцій. Використовується висока інтенсивність ультразвукових хвиль, як правило близько 20 кГц і від 10 до 100 Вт акустичної потужності [64]

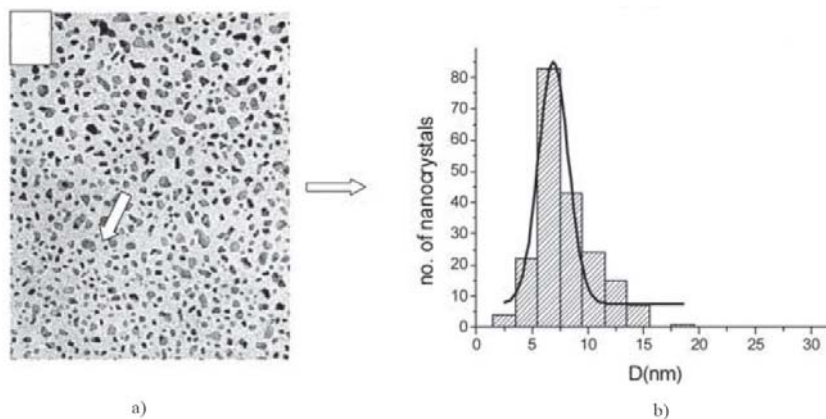


Рис.13. ПЕМ-зображення (а) і розподіл розмірів нанокристалів  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  (b) підготовлених сонохімічним синтезом. Масштаб ТЕМ зображення 100 нм [66]

### 1.8. Хімічне осадження з парової фази (CVD)

Хімічне парофазне осадження (chemical vapor deposition – CVD) – це хімічний процес, який розроблений для отримання твердих неорганічних покриттів, як правило, підвищеної чистоти. Суть даного методу

полягає в тому, що кінцевий продукт утворюється на підкладці-мішені, що знаходиться в найбільш нагрітій зоні, в результаті взаємодії газоподібних речовин-прекурсорів в гарячій зоні або термолізу пара речовини-прекурсору (рис.14).

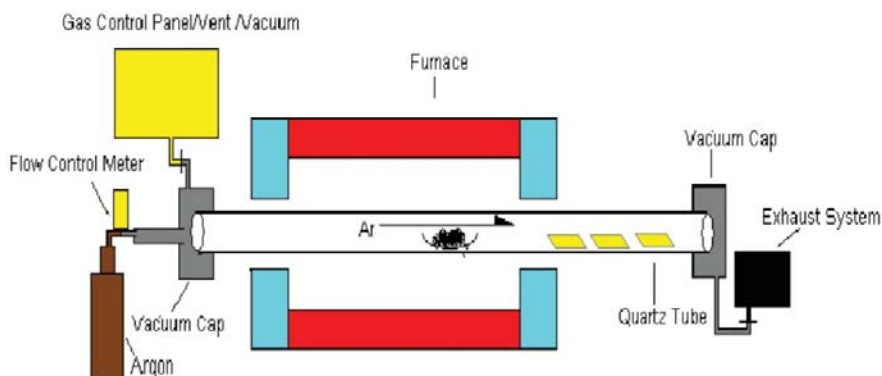


Рис.14. Принципова схема конвекційного хімічного осадження з парової фази [36]

При цьому речовинами-прекурсорами можуть бути не тільки гази але і тверді речовини, але й рідини, в цьому випадку їх випаровують у спеціальній зоні реактора, а потім транспортують до підкладки-мішені за допомогою газу-носія, який може бути як «інертним», так і брати участь в синтезі. Також можлива організація процесу без газу-носія; в цьому випадку експеримент виконується під динамічним вакуумом. Якщо в результаті реакції утворюються газоподібні побічні продукти, вони видаляються з реактора потоком газу носія або динамічним вакуумом [69]. Схема протікання CVD процесу зображена на рис.15.

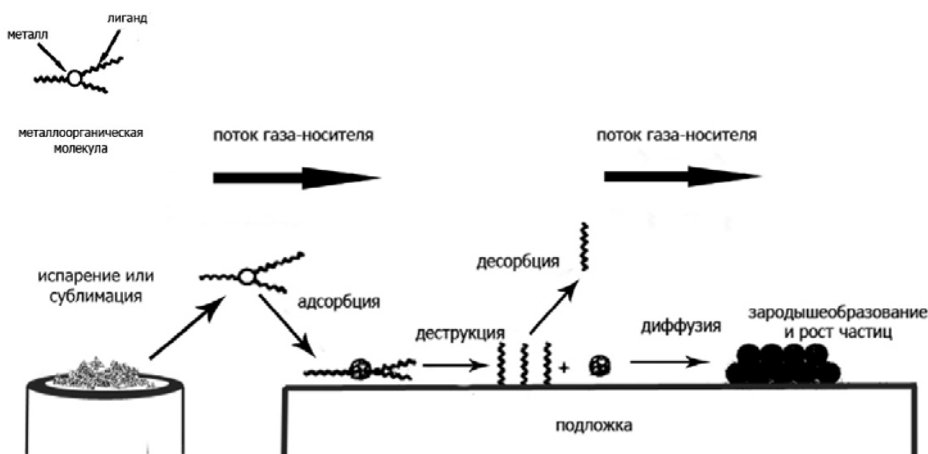


Рис.15. Схема хімічного парофазного осадження [69]

Всі CVD процеси мають ряд загальних етапів (показано на рис.16) це:

1. Генерація прекурсорів активних газоподібних реагентів;
2. Транспортування прекурсору в реакційну камеру;



3. Адсорбція прекурсорів на гарячу поверхню;
4. Розкладання прекурсора, для отримання атомів, необхідних для плівки і органічних відходів;
5. Міграція атомів у місце осадження;
6. Зародження, що призводить до зростання тонкої плівки;
7. Десорбція небажаних побічних продуктів;
8. Видалення небажаних продуктів.

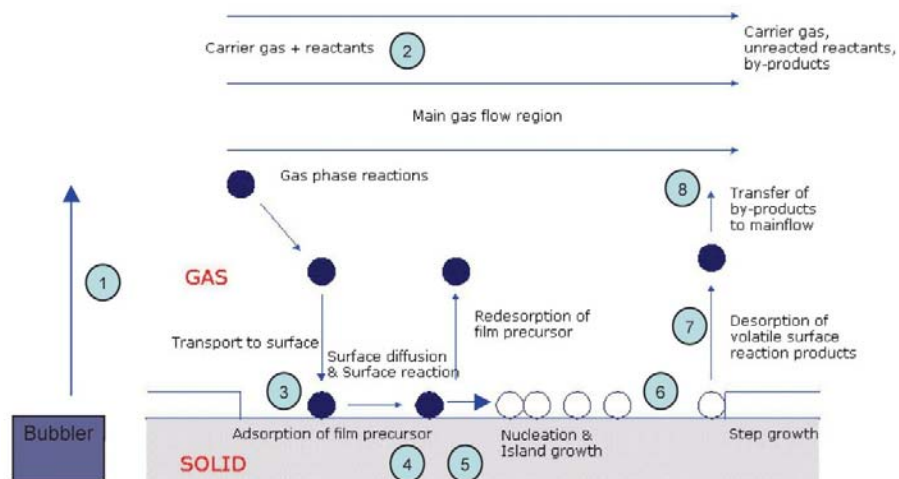


Рис.16. Діаграма черговості реакцій у CVD методі [70]

## II. Методи компактування нанокompозитних матеріалів

Відомо ряд методів компактування для отримання об'ємних термоелектричних зразків із нанорозмірних компонент: іскроплазмове спікання, холодне пресування, спікання, гаряче пресування і екструзійні методи [77-80]. Суть всіх методів ущільнення полягає в застосуванні високого тиску для компактування, а часто і досить високої температури, щоб пом'якшити матеріали, і щоб видалити залишки пористості, тобто досягнути високої густини без втрати нанорозмірних мікроструктур і збереження матеріалу хімічно чистим.

### 2.1. Холодне пресування

Холодне пресування – це процес, в якому порошкові матеріали стиснені в інтервалі кімнатних температур. Холодне стиснення є найбільш поширеним методом компактування в порошковій металургії. Таким чином, холодне пресування забезпечує збереження метастабільних нанорозмірних компонентів. Але через це у ряді випадків нанопорошки не дуже добре зв'язані, що призводить до зниження рухливості носіїв, а, отже, і низького значення ZT [75].

### 2.2. Гаряче пресування

Більш поширеним способом пресування нанопорошків є гаряче пресування (рис.17), де крім високого тиску, прикладеного до зразка, одночасно застосовується нагрівання. Це є причиною кращого зв'язку

між частинками і вищої рухливості носіїв у зразку. Проте виникає проблема збереження нанометрового розміру кристалічних зерен у кінцевому зразку, тому що зерно може суттєво зрости. На рис.18 показано ПЕМ-зображення нанокompatитів  $\text{Bi}_x\text{Sb}_{2-x}\text{Te}_3$ , підготовлених кульковим млином і гарячим пресуванням [18]. Очевидно, що за оптимальних умов гарячого пресування можна зберегти наноструктури і не знизити продуктивності термоелектричних матеріалів.

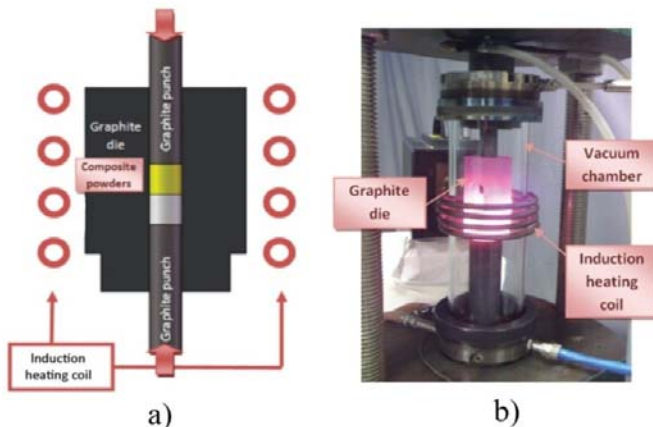


Рис.17. Схематичне зображення процесу гарячого пресування (a) і світлина методу (b) [81]

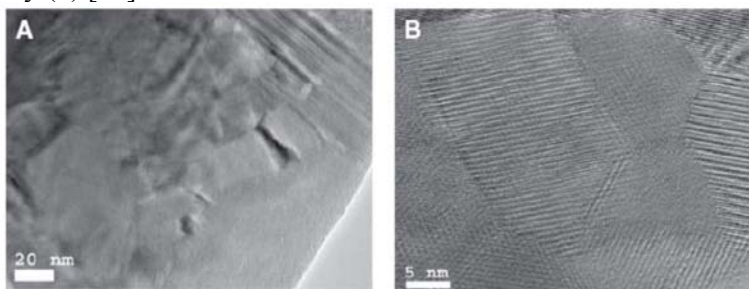


Рис.18. ПЕМ зображення, мікроструктури гарячо спресованих нанокompatитів  $\text{Bi-Sb-Te}$ : Невелике збільшення зображення нанозерена (A); велике збільшення зображення (B) видно, нанорозмірні кристалічності, випадково орієнтовані і чисті межі зерен [16]

Поєднання високих енергій кулькових млинів і гарячого пресування є дуже привабливим з комерційної точки зору, тому що ним може бути отримана велика кількість нанопорошків за короткий час. З дослідницької точки зору, цим методом можна підготувати багато термоелектричних матеріалів з різним хімічним складом і різного рівня легування, високої густини. Наприклад, густина гарячоспресованих нанокompatитів є вищою 98%, або навіть 100% [82,16]. Гаряче пресування нанокompatитів також забезпечує їх термічну стабільність при високих температурах і ізотропність термоелектричних параметрів. Методи були використані для підготовки багатьох термоелектричних нанокompatитів:

$\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ,  $\text{SiGe}$  сплавів і скутерудитів  $\text{CoSb}_3$  [16-18,20,83]. Наприклад, максимум  $ZT=1,4$  досягається в  $p\text{-Bi}_x\text{Sb}_{2-x}\text{Te}_3$  нанокompозитах виготовлених кульковим млином і методом гарячого пресування [16]. Уперше метод гарячого пресування був використаний для підготовки  $\text{PbSe}$  композитів ще на початку 1960 р. [84], а пізніше був використаний для виробництва полікристалічного матеріалу  $\text{SiGe}$  для місій НАСА. У даний час метод гарячого пресування є “зрілою” технологією для виробництва термоелектричних нанокompозитів [85]. Техніка гарячого пресування може бути поєднана з будь-яким іншим способом отримання наночастинок.

### 2.3. Іскро-плазмове спікання

Іскро-плазмове спікання (SPS) є новою технологією спікання, яка набуває все більшої популярності у виготовленні термоелектричних нанокompозитів [86]. При цьому зразок нагрівається імпульсами електричного струму, який тече крізь нього у пуансоні (рис.19). Через те що струм є високим, за порівняно невеликих проміжків між частинками у порошку відбуватимуться електричні розряди, тобто створюються мікроскопічні електричні дуги, що призводить до виникнення високих температур і тисків і утворення контакту між частинками. Додатковою перевагою методу є те, що гази і волога, які були адсорбовані на поверхні наночастинок, усунені, а оксидний шар може бути порушений дугою. Згодом відбувається джоулеве нагрівання внаслідок протікання струму через зразок. Так, тепло генерується всередині SPS, на відміну від звичайного гарячого пресування, де тепло забезпечується зовнішніми нагрівальними елементами, що дає дуже високі швидкості нагрівання ( $>573$  К/хв) і короткий час спікання. Крім того, висока швидкість процесу гарантує уникнення укрупнень, порошоків з нанорозмірами або наноструктурами, яке супроводжує стандартні способи пресування. Густина, дуже близька до теоретично розрахованої густини, і відмінні термоелектричні характеристики були досягнуті в зразках, отриманих методом SPS. З урахуванням цих переваг ця технологія все частіше використовується для виготовлення термоелектричних нанокompозитів [72].

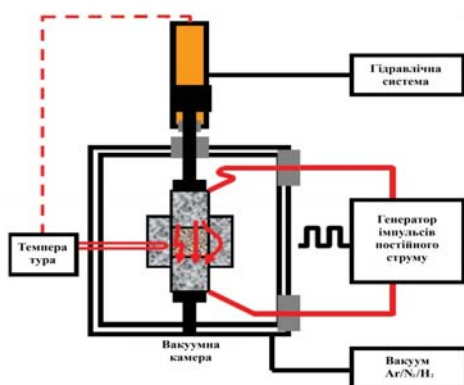


Рис.19. Принцип роботи іскроплазмового спікання [85]

### III. Термоелектричні властивості нанокомпозитних матеріалів

#### 3.1. Нанокомпозити на основі $\text{Bi}_2\text{Te}_3$

$\text{Bi}_2\text{Te}_3$  і сплави на основі  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  є одним з найбільш широко використовуваних термоелектричних матеріалів (TE) для температур від 200 К до 400 К [86]. Основне застосування цих матеріалів – охолодження та контроль температури лабораторних пристроїв. Ще однією можливістю їх застосування є використання їх як перетворювачів відходів тепла від автомобільних радіаторів (~400 К) або, навіть, від електронних мікросхем.

У даний час більшість термоелектричних пристроїв, наявних у продажі, виготовлені зі сплавів  $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{-Sb}_2\text{Te}_3$ . Це пов'язано з найвищим серед інших сполук  $ZT$  (~1) для всього діапазону кімнатних температур. Однак діапазон температур, при якому ці пристрої можуть ефективно працювати, порівняно невеликий у зв'язку з швидким погіршенням термоелектричних властивостей зі зміною температури. Авторами [16] методом гарячого пресування  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  і  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  нанопорошку, отриманого у кульковому млині із кристалічних злитків, отримано наноструктуровані зразки  $\text{Bi}_x\text{Sb}_{2-x}\text{Te}_3$ , значення  $ZT$  для яких за кімнатної температури становило близько 1,2, і 0,8 при 520 К. Як бачимо, у порівнянні з  $ZT$  для об'ємних  $\text{Bi}_x\text{Sb}_{2-x}\text{Te}_3$  матеріалів (рис.2), в нанокомпозитах значно ширший робочий діапазон температур матеріалу (рис.3), що робить його корисним як для охолодження, так і для генерування. Висока  $ZT$  є результатом низької теплопровідності через розсіювання на дрібних включеннях (рис.20). Носії заряду, ймовірно, “виберуть” шлях з низьким опором через великі зерна (рис.20,а), а фонони не “вибирають” свій шлях. Система каналів через великі зерна матиме низький електричний опір, коефіцієнт Зеєбека при цьому істотно не змінюється. Таким чином, змінюючи розмір зерна у відсотках дрібних частинок, можна оптимізувати значення  $ZT$  (рис.20,б).

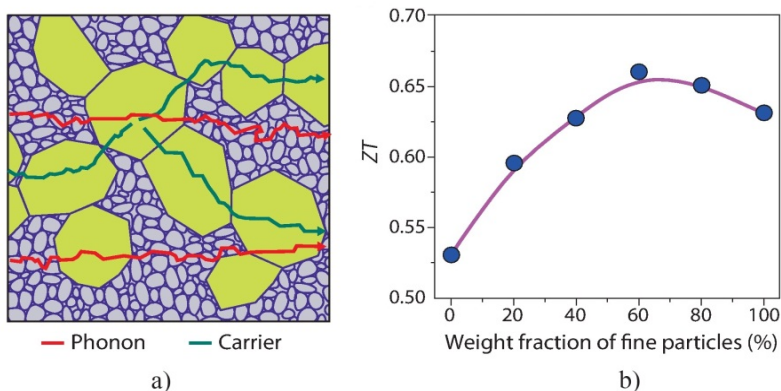


Рис.20. Ілюстрація принципу електронів і фонів у нанокомпозитах (а) та залежність  $ZT$  у  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  композиті від масової частки наночастинок за кімнатної температури (б) [87]

Альтернативні нанокompозити  $\text{Bi}_x\text{Sb}_{2-x}\text{Te}_3$  також можуть бути виготовлені, виходячи з елементарних Bi, Sb і Te [18]. Ці нанопорошки, отримані у кулькових млинах, компактуються методом гарячого пресування для отримання зразків з високим ZT. Отримання нанокompозитів безпосередньо з елементів наноструктурних сплавів сполук є більш економічно ефективним і екологічно чистим. ZT, отриманих цим методом нанокompозитів, лише на 10% нижче, ніж отриманих із сполук  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  та  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ .

Згідно даних робіт [39,11] нанокompозити  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , отримані за допомогою гідротермального методу і скомпактовані методом гарячого пресування із зоною розплавленого сплаву у співвідношенні 10:90, зменшили теплопровідність набагато сильніше, ніж електричну провідність, що призвело до підвищення термоелектричної добротності ZT до значення 0,83. Подальше покращення добротності нанокompозитів можливе за відповідного легування нанопорошків та оптимізації складу сплавів.

Існують і деякі нові стратегії, які проводяться на межі зерна, щоб оптимізувати термоелектричні властивості [88,89]. Так, зокрема (30-38)% покращити коефіцієнт потужності р-типу  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  можна за рахунок використання солей лужних металів для гідротермального нанопокриття [88]. У роботі [89] проведено модифікацію меж зерен у  $\text{Bi}_{0,4}\text{Sb}_{1,6}\text{Te}_3$  додаванням олеїнової кислоти у матеріал, до процесу подрібнення. Середній розмір зерен  $\text{Bi}_{0,4}\text{Sb}_{1,6}\text{Te}_3$  успішно зменшено від (2-3) мкм до (200-500) нм що, призвело до зниження ґраткової теплопровідності. Ці інженерні рішення щодо формування межі зерен прокладають нові шляхи для підвищення значення ZT.

### **3.2. Нанокompозити на основі PbTe**

Телурид свинцю PbTe є одним із кращих термоелектричних матеріалів для середніх температур (450-800) К. Максимум ZT PbTe становить 0,7 при 700 К. Останнім часом ZT була подвоєна при 773 К у легуваних талієм PbTe через підвищення коефіцієнту Зеєбека [90]. Використанням нанокompозитів PbTe також можна досягнути високих ZT. Так, наночастинки PbTe отримують у кульковому млині з талію, свинцю і телуру [9]. Мікроструктура кулькового подрібнених наночастинок представлена на рис.21,а. Під час гарячого пресування, наночастинки швидко ростуть, і розмір зерна гарячоспресованого PbTe більший за 1 мкм (рис.21,б). У порівнянні з властивостями злитків, теплопровідність гарячоспресованих зразків незначно зменшується у всьому діапазоні температур (рис.21,с), а електропровідність зростає (рис.21,е). Коефіцієнт Зеєбека трохи зменшується за більш високих температур (рис.21,d), а ZT зростає (рис.21,f). Нанокompозити PbTe з 95% теоретичної густини отримують також при спіканні наночастинок (100-150) нм іскроплазмовим методом [14-15].

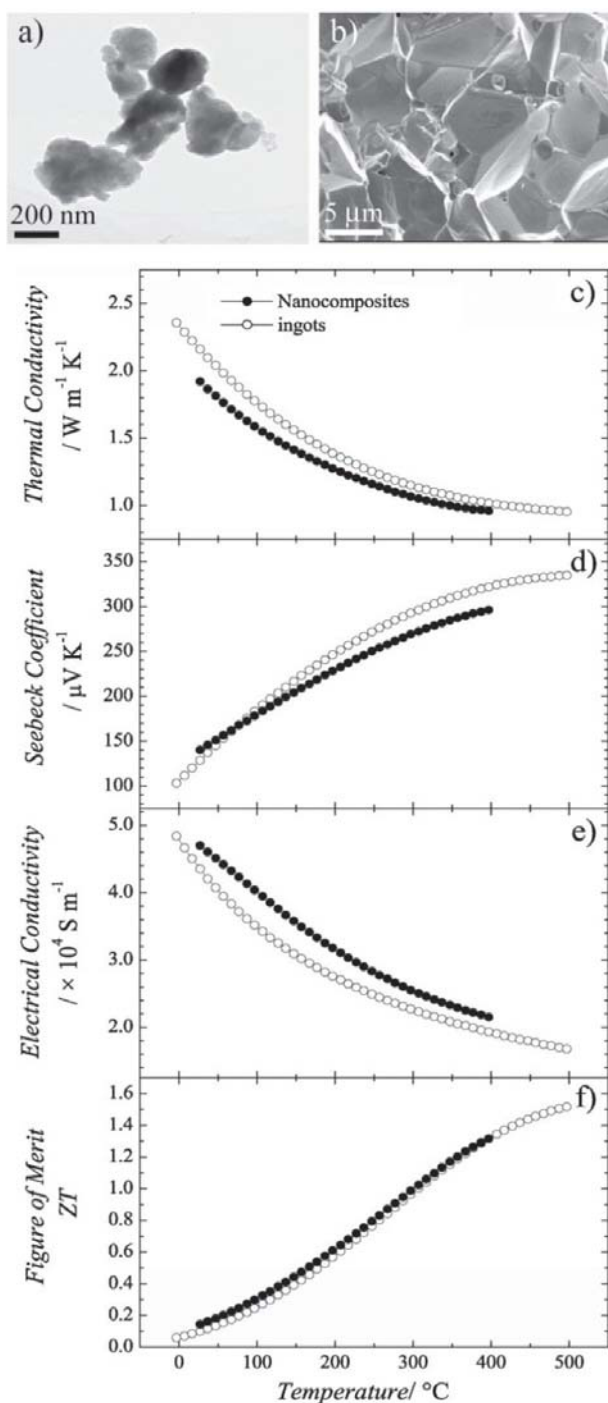


Рис.21. ПЕМ-зображення кульковоподрібнених PbTe нанопорошків (a) і SEM-зображення (за допомогою скануючого електронного мікроскопа) гарячого спресованих PbTe нанокompозитів (b) та залежність від температури теплопровідності (c), коефіцієнта Зеебека (d), електропровідності (e), і ZT(f) гарячоспесованих нанокompозитів PbTe. Для порівняння нанесені дані для об'ємного PbTe [90]

Наноккомпозити PbTe підготовлені спіканням порошків в об'ємні зразки показали невелике збільшення коефіцієнта Зеєбека при значному параметрі розсіювання за рахунок фільтрації енергії електронів [91]. В окремому дослідженні об'ємні зразки PbTe були підготовлені так наночастинки Pb або надлишок Ag осаджували в PbTe матриці та відпалювали [92]. Ці зразки показали чудове підвищення (до 100%) коефіцієнт Зеєбека, і одночасне збільшення параметра розсіювання (який вийшов <1 для сипучих і до 3-4 в зразків з нановключеннями). Хоча походження цього збільшення параметра розсіювання не ясно, ефект, ймовірно, є фільтрацією енергії електронів, що призводить до високого коефіцієнта Зеєбека. З іншого боку, рухливість електронів була занадто низькою і збільшення коефіцієнта потужності ZT не було отримано. Зовсім недавно у роботі [93] підготовлено PbTe з нановключеннями як Pb і Sb одночасно, що призвело до великого підвищення коефіцієнта потужності по відношенню до об'ємного PbTe. Примітно, що і досить нез'ясовно, коли концентрація Sb склала 3% і Pb була 2% в наноккомпозиті, рухливість електронів фактично збільшувалася з температурою (від 300 К і 450 К).

Наноккомпозити PbTe підготовлені спіканням порошків в об'ємні зразки показали невелике збільшення коефіцієнта Зеєбека при значному параметрі розсіювання за рахунок фільтрації енергії електронів [91]. В окремому дослідженні об'ємні зразки PbTe були підготовлені так наночастинки Pb або надлишок Ag осаджували в PbTe матриці та відпалювали [92]. Ці зразки показали чудове підвищення (до 100%) коефіцієнт Зеєбека, і одночасне збільшення параметра розсіювання (який вийшов <1 для сипучих і до 3-4 в зразків з нановключеннями). Хоча походження цього збільшення параметра розсіювання не ясно, ефект, ймовірно, є фільтрацією енергії електронів, що призводить до високого коефіцієнта Зеєбека. З іншого боку, рухливість електронів була занадто низькою і збільшення коефіцієнта потужності ZT не було отримано. Зовсім недавно у роботі [93] підготовлено PbTe з нановключеннями як Pb і Sb одночасно, що призвело до великого підвищення коефіцієнта потужності по відношенню до об'ємного PbTe. Примітно, що і досить нез'ясовно, коли концентрація Sb склала 3% і Pb була 2% в наноккомпозиті, рухливість електронів фактично збільшувалася з температурою (від 300 К і 450 К).

### 3.3. $AgSbTe_2-(PbTe)_m$ сполуки (LAST-m)

Одні з найвищих значень добротності в середньому діапазоні температур були отримані в  $AgSbTe_2-(PbTe)_m$  (LAST-m) сім'ї термоелектричних матеріалів [94]. Ці матеріали мають структуру NaCl: телур займає позиції Cl, а срібло, свинець і сурма займає позиції Na. Таким чином, аніони несуть чистий заряд -2, в той час як кожен з катіонів несе в собі заряд +2. (Одна пара  $Ag^+$  і  $Sb^{3+}$  є ізо-електронною заміною двох  $Pb^{2+}$  йонів у ґратці).

Високе значення  $ZT \sim 2$  було отримано в LAST матеріалах за високих температур. Таке покращення добротності є результатом дуже ни-



зької граткової теплопровідності, без великих втрат коефіцієнта Зеебека і електропровідності. Спонтанно створені нанорозмірні неоднорідності виступають в якості впроваджених наночастинок, які розсіюють фонони, тим самим знижуючи теплову провідність ґратки. Низька граткова теплопровідність викликана збільшенням розсіювання фононів за рахунок розподілу трьох типів атомів з різними масами у ґратці сполуки  $\text{AgPb}_m\text{SbTe}_{m+2}$ . Питома теплопровідність склала нижче 0,5 Вт/м·К при 700 К і 1,3 Вт/м·К при кімнатній температурі. Всі сполуки LAST із родини напівпровідників з вузькою забороненою зоною  $\sim 0,25$  еВ. Електропровідність сполук зростає із збільшенням  $m$  (тобто вмісту PbTe) і досягає максимуму при  $m=18$ . LAST матеріали продемонстрували  $n$ -тип і електрони є переважаючими носіями заряду, отже, коефіцієнт Зеебека є негативним. Однак матеріали  $p$ -типу можуть бути отримані шляхом використання Na замість Ag, або за допомогою Sn на додаток до Ag, Pb, Sb і Te [95,96,97].

Неемпіричні розрахунки електронної структури свідчать, що високий коефіцієнт потужності цих сполук можна пояснити появою резонансних станів у нижній частині зони провідності і у верхній частині валентної зони [98]. Ag атоми створюють нові електронні стани у верхній частині валентної зони PbTe, а ізолювані Sb атоми впровадження резонансні електронні стани поблизу дна зони провідності PbTe. Ag-Sb пара призводить до збільшення густини станів безпосередньо навколо забороненої зони в порівнянні з чистим PbTe. У результаті цього коефіцієнт Зеебека та коефіцієнт потужності збільшується. Також виявили, що збільшення коефіцієнта потужності є незначним у порівнянні з типовими значеннями для чистого телуриду свинцю. Таким чином високе значення термоелектричної добротності  $ZT$  LAST значною мірою зумовлені наноструктурним тепловим зменшенням провідності [99].

LAST матеріали зажди синтезувалися шляхом змішування складових елементів, їх сплавленням, а потім повільного охолодження до кімнатної температури, що призводить до формування нанорозмірних фаз поділу. Більш пізні роботи показали, що можна отримати аналогічні кристалографічні структури за допомогою механічного легування і відпалу або отримання наночастинок шляхом гідротермального синтезу, а потім через ущільнення без тиску спіканням, гарячим пресуванням та іскро-плазмовим спіканням [72,100].

Виконано обширні мікроструктурні дослідження системи PbTe-Sb<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> встановили, що швидке затвердіння і евтектичні композиції дають різні мікроструктури – від дендритних до пластинчастих [101]. Починаючи з метастабільної композиції Pb<sub>2</sub>Sb<sub>6</sub>Te<sub>11</sub>, близької до евтектичної, вони змогли отримати нанометрові пластинчасті структури, які нагадують тонкі надґратки [102,103].

Подібний метод використовують для отримання фазоворозділених PbTe-PbS сплавів [104]. У цих матеріалах були виявлені нанорозмірні



включення PbS, які забезпечують низькі граткові провідності за кімнатної температури  $\sim 0,4$  Вт/м·К. При цьому рухливості носіїв залишаються досить високими (близько  $100$  см<sup>2</sup>/В·с), ZT складає 1,5 при 642 К для зразка з  $x=0,08$  PbS.

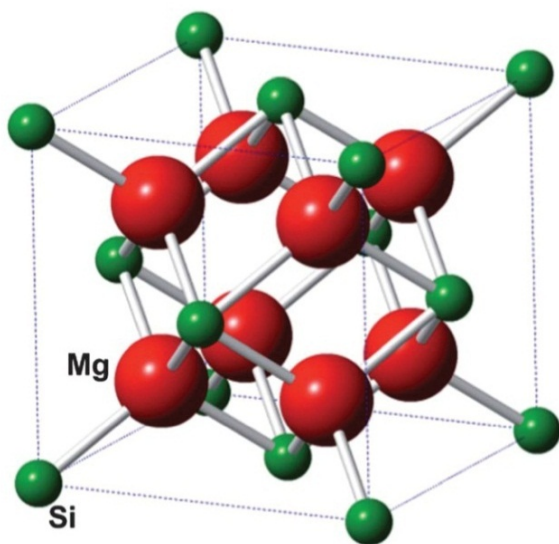


Рис.22. Вигляд кубічної структури  $Mg_2Si$  (просторова група  $Fm\bar{3}m$ ) [145]

### 3.4. Наноккомпозити на основі $Mg_2Si$

Ідеальний термоелектричний матеріал повинен мати не тільки високі значення ZT, але й також елементи, що є нетоксичними. Саме такими є матеріали на основі  $Mg_2(Si, Sn)$  (рис.22), що привертають увагу останнім часом [105]. Насправді, досить високе значення  $ZT \sim 1,1$  було отримано при 800 К у твердих розчинах на основі  $MgSi_{0,4}Sn_{0,6}$  і  $Mg_2Si_{0,4-x}Sn_{0,6}Sb_x$  [106,107]. Граткові теплопровідності цих зразків близькі (1,5-2,1) Вт/м·К за температури 300 К, в порівнянні з 7,9 Вт/м·К у  $Mg_2Si$  і 5,9 Вт/м·К у  $Mg_2Sn$ . Цікаво, що зразки показали утворення наноточок при фазовому розділенні, подібно до того, що спостерігається у сполуках LAST-m. Ці природні утворення нанорозмірних композиційних структур є відповідальними за низьке значення теплопровідності цих зразків.

### 3.5. Скутерудити на основі $CoSb_3$

Подвійні скутерудити володіють структурою типу  $CoAs_3$  із загальною хімічною формулою  $MX_3$ , де М – перехідний метал, такий як кобальт, родій або іридій, а Х – фосфор, миш'як або сурма (рис.23,а) [108,109]. Серед сім'ї скутерудитів  $CoSb_3$  викликає найбільший інтерес через високу рухливість  $(m^*)^{3/2} \mu$  в порівнянні з іншими сполуками. Тут  $m^*$  і  $\mu$  відповідно ефективна маса і рухливість.  $CoSb_3$  може мати дуже високий коефіцієнт потужності, але його висока теплопровідність (10 Вт/м·К) не дозволяє йому конкурувати з традиційними  $Bi_2Te_3$  (1,0-1,5

Вт/м·К). Тим не менш, ці сполуки мають специфічну граткову структуру з великим “клітками”, розташованими у центрі елементарної комірки, які могли б бути заповнені невеликими атомами металу (рис.23,а). Оскільки “клітка” набагато більша (1,89 Å), за самі елементарні йони наповнювача і, що швидше за все, коливаються в положенні рівноваги і, отже, не можуть породжувати істотне розсіювання фононів [110]. У 1996р. Салес (Sales) із співавторами [111] повідомили про існування  $\text{Ce}_{0,9}\text{Fe}_3\text{CoSb}_{12}$  і  $\text{La}_{0,9}\text{Fe}_3\text{CoSb}_{12}$  з дивно низьким  $\chi_{\text{lat}}$  (1,4 Вт/м·К) і, отже, високим ZT (понад 1,0). Останнім часом широкомасштабні дослідження були проведені на  $\text{CoSb}_3$  як базовому термоелектричному матеріалі, з точки зору легування і процесу синтезу. Зокрема було виявлено, що барій є дуже добрим наповнюючим елементом. Так, частка його заповнення 44%, що вище ніж у лантану [112]. Барій як наповнювач не лише зменшив  $\chi$ , але й підняв  $\sigma$ , що призвело до високого значення ZT у сполуці  $\text{Ba}_y\text{Co}_4\text{Sb}_{12}$ . У роботі [113] проведено систематичне вивчення систем  $\text{R}_y\text{M}_x\text{Co}_{4-x}\text{Sb}_{12}$  (R=Ce,Ba,Y, M=Fe,Ni) n-типу. Встановлено що  $\text{Ce}_{0,28}\text{Fe}_{1,5}\text{Co}_{2,5}\text{Sb}_{12}$  p-типу має значення ZT, більші 1,1 при 750 К, а  $\text{Ba}_{0,30}\text{Ni}_{0,05}\text{Co}_{3,95}\text{Sb}_{12}$  n-типу – ZT складає 1,25 при 900 К. З практичної точки зору, термоелектричний матеріал n-і p-типів, повинні мати аналогічні механічні та теплові властивості для того, щоб звести до мінімуму ймовірність відмови пристроїв через теплове перевантаження. З цього погляду  $\text{CoSb}_3$  – добрий матеріал для середніх температур, тому що обидві вітки n-і p-типу з високою ефективністю можна отримати в тій же матриці.

Важливими слід вважати теоретичні і експериментальні роботи, пов’язані з вивченням заповнення порожнин скутерудитів [115]. Виявлено, що межі наповнення пов’язані із різницею електронегативності між електронегативністю сурми і наповнюючим елементом (R). Теоретичні розрахунки показали, що лужні елементи могли б заповнити ці позиції з високою мірою заповнення. Ця ідея була успішно реалізована при заповненні калієм  $\text{CoSb}_3$  [116]. Досягнуто значення ZT=1,0 при 800 К у сполуці  $\text{K}_{0,38}\text{Co}_4\text{Sb}_{12}$ . Останнім часом здійснено прорив у виробництві нанокompatитів скутерудитів зі застосуванням методу охолодження розплаву для впровадження індію та церію спільно у структуру  $\text{CoSb}_3$  (рис.23,б) [117]. Для таких структур ZT=1,43 при 800 К. Значення  $\chi_{\text{lat}}$  для наповнених скутерудитів є набагато нижчим, ніж у незаповнених скутеродитах, але все ж значно вищим, ніж у сполуках  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ . Недавнє дослідження показує, що зменшення розміру зерна може бути плідним також і для матеріалів  $\text{CoSb}_3$ . Гідротермальний синтез є універсальним методом для виготовлення різних наночастинок (рис.23,с) [59]. Підготовлені гідротермальним синтезом нанопорошки масивного  $\text{CoSb}_3$  після іскро-плазмового спікання або гарячого пресування показали значення  $\chi=1,61$  Вт/м·К і в шість разів підвищене значення ZT.

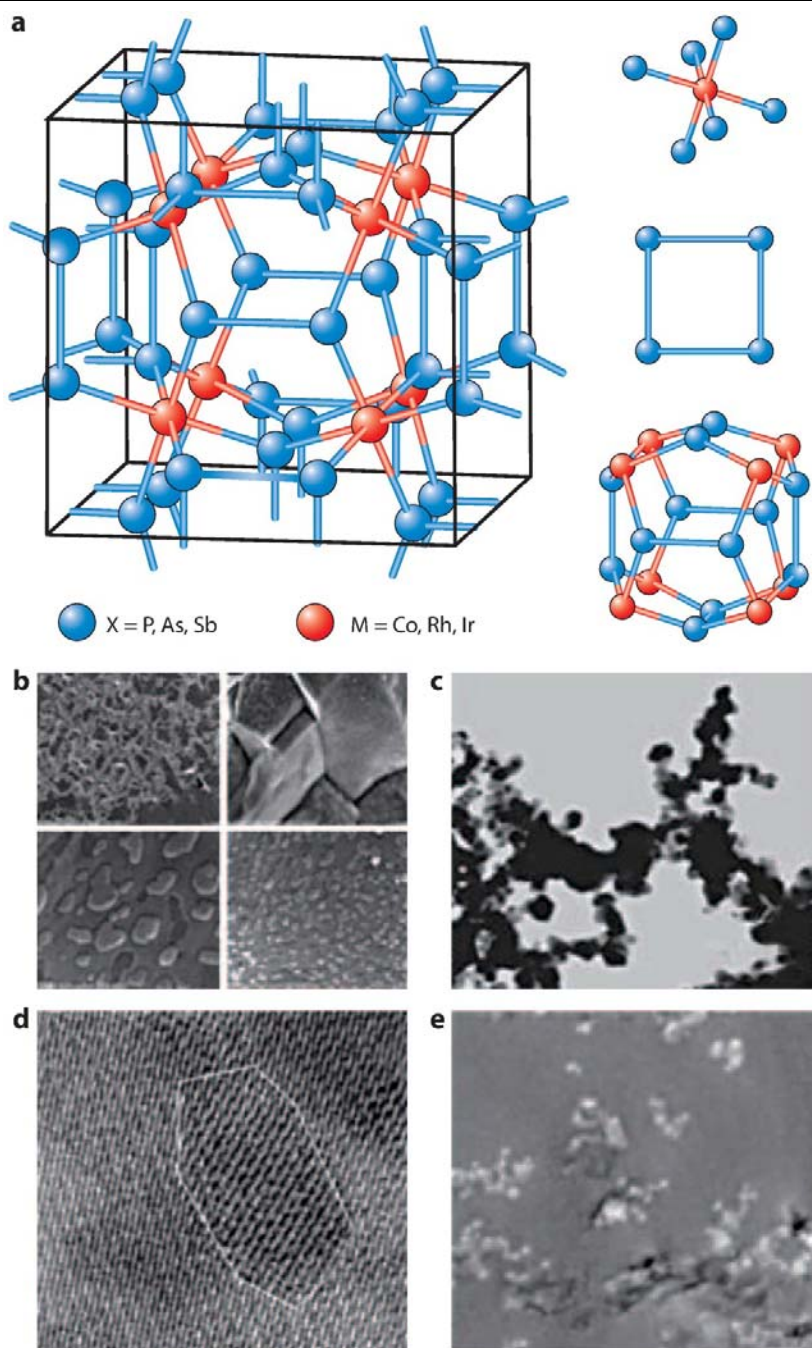


Рис.23. Структура скутерудитів та деталі мікроструктури: включаючи  $[\text{CoSb}_6]$  октаедр,  $[\text{Sb}_4]$  кільце і  $[\text{Co}_8\text{Sb}_{12}]$  додекаедр (a); InSb наночастинки, розсіяні на межах зерен (b) нанозернистої  $\text{CoSb}_3$  структури, виготовленої гідротермальним синтезом (c); наноточки, утворені внаслідок сегрегації олова і телуру в підґратці сурми  $\text{CoSb}_3$  (d); GaSb – нановключення дисперговані в  $\text{Yb}_{0.26}\text{Co}_4\text{Sb}_{12}$  матриці (e) [114]

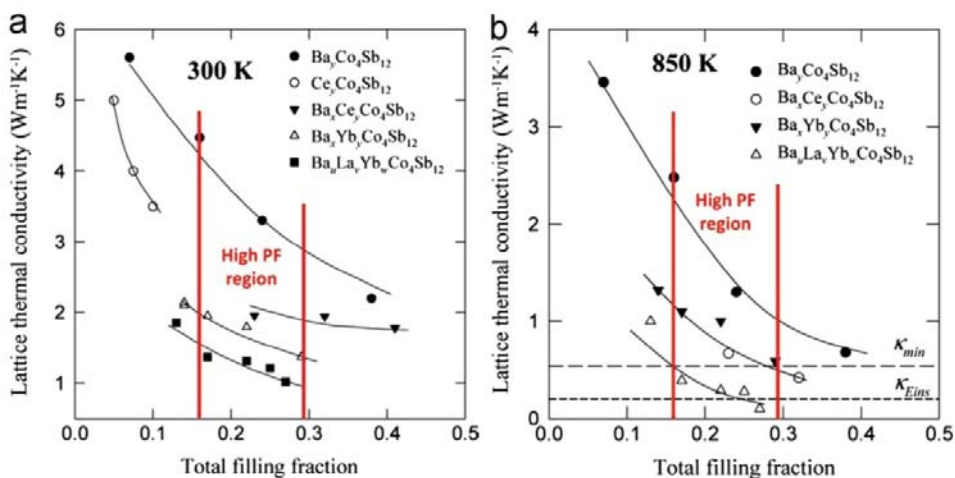


Рис.24. Граткові теплопровідності для одно-, дво- та потрійно заповнених скуттерудитів як функції від загального числа заповнення фракції за кімнатної температури (300 К) (а) і високої температури (850 К) (б). Суцільні лінії визначають області високого коефіцієнта потужності (між вертикальними лініями) [122]

Теоретичне пояснення такої поведінки пояснено взаємодією граткових і локалізованих фононів [118]. Відповідно до запропонованого механізму локальні фонони можуть спочатку поглинути у невеликій кількості енергії від граткових фононів, щоб потрапити в збуджений стан, а потім відати енергію назад гратковим фононам з некогерентними хвильовими векторами. Такий механізм розсіювання фононів названий резонансним розсіюванням фононів [119]. Як правило, для розрахунку резонансної частоти  $\omega_0$  мод використовують просту модель кульки, підвішеної на пружині. Коливання пов'язані з масою кульки  $m$  і жорсткістю пружини  $k$  співвідношенням  $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ . Шляхом проведення неемпіричних розрахунків, характеристик жорсткості пружини  $k$  до  $R$  наповнювача в заповненому скуттерудиті може бути отримана шляхом застосування співвідношення  $E = 1/2kx^2$ , де  $E$  є зміною повної енергії і  $x$  зсув центра комірки в якості точки відліку. Згідно з розрахунками, наповнювачі з ізовалентними характеристиками демонструють схожі  $\omega_0$ , в той час як наповнення атомів з різних груп періодичної таблиці показують значну різницю у значенні  $\omega_0$ . Це впливає на те, що для мультизаповнених скуттерудитів граткова теплопровідність може бути нижчою, ніж у однозаповненого скуттерудита (рис.24) [120,121]. Значне зниження теплопровідності гратки спостерігалось в скуттерудитах, коли вони переходять з одно- до подвійного і потрійного заповнення матеріалом (рис.24). Граткова теплопровідність потрійно заповнених Ba<sub>u</sub>La<sub>u</sub>Yb<sub>w</sub>Co<sub>4</sub>Sb<sub>12</sub> становить (1-2) Вт/м·К при 300 К 0,2 Вт/м·К при 850 К. Мінімальна теплопровідність оцінюється в 0,45 Вт/м·К за допомогою рівняння  $k_{min} = 1/3C_v v l_{min}$ , де  $C_v$  – теплоємність на одиницю об'єму,  $v$  –

швидкість звуку, і  $l_{\min}$  – мінімальна довжина вільного пробігу фонона, що дорівнює найближчій міжатомній відстані.

### 3.6. Si-Ge наноконізити

Сплави кремнію і германію, які являють собою твердий розчин  $\text{Si}_x\text{Ge}_{1-x}$ , посідають важливе місце серед дуже малої кількості термоелектричних матеріалів, які працюють за температур вищих 1000 К. Елементарні кремній і германій кристалізуються в алмазоподібних структурах. У результаті жорсткої і симетричної кристалічної структури, вони володіють занадто високою теплопровідністю, щоб стати хорошим термоелектричним матеріалом (150 і 63 Вт/м·К, відповідно, при кімнатній температурі). Тим не менш, їх теплопровідність може бути зведена до (5-10) Вт/м·К при утворенні твердого розчину з легуючими домішками [123].

Хімічна стабільність  $\text{Si}_x\text{Ge}_{1-x}$  твердих розчинів при високих температурах, зокрема, проти окислення, і висока добротність ( $\sim 1$ ) створюють передумови для використання термоелектричних матеріалів на їх основі при високих температурах (1000-1200) К.

Починаючи з 1960-х років, були зроблені зусилля для поліпшення ZT сплавів SiGe: ZT при (1173-1253) К для n-типу SiGe досягає 1 і ZT $\sim 0,65$  для сплавів p-SiGe [80,123-125]. ZT близько 1,3 при 1173 К був також досягнутий в n-типі наноконізитів SiGe при використанні методів кульових млинів і гарячого пресування [19]. Зауважимо, що у сильно легованих сплавах SiGe середня довжина вільного пробігу електронів і фононів різні. Середня довжина вільного пробігу електронів  $\sim 5$  нм, а фонони мають середню довжину вільного пробігу (200-300) нм при кімнатній температурі. Таким чином, наноконізити можуть значно зменшити фононну теплопровідність (2,5 Вт/м·К в p-типу SiGe проти 4,6 Вт/м·К для масивних) без значного зниження електричної провідності, що призводить до збільшення ZT [95,96]. У деяких ранніх експериментах показники ZT зменшується, коли розмір зерна знижується нижче мікрометрів через зменшення електропровідності [125]. Причина такої поведінки електропровідності не було чітко вказано, але припускають, що це відбувається через значне створення дефектів у процесі подрібнення в кульових млинах і деяких забруднень.

Представляють певний практичний інтерес наноконізити p-SiGe з високим ZT, підготовлені з окремих елементів безпосередньо через механічне сплавлення подрібнених кульовими млинами наночасток. Леговані бором,  $\text{Si}_{80}\text{Ge}_{20}$  наночастки є однофазними сплавами (рис.25,a). Механічно леговані наночастинки SiGe відрізняються від куліподрібнених з декількох суб-нанозерен (рис.25). Рентгенівської дифракції (РД) і ТЕМ-зображення показують, що розміри агломерованих частинок варіюються від 20 нм до 200 нм [126,127].

Після гарячого пресування, розмір зерен в p-типу наноконізитів  $\text{Si}_{80}\text{Ge}_{20}$  складає близько (20-100) нм (рис.25,d), що вказує на зростання



розміру зерна протягом процесу гарячого пресування близько у два-п'ять разів.

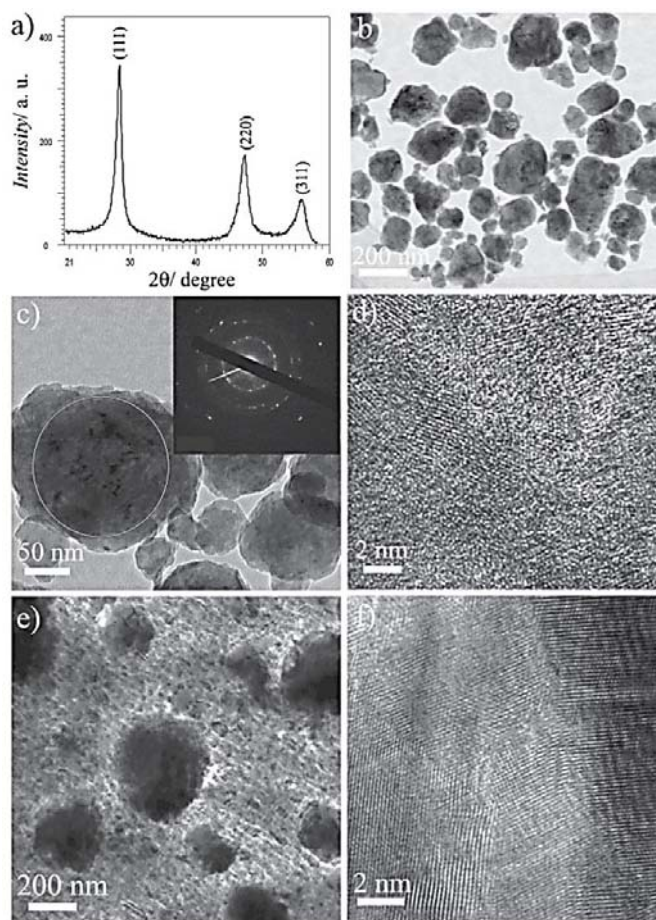


Рис.25. Дифракційна картина (а); Зображення просвічуючої електронної мікроскопії (ПЕМ) при низькому збільшенні (b); ПЕМ зображення при середньому збільшенні(с); ПЕМ зображення р-типу,  $\text{Si}_{80}\text{Ge}_{20}$  легованого бором наночастинки підготовлений кульовим млином (d); ПЕМ зображення (e) та ПЕМ зображення гарячого пресування р-типу, легованих бором  $\text{Si}_{80}\text{Ge}_{20}$  нанокompозитів (f). На вставці (с) – індивідуальне нанозерно полікристалічного характеру [17]

Температурні залежності термоелектричних параметрів нанокompозитів р-типу  $\text{Si}_{80}\text{Ge}_{20}$  у порівнянні з масивними представлені на рис.26. Зауважимо що, теплопровідність наноструктурованих зразків значно нижча, ніж в об'ємних зразків у всьому діапазоні температур до 1273 К, який призводить до максимуму  $ZT$  близько 0,95 (рис.25) [124]. Значне зниження теплопровідності у наноструктурованих зразках в основному за рахунок збільшення розсіювання фононів на численних межах нанокompозитів.

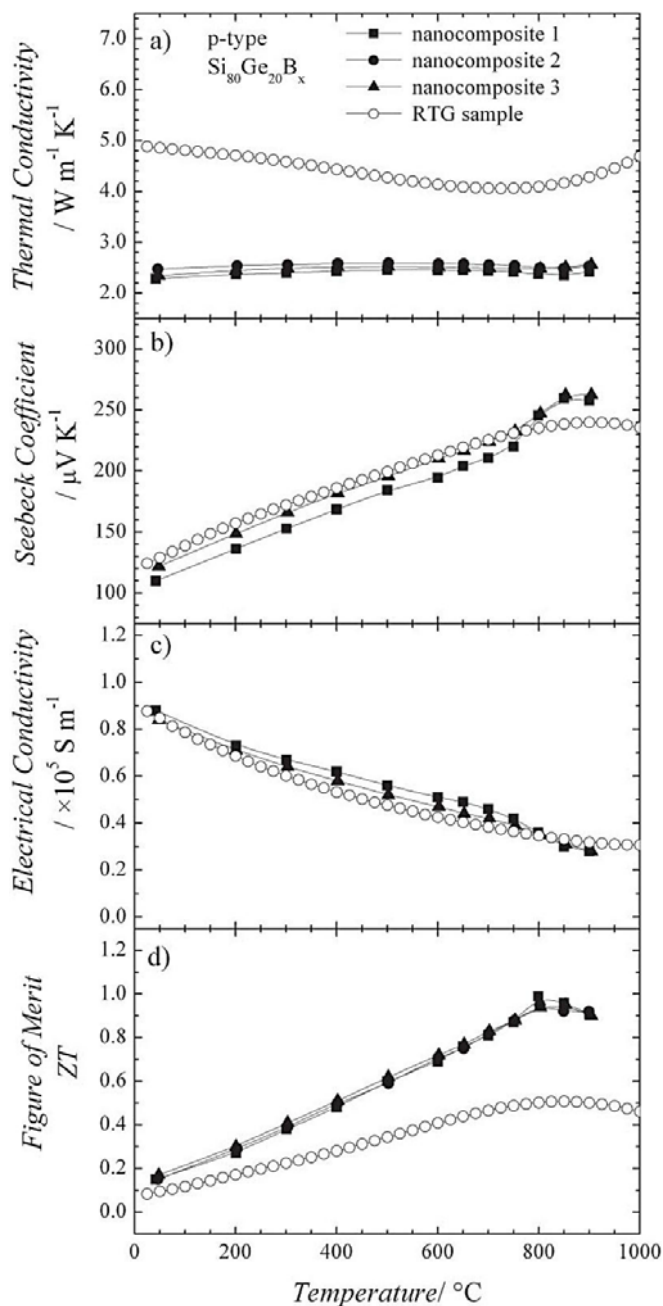


Рис.26. Температурна залежність теплопровідності (а), коефіцієнта Зеебека (б), електропровідності (с), і ZT (д) для трьох гарячоспресованих нанокмпозитів р-типу  $\text{Si}_{80}\text{Ge}_{20}$  (квадрати, кола й трикутники), і об'ємних зразків р-типу SiGe [17]

### 3.7. Халькогеніди лантану

Сильно леговані телурид лантану й інших рідкісноземельні халькогеніди ретельно вивчалися в якості потенційних термоелектричних

матеріалів у зв'язку з їх відмінною термічною стабільністю і високим значенням ZT [122]. Вони отримувалися твердотільною дифузією, або синтезом з розплаву або ж комбінацією цих обох методів. Високі температури і тиску при цих процесах синтезу призводить до неоднорідностей і відсутності стехіометричної відтворюваності. Нещодавно сплави  $\text{La}_{3-x}\text{Te}_4$  зазначеного складу отримали у роботі [35] за допомогою механічного легування і гарячого пресування. Завдяки використанню більш низьких температур та зберігаючи при цьому високі швидкості дифузії з використанням механічно легуваних елементів (La і Te), отримано чисті і однорідні сплави  $\text{La}_{3-x}\text{Te}_4$ . Наноструктури із середнім розміром кристалітів близько (20-30) нм після гарячого пресування, характеризуються ZT яке перевищує 1,1 при 1273 К, що можна порівняти з кращими ZT, досягнутими в n-SiGe сплавах.

### 3.8. Половинні сполуки Гейслера

У порівнянні з PbTe або LAST системами, сполуки Гейслера більш екологічно безпечні і, отже, до них зростає рівень інтересу [128-132]. Половинні сполуки Гейслера кристалізуються в тип структури MgAgAs з просторовою групою F43m, яка може розглядатися як два взаємопроникні гранецентровані куби (рис.27) [133].

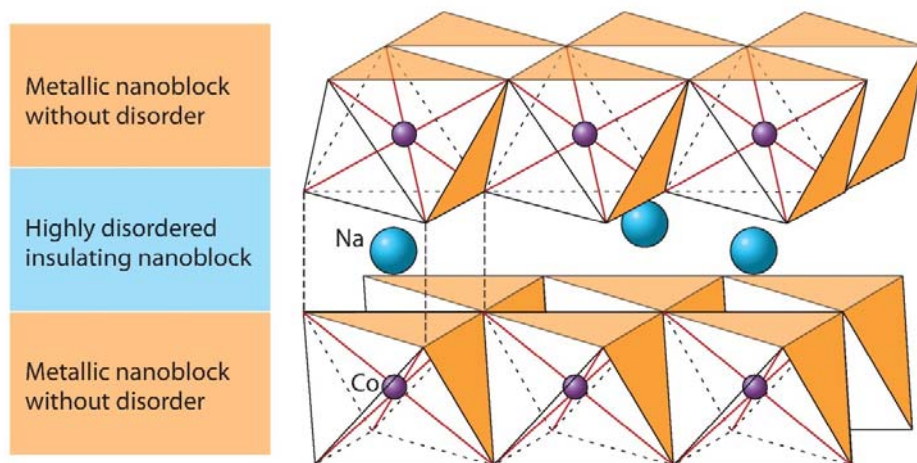


Рис.27. Кристалічна структура  $\text{Na}_x\text{CoO}_2$  [26]

Оскільки, половинні сполуки Гейслера мають вузьку заборонену зону з різкою зміною рівня Фермі, то дуже високий коефіцієнт потужності не очікується. Значення ZT половинних сполук Гейслера значно нижчий, ніж в сучасних термоелектричних матеріалах. Однак, оскільки є три позиції атомів у підгратках половинних сполук Гейслера, ізоелектронне легування на різних позиціях підграток є найбільш поширеним підходом до зниження теплопровідності. Встановлено, що ізоелектронне легування  $\text{Zr}_{0.5}\text{Hf}_{0.5}\text{NiSn}$  призводить до більш високих ZT, ніж  $\text{ZrNiSn}$  або  $\text{HfNiSn}$  тільки за рахунок зниження теплопровідності [128]. У роботі [129] досліджено вплив часткового заміщення нікелю з паладієм на



властивості ZrNiSn. Показано, що ця заміна призводить до істотного зниження теплопровідності, що, у свою чергу, покращує ZT до 0,7 при 800 К для композиції  $Zr_{0.5}Hf_{0.5}Ni_{0.8}Pd_{0.2}Sn_{0.99}Sb_{0.01}$ . Дані інших авторів включають можливі значення ZT 0,8 при 800К в  $Hf_{0.75}Zr_{0.25}Ni_{0.9}Pd_{0.1}Sn_{0.975}Sb_{0.0025}$  [130].

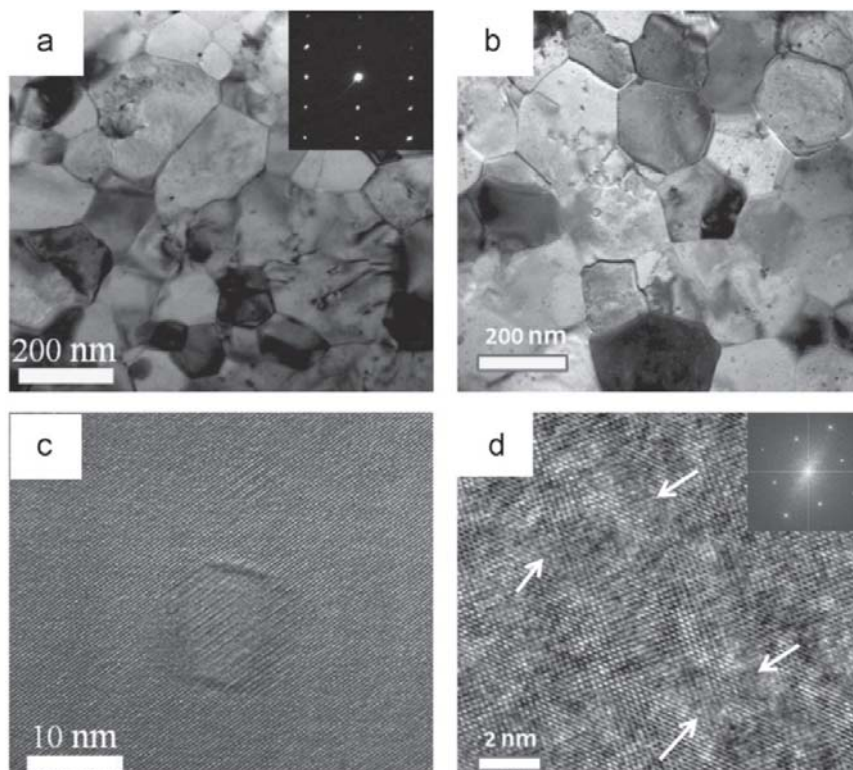


Рис.28. Типові ПЕМ – зображення наноконкомпозитів половинних сполук Гейслера подрібнених і спресованих методом гарячого пресування: (а) – при малому збільшенні зображення TEM наноструктурованих  $Hf_{0.5}Zr_{0.5}CoSb_{0.5}Sn_{0.2}$ ; (б) – при малому збільшенні TEM зображення наноструктурованих  $Hf_{0.75}Zr_{0.25}NiSn_{0.99}Sb_{0.01}$ ; (с) нановключення вбудованого в матрицю  $Hf_{0.5}Zr_{0.5}CoSb_{0.5}Sn_{0.2}$ ; (д) спотворення ґратки в наноструктурованих  $Hf_{0.75}Zr_{0.25}NiSn_{0.99}Sb_{0.01}$ . На вставках (а) і (д) показано зерна, які мають хорошу кристалічну структуру [139]

Оскільки важко безпосередньо синтезувати  $Hf_{1-x}Zr_xCoSb$  і  $Hf_{1-x}Zr_xNiSn$ , то для синтезу злитка використовувалося лише механічне легування і дугова плавка. Після механічного подрібнення було використано швидке гаряче пресування. На рис.28 показано типові ПЕМ образи  $Hf_{1-x}Zr_xCoSb$  і  $Hf_{1-x}Zr_xNiSn$  наноконкомпозитів. Обидва  $Hf_{1-x}Zr_xCoSb$  і  $Hf_{1-x}Zr_xNiSn$  наноконкомпозити показують середній розмір зерна близько (100-300) нм, (рис.28,а і 28,б). Крім розміру зерна існують інші помітні особливості, які містяться в обох  $Hf_{1-x}Zr_xCoSb$  і  $Hf_{1-x}Zr_xNiSn$  наноконкомпозитах – це розподілені в широкому діапазоні розмірів нановключення від 5 до

30 нм. На рис.3,с показані типові нановключення з розміром 10 нм в р-типу  $\text{Hf}_{1-x}\text{Zr}_x\text{CoSb}$ . Такі нановключення, вбудовані в матрицю, призводять до значного розсіювання довгохвильових фононів, в той час як існує тільки незначний вплив на транспортування носіїв у системі  $\text{AgPb}_m\text{SbTe}_{m+2}$  [94]. Подібний ефект очікується і в  $\text{Hf}_{1-x}\text{Zr}_x\text{CoSb}$  і  $\text{Hf}_{1-x}\text{Zr}_x\text{NiSn}$  нанокмпозитах. Крім того, спотворення ґратки спостерігається в n-типу  $\text{Hf}_{1-x}\text{Zr}_x\text{NiSn}$ , (рис.28,d), впливає подібно до фононного механізму розсіювання.

Оскільки більша частина досліджень половинних сполук Гейслера орієнтована на ізоелектронне легування, то розумно очікувати, що існують значні можливості для подальшого вдосконалення ZT за рахунок використання різних наноструктур. Систематичні теоретичні розрахунки 36 видів половинних сполук Гейслера вказує на те, що існує потенційні нові половинні сполуки Гейслера як n-типу  $\text{MNiSn}$  ( $\text{LaPdBi}$ ,  $\text{NdCoSn}$ ,  $\text{ZrCoBi}$  і т.д.), так і p-типу  $\text{MCoSb}$  ( $\text{NdCoSn}$ ,  $\text{TiCoSb}$ ,  $\text{NdRhSb}$  і т.д.) [133].

#### IV. Нові стратегії формування нанокмпозитів

В останні роки досягнуто значних успіхів у області синтезу матеріалів, характеристики мікроструктури, вимірювання фізичних властивостей і теоретичного розуміння термоелектричних процесів. Найбільш плідні результати стосуються концепції нанокмпозитів, які характеризуються як матеріали з нанозерен, дефектів у зернах, нановключень і часток, розсіяних випадково. Безперервні зусилля дослідників із дослідження  $\chi_{\text{lat}}$  для декількох систем дуже приблизили його значення до теоретичної межі шляхом об'єднання кількох центрів розсіювання з різними розмірами від нано- до мікромасштабу, на жаль, з погіршенням рухливості носіїв. Погіршення рухливості носіїв виникло у результаті формування різних центрів розсіювання фононів. З метою підвищення рухливості  $\mu$ , не піднімаючи  $\chi_{\text{lat}}$ , необхідна реконструкція електронного транспортного каналу. Одним із прикладів повторно орієнтованих випадкових зерен n-типу полікристалічного  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  призводить до значного збільшення  $\mu$  [134,135]. Іншим прикладом є зміна характеру легування двофазного композиту, де домішки включені тільки в одну фазу [136,137]. Згідно зонної інженерії, носії заряду можуть бути відокремлені від своїх великих зерен і перейти в нелеговані. Це призводить до підвищення рухливості носіїв в порівнянні з рівномірним легуванням у зв'язку зі скороченням йонізованого розсіювання домішки, і, нарешті, призводить до більш високого коефіцієнта потужності. Таким чином, певна впорядкованість у модуляції домішкових атомів і нановключень дозволить значно поліпшити співвідношення  $\mu/\chi_{\text{lat}}$  і, нарешті, підняти значення ZT. Такі приклади добре відомі в структурах з низько розмірними надґратками або квантовими ямам, які дозволяють досягнути разом високу  $\mu$  і низьке  $\chi_{\text{lat}}$  з  $\text{ZT}>2$  [138].

Автори [139] пропонують деякі структури нового покоління нанокомпозитів, названих упорядкованими нанокомпозитами, на відміну від звичайних неупорядкованих нанокомпозитів, які ще називають випадковими нанокомпозитами (рис.29). Ідея упорядкованих нанокомпозитів є новою концепцією з різними добре організованими наноструктурами для відновлення електронного транспортного каналу, на відміну від більшості звичайних нанокомпозитів з індивідуальними наноструктурами.

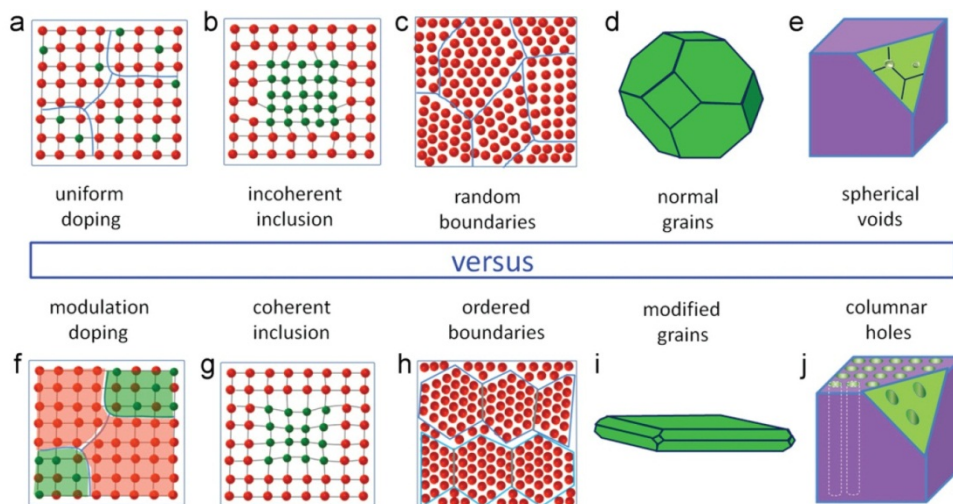


Рис.29. Порівняння різних наноструктур між випадковими нанокомпозитами (a-e) і упорядкованими нанокомпозитами (f-j) з легованими атомами, нановключеннями, межами зерен, формою зерна, упорядкованою морфологією [139]

Модуляція легування (рис.29,a) у порівнянні з рівномірним легуванням (рис.29,f). Як правило, термоелектричні матеріали сильно легованих напівпровідників та гостьові елементи використовують для налаштування концентрації носіїв із зменшенням рухливості у зв'язку з помітним йонізованим домішково-електронним розсіюванням. Для n-типу, сполук з відкритими порожнинами у ґратках, як у скутерудитах і клатратах, можуть мати менше розсіювання електронів домішками при легуванні. У той час як для р-типу, природня надґратка, як у  $\text{Na}_x\text{CoO}_3$ , має багато переваг у порівнянні з іншими структурами у зв'язку з його розділеними шарами транспортними шляхами для легування. Однак для більшості матеріалів з такими унікальними структурами, необхідні інші стратегії для мінімізації розсіювання електронів домішками, тобто модуляції легування. Модуляція легування означає, що двофазний композит з сильно легованих на початковому етапі і нелегованих матриць-фаз, забезпечує високу транспортувальну швидкість каналу [137].

Когерентні нановключення (рис.29,b) в порівнянні з некогерентними (рис.29,g). Широке дослідження системи РbТе показує, що когерентні включення мають менший вплив на рухливість носіїв заряду, ніж не-

когерентні включення. Теоретичне дослідження також вказують, на зміну зонної структури за рахунок таких когерентних нановключень [140,141]. Поєднанні когерентних нановключення з надграткам і квантовими ямами в низькорозмірних системах дозволить досягнути кращого значення ZT.

*Випадкові межі (рис.29,с) в порівнянні з впорядкованими межами (рис.29,г).* Вплив меж зерен на механічні властивості добре вивчений у багатьох матеріалах. Однак існує тільки обмежене розуміння впливу меж зерен на транспортувальні властивості більшості термоелектричних матеріалів. Незважаючи на відсутність статистики уявлення про різні межі зерен і їх вплив на транспортування фононів і електронів, було підтверджено, що деякі межі зерна чинить менший вплив на транспорт електронів, але розсіюють достатню кількість фононів. Це – однотипні межі. Реконструкція різних випадкових меж і деяких спеціальних упорядкованих меж, щоб полегшити транспортування електронів буде значно сприяти підвищенню коефіцієнта потужності [142,135].

*Немодифікованого зерна (рис.29,д) в порівнянні з модифікованим зерном (рис.29,і).* Більшість термоелектричних матеріалів кристалізуються з кубічною структурою з майже сферичною формою. У результаті як теплові, так і електричні властивості є ізотропними в полікристалічних зразках. Враховуючи транспортну поведінку, межі справляють значний вплив на розсіювання фононів значно більше як на електрони. Оскільки межі зерен обмежують рух фононів вздовж одного напрямку на поверхні то, зміною сферичної форми зерна можна роз'єднати транспорт фононів і електронів.

*Сферичні порожнини (рис.29,е) в порівнянні з стовпчастими (рис.29,і).* У рамках теорії ефективного середовища, нормальні порожнини не покращують значення термоелектричної добротності ZT. Коли справа доходить до нанорозмірних, обмежене поліпшення має місце. Останнім часом встановлено, що впорядкованими наноотворами можна знизити теплопровідність ґратки плівок кремнію, наблизивши її до аморфної межі, з малим впливом на рухливість носіїв і зрештою підвищити значення ZT [143]. Теоретичні дослідження, проведеного на нанопористому кремнію показали, що непорядок різного розміру на внутрішній поверхні порожнин буде генерувати значні розсіювання фононів [144]. Ці роботи показали, що сипкі матеріали із стовпчастими порожнинами вельми цікаві для застосування у термоелектриці. З точки зору технології виготовлення, метод анодного окислення успішно застосовується для утворення в алюмінії каналів з розміром від десятків до сотень нанометрів. Однак, формувати такі канали у термоелектричних матеріалах є дійсно складним завданням. Таким чином, деякі значні успіхи у досягненні термоелектричної добротності ZT були зроблені в останні кілька років, але все це ще не достатню для широкого спектру застосувань. Тим не менше, питання, як зробити розмір зерен менше ніж 50 нм в кін-

цевому композитному матеріалі є дуже складним, але насправді необхідним для подальшого покращення ZT. Розподіл наноструктур для створення свого роду каналів для легкого транспорту електронів, але затрудненого для фононів, ймовірно, буде плідним напрямком у майбутньому.

### **Висновки**

1. Обґрунтована актуальність термоелектричного перетворення теплової енергії.
2. Представлена характеристика термоелектричних матеріалів та доведена перспективність нанокompозитів із високими значеннями термоелектричної добротності.
3. Надана порівняльна характеристика методів подрібнення і компактування нанокompозитів, вказано на перспективність іскро-плазмового спікання.
4. На основі аналізу структурного складу, комплексу фізико-хімічних властивостей широкого класу термоелектричних матеріалів та технологій виготовлення нанокompозитних структур визначено шляхи оптимізації термоелектричної добротності.

### *Література*

1. Шевельков А.В. Химические аспекты создания термоэлектрических материалов / А.В.Шевельков // Успехи химии. – 2008. – Т.77 – №1 – С. 3-21.
2. Cao G. Annual review of nano research Vol.3 / G.Cao, Q.Zhang, C.J.Bringer – Singapore, World scientific, 2010. – P. 550.
3. Ni H. Physica B. / H.Ni, T.Zhu, X.Zhao. – 2005. – V.50. – P. 364.
4. Zhu T.J. Mater. Res. Bull. / T.J.Zhu, Y.Q.Liu, X.B.Zhao. – 2008. – V.43. – P. 2850.
5. Am. Chem. Soc. / W.Z.Wang, B.Poudel, J.Yang, D.Z.Wang, Z.F.Ren. – 2005. – V.127 – P. 13792.
6. Mater. Lett. / J.L.Mi, X.B.Zhao, T.J.Zhu, J.P.Tu. – 2008. – V.62. – P. 2363.
7. Cao Y.Q. Alloys. Compd. / Y.Q.Cao, T.J.Zhu, X.B.Zhao. – 2008. – V.449. – P. 109.
8. Adv. Mater. / W.Z.Wang, B.Poudel, D.Z.Wang, Z.F.Ren. – 2005. – V.17. – P. 2110.
9. Nanosci. Nanotechnol. / B.Poudel, W.Z.Wang, D.Z.Wang, J.Y.Huang, Z.F.Ren – 2006. – V.6 – P. 1050.
10. Nanosci. Nanotechnol. / W.Z.Wang, X.Yan, P.B.oudel, Y.Ma, Q.Hao, J.Yang, G.Chen, Z.F.Ren. – 2008. – V.8. – P. 452.
11. Cao Y.Q., Zhao X.B., Zhu T.J., Zhang X.B., Tu J.P. // Appl. Phys. Lett. – 2008. – V.92. – P.143106.
12. Bertini L., Stiewe C., Toprak M., Williams S., Platzek D., Mrotzek A., Zhang Y., Gatti C., Muller E., Muhammed M., Rowe M. // Appl. Phys. – 2003. – V.93. – P.438.

13. Sun T., Zhao X. B., Zhu T. J., Tu J. P. // *Mater. Lett.* – 2006. – V.60. – P.2534.
14. Martin J., Nolas G. S., Zhang W., Chen L. // *Appl. Phys. Lett.* – 2007. – V.90. – P.222112.
15. Zheng Y. Y., Zhu T. J., Zhao X. B., Tu J. P., Cao G. S. // *Mater. Lett.* – 2005. – V.59. – P.2886.
16. Poudel B., Hao Q., Ma Y., Lan Y. C., Minnich A., Yu B., Yan X., Wang D. Z., Muto A., Vashaee D., Chen X. Y., Liu J. M., Dresselhaus M. S., Chen G., Ren Z. F. // *Science* – 2008. – V.320 – P.634.
17. Joshi G., Lee H., Lan Y. C., Wang X. W., Zhu G. H., Wang D. Z., Gould R. W., Cuff D. C., Tang M. Y., Dresselhaus M. S, Chen G., Ren Z. F. // *Nano Lett.* – 2008. – V.8 – P.4670.
18. Ma Y., Hao Q., Poudel B., Lan Y. C., Yu B., Wang D. Z., Chen G., Ren Z. F. // *Nano Lett.* – 2008. – V.8 – P.2580.
19. Wang X. W., Lee H., Lan Y. C., Zhu G. H., Joshi G., Wang D. Z., Yang J., Muto A. J., Tang M. Y., Klatsky J., Song S., Dresselhaus M. S., Chen G., Ren Z. F // *Appl. Phys. Lett.* – 2008. – V.93 – P.193121.
20. Zhu G. H., Lee H., Lan Y. C., Wang X. W., Joshi G., Wang D. Z., Yang J., Vashaee D., Guilbert H., Pillitteri A., Dresselhaus M. S., Chen G., Ren Z. F., // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – V.102 – P.196803.
21. Ren Z. F., Poudel B., Ma Y., Hao Q., Lan Y. C., Minnich A., Muto A., Yang J., Yu B., Yan X., Wang D. Z., Liu J. M., Dresselhaus M. S., Chen G., // *Mater. Res. Soc. Symp. Proc.* – 2009. – P.1166.
22. Suryanarayana C. // *Prog. Mater. Sci.* – 2001. – V.46 – №.1.
23. Lan Y., Minnich A. J., Chen G., Ren Z. Enhancement of thermoelectric figure-of-merit by a bulk nanostructuring approach // *Adv. Funct. Mater.* – 2010. – V.20 – P.357.
24. [http://en.wikipedia.org/wiki/Ball\\_mill](http://en.wikipedia.org/wiki/Ball_mill)
25. Gusev A.I. *Nanocrystalline Materials / A.I.Gusev, A.A.Rempel* – Cambridge Int, Science Publishing, 2004.
26. Rowe D.M. // *Thermoelectrics handbook: macro to nano / D.M.Rowe* – CRC/Taylor & Francis, Boca Raton, 2006.
27. Umemoto M. // *Materials Transactions JIM.* – 1995. – V.36 – P.373.
28. Davis R.M., Koch C.C. // *Scripta Metallurgica.* – 1987. – V.21 – P.305.
29. Bouad N., Marin-Ayral R.M., Tedenac J.C. // *Journal of Alloys and Compounds.* – 2000. – V.297 – P.312.
30. Kishimoto K., Koyanagi T. // *Journal of Applied Physics.* – 2002. – V.92 – P.2544.
31. Bouad N., Record M.C., Tedenac J.C., Marin-Ayral R.M. // *Journal of Solid State Chemistry.* – 2004. – V.177 – P.221.
32. Kim H.C., Oh T.S., Hyun D.B. // *Phys Chem Solids.* – 2000. – V.61 – P.743.
33. Schilz J., Riffel M., Pixius K., Meyer H.J. // *Powder Technol.* – 1999. – V.105 – P.149.

34. Yang J.Y., Chen Y.H., Peng J.Y., Song X.L., Zhu W., Su J.F., Chen R.G. // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2004. – V.375 – P.229.
35. May A.F., Fleurial J.P., Snyder G.J. // *Physical Review B*. – 2008. – V.78 – P.125205.
36. Zhang B. Lead chalcogenide nano-composites: synthesis, thermal and electrical transport properties / B.Zhang // *Dissertation* – 2008.
37. Zhao X.B., Ji X.H., Zhang Y.H., Zhu T.J., Tu J.P., Zhang X.B. // *Applied Physics Letters*. – 2005. – V.86 – P.062111.
38. Gothard N., Ji X., He J., Tritta T.M. // *Journal of Applied Physics*. – 2008. – V.103 – P.054314.
39. Ni H.L., Zhao X.B., Zhu T.J., Ji X.H., Tu J.P. // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2005. – V.397 – P.317
40. Wang W., Poudel B., Yang J., Wang D.Z., Ren Z.F. // *Am Chem Soc* – 2005. – V.127 – P.13792.
41. Yu S.H., Yang J., Wu Y.S., Han Z.H., Lu J., Xie Y., Qian Y.T. // *Mater Chem*. – 1998. – V.8 – P.1949
42. Mi J.L., Zhao X.B., Zhu T.J., Tu J.P., Cao G.S. // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2006. – V.417 – P.269.
43. Mi J.-L., Zhao X.-B., Zhu T.-J., Tu J.-P. // *Journal of Inorganic Materials*. – 2008. – V.23 – P.715.
44. Purkayastha F.L.A., Kim S., Borca-Tasciuc T., Ramanath G. // *Advanced Materials*. – 2006. – V.18 – P.496
45. Lu W., Ding Y., Chen Y., Wang Z. L., Fang J., // *Am Chem Soc*. – 2005. – V.127. – P.10112.
46. Xiao F., Hangarter C., Yoo B.Y., Rheem Y.W., Lee K.H., Myung N.V. // *Electrochimica Acta*. – 2008. – V.53. – P.8103.
47. Snyder G.J., Lim J.R., Huang C.K., Fleurial J.P. // *Nature Materials*. – 2003. – V.2. – P.528.
48. Chen L.J., Hu H.N., Li Y.X., Chen G.F., Yu S.Y., Wu G.H. // *Chemistry Letters*. – 2006. – V.35. – P.170.
49. Martin-Gonzalez M., Prieto A.L., Gronsky R., Sands T., Stacy A.M. // *Advanced Materials*. – 2003. – V.15. – P.1003.
50. Jin C.G., Xiang X. Q., Jia C., Liu W.F., Cai W.L., Yao L.Z., Li X.G. // *Phys Chem B* 108 p. – 2004. – V.108. – P.1844.
51. Jin C.G., Zhang G.Q., Qian T., Li X.G., Yao Z. // *Phys Chem B*. – 2005. – V.109. – P.1430.
52. Martin-Gonzalez M., Snyder G.J., Prieto A.L., Gronsky R., Sands T., Stacy A.M // *Nano Letters*. – 2005. – V.3. – P.973.
53. Liu W.F., Cai W.L., Yao L.Z. // *Chemistry Letters*. – 2007. – V.36. – P.1362.
54. Gurrappa I. Electrodeposition of nanostructured coatings and their characterization - a review / I.Gurrappa, L.Binder // *Sci. Technol. Adv. Mater*. – 2008. – V.9.

55. Wang W., Qu J.F., Lu X.L., Zhang G.Q., Li G., Li X.G. // *Materials Science Forum.* – 2007. – V.546-549. – P.2171.
56. Li L., Yang Y.W., Huang X.H., Li G.H., Zhang L.D. // *Nanotechnology.* – 2006. – V.17. – P.1706.
57. Trahey L., Becker C.R., Stacy A.M. // *Nano Letters.* – 2007. – V.7. – P.2535.
58. Xue F.H., Fei G.T., Wu B., Cui P., Zhang L.D. // *Am Chem Soc.* – 2005. – V.127. – P.15348.
59. Yoo B., Xiao F., Bozhilov K.N., Herman J., Ryan M.A., Myung N.V. // *Advanced Materials.* – 2007. – V.19. – P.296.
60. Wang W., Zhang G.Q., Li X.G. // *Journal of Physical Chemistry C.* – 2008. – V.112. – P.15190.
61. Wang W., Lu X.L., Zhang T., Zhang G.Q., Jiang W.J., Li X.G., // *Am Chem Soc.* – 2007. – V.129. – P.6702.
62. Dresselhaus M. *Materials and Technologies for direct thermal-to-electric energy conversion* / M.S.Dresselhaus, G.Chen, M.Y.Tang, R.G.Yang, H.Lee, D.Z.Wang, Z.F.Ren, J.P.Fleuriel, P.Gogna, MRS // *Symposium Proceedings.* – 2005. – V.886. – P.3.
63. Kathy Lu *Nanoparticulate materials synthesis, characterization, and processing*, / Lu Kathy – Hoboken, New Jersey, John Wiley&Sons, Inc., – (2012). – p.430.
64. Bang J.H., Suslick K.S. *Applications of Ultrasound to the Synthesis of Nanostructured Materials*/ Jin Ho Bang, Kenneth S. Suslick // *Adv. Mater.* – 2010. – V.22. – PP.1039-1059.
65. Suslick K.S. // *Science.* – 1990. – V.247. – P.1439.
66. Qiu X.F., Zhu J.J., Pu L., Shi Y., Zheng Y.D., Chen H.Y. // *Inorganic Chemistry Communications.* – 2004. – V.7. – P.319.
67. Zheng Y.Y., Zhu T.J., Zhao X.B., Tu J.P., Cao G.S. // *Materials Letters.* – 2005. – V.59. – P.2886.
68. Ge J.P., Li Y.D. // *Mater Chem.* – 2003. – V.13. – P.911.
69. Kodas T., Hampden-Smith M. *The chemistry of metal CVD* / T. Kodas, M. Hampden-Smith – Weinheim; New York ;Base ; Cambridge ; Tokyo : VCH. – 1994.
70. Boreddy S. R. Reddy *Advances in Nanocomposites - Synthesis, Characterization and Industrial Applications* // *InTech, Croatia, (2011).* – p.980.
71. Filipponi L. *Fundamental concepts in nanoscience and nanotechnologies* / L. Filipponi, D. Sutherl – Denmark. *Interdisciplinary Nanoscience Centre (iNANO) Aarhus University, 2010.*
72. Wang H., Li J.F., Nan C.W., Zhou M., Liu W., Zhang B.P., Kita T. // *Appl. Phys. Lett.* – 2006. – V.88. – P.092104.
73. Liu W.S., Zhang B.P., Li J.F., Zhao L.D. // *Phys. D: Appl. Phys.* – 2007. – V.40. – P.566.



74. Martin-Lopez R., Dauscher A., Scherrer H., Hejtmanek J., Kenzari H., Lenoir B. // *Appl. Phys. A: Mater. Sci. Process.* – 1999. – V.68. – P.597.
75. Kim S.S., Yamamoto S., Aizawa T. // *Alloy. Compd.* – 2004. – V.375. – P.107.
76. Ur S.C., Kim I.H., Nash P., // *Mater. Sci.* – 2007. – V.42. – P.2143.
77. He Z., Stiewe C., Platzek D., Karpinski G., Muller E., Li S., Toprak M., Muhammed M. // *J. Appl. Phys.* – 2007. – V.101. – P.053713.
78. Schultz J.M., McHugh J.P., Tiller W.A. // *J. Appl. Phys.* – 1962. – V.33. – P.2443.
79. Henriques B. Optimization of bond strength between gold alloy and porcelain through a composite interlayer obtained by powder metallurgy / B.Henriques, D.Soaes, F.S.Silva. – *Materials Science and Engineering A.* – 2011. – V.528. – P.1415.
80. Rowe D.M., Shukla V.S., Savvides N. // *Nature.* – 1981. – V.290. – P.465.
81. Yang J., Hao Q., Wang H., Lan Y. C., He Q.Y., Wang D.Z., Harriman J.A., Varki V.M., Dresselhaus M.S., Chen G., Ren Z.F. // *Phys. Rev. B.* – 2009. – V.80. – P.115329.
82. Miller J.F., Himes R.C. // *Electrochem. Soc.* – 1960. – V.107. – P.915.
83. Dresselhaus M.S., Chen G., Tang M.Y., Yang R.G., Lee H., Wang D.Z., Ren Z.F., Fleurial J.P., Gogna P. // *Adv. Mater.* – 2007. – V.19. – P.2107.
84. Munir Z.A., Anselmi-Tamburini U., Ohyanagi M. // *Journal of Materials Science.* – 2006. – V.41. – P.763.
85. Kessel H.U. Технология спекания в электрическом поле / H.U.Kessel, J.Hennicke, J.Schmidt / Germany, System gmbh, 2011. – p.33,
86. Goldsmid H.J., Douglas R.W. // *Brit. J. Appl. Phys.* – 1954. – V.5. – P.386.
87. Zhao L.-D., Zhang B.-P., Liu W.-S., Li J.-F. // *Appl. Phys.* – 2009. – V.105. – P.023704.
88. Ji X.H., He J., Su Z., Gothard N., Tritt T.M. // *Journal of Applied Physics.* – 2008. – V.104. – P.034907.
89. Zhang Q., Zhang Q.Y., Chen S., Liu W.S., Lukas K., Yan X., Wang H.Z., Wang D.Z., Opeil C., Chen G., Ren Z.F. // *Nano Letters.* – 2010.
90. Yu B. Thermoelectric Figure-of-Merit in Bulk p-type PbTe / B.Yu, H.Wang, B.Poudel, K.McEnaney, G.Chen, Z.Ren – APS March Meeting, Pittsburgh, PA, March, 2009.
91. Peranio N., Eibl O., Nurnus J. // *Journal of Applied Physics.* – 2006. – V.100. – P.114306.
92. Heremans J.P., Thrush C.M., Morelli D.T. // *Journal of Applied Physics.* – 2005. – V.98. – P.063703.
93. Sootsman J.R., Kong H., Uher C., D'Angelo J.J., Wu C.I., Hogan T.P., Caillat T., Kanatzidis M.G. // *Angewandte Chemie-International Edition* 47, 8618 (2008). – 2008. – V.47. – P.8618.

94. Hsu K.F., Loo S., Guo F., Chen W., Dyck J.S., Uher C., Hogan T., Polychroniadis E.K., Kanatzidis M.G. // *Science*. – 2004. – V.303. – P.848.
95. Poudeu P.F.R., D'Angelo J., Downey A.D., Short J.L., Hogan T.P., Kanatzidis M.G. // *Angewandte Chemie-International Edition*. – 2006. – V.45. – P.3835.
96. Androulakis J., Hsu K.F., Pcionek R., Kong H., Uher C., D'Angelo J.J., Downey A., Hogan T., Kanatzidis M.G. // *Advanced Materials*. – 2006. – V.18. – P.1170.
97. Kosuga A., Kurosaki K., Muta H., Yamanaka S. // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2006. – V.416. – P.218.
98. Bilc D., Mahanti S.D., Quarez E., Hsu K.F., Pcionek R., Kanatzidis M.G. // *Physical Review Letters*. – 2004. – V.93. – P.146403.
99. D.I. Bilc, S.D. Mahanti, and M.G. Kanatzidis, *Physical Review B* 74, 125202 (2006).
100. Zhou M., Li J. F., Kita T. // *Journal of the American Chemical Society*. – 2008. – V.130. – P.4527.
101. Ikeda T., Haile S.M., Ravi V.A., Azizgolshani H., Gascoin F., J.Snyder G. // *Acta Materialia*. – 2007. – V.55. – P.1227.
102. Ikeda T., Collins L.A., Ravi V.A., Gascoin F.S., Haile S.M., Snyder G.J. // *Chemistry of Materials*. – 2007. – V.19. – P.763.
103. Ikeda T., Ravi V.A., Collins L.A., Haile S.M., Snyder G.J. // *Journal of Electronic Materials*. – 2007. – V.36. – P.716.
104. Androulakis J., Lin C.H., Kong H.J., Uher C., Wu C.I., Hogan T., Cook B.A., Caillat T., Paraskevopoulos K.M., Kanatzidis M.G. // *Journal of the American Chemical Society*. – 2007. – V.129. – P.9780.
105. Nolas G.S., Wang D., Beekman M. // *Physical Review B*. – 2007. – V.76. – P.235204.
106. Zaitsev V.K., Fedorov M.I., Gurieva E.A., Eremin I.S., Konstantinov P.P., Samunin A.Y., Vedernikov M.V. // *Physical Review B*. – 2006. – V.74. – P.045207.
107. Zhang Q., He J., Zhu T.J., Zhang S.N., Zhao X.B., Tritt T.M. // *Applied Physics Letters*. – 2008. – V.93. – P.102109.
108. Uher C. *Recent Trends in Thermoelectric Material Search in Semiconduct. Semimet Vol. 69 / C. Uher*. – USA, Academic, 2001.
109. Berardan D. // *Appl. Phys.* – 2005. – V.98. – P.033710.
110. Slack G.A. *CRC Handbook of Thermoelectrics / G.A.Slack*. – USA, CRC Press, 1995.
111. Sales B.C., Mandrus D., Williams R.K. // *Science*. – 1996. – V.272. – P.1325.
112. Chen L.D // *Appl. Phys.* – 2001. – V.90. – P.1864.
113. Tang X., Zhang Q., Chen L., Goto T., Hirai T. // *Appl. Phys.* – 2005. – V.97. – P.093712.

114. Li J.-F. High-performance nanostructured thermoelectric materials / J.-F.Li, W.-S.Liu, L.-D.Zhao, M.Zhou // *NPG Asia Mater.* – 2010. – V.2. – №4. – P.152.
115. Shi X., Zhang W., Chen L.D., Yang J. // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – V.95. – P.185503.
116. Pei Y.Z. // *Appl. Phys. Lett.* – 2006. – V.89. – P.221107.
117. Li H., Tang X., Zhang Q., Uher C. // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – V.94. – P.102114.
118. Long G.J., Hermann R.P., Grandjean F., Alp E.E., Sturhahn W., Johnson C.E., Brown D.E., Leupold O., Ruffer R. // *Physical Review B.* – 2005. – V.71. – P.140320.
119. Grannan E.R., Randeria M., Sethna J.P. // *Physical Review B.* – 1990. – V.41. – P.7799.
120. Yang J., Zhang W., Bai S.Q., Mei Z., Chen L.D. // *Applied Physics Letters.* – 2007. – V.90. – P.192111.
121. Shi X., Yang J., Salvador J.R., Chi M.F., Cho J.Y., Wang H., Bai S.Q., Yang J.H., Zhang W.Q., Chen L.D. // *Journal of the American Chemical Society.* – 2011. – V.133. – P.7837.
122. Wood C. // *Rep Prog Phys.* – 1988. – V.51. – P.459.
123. Vining C.B. // *Appl. Phys.* – 1991. – V.69. – P.331.
124. Vining C.B., Laskow W., Hanson J.O., der Beck R.R.V., Gorsuch P.D., // *Appl. Phys.* – 1991. – V.69. – P.4333.
125. Rowe D.M., Fu L.W., Williams S.G.K. // *Appl. Phys.* – 1993. – V.73. – P.4683.
126. Abdellaoui M., Gaffet E. // *Phys. IV France.* – 1994. – V.4. – P.3.
127. Gaffet E., Yousfi L. // *Mater. Sci. Forum.* – 1992. – V.51. – P.88.
128. Uher C., Yang J., Hu S., Morelli D.T., Meisner G.P. // *Phys. Rev. B.* – 1999. – V.59. – P.8615.
129. Shen Q // *Appl. Phys. Lett.* – 2001. – V.79. – P.4165.
130. Culp S.R., Poon S.J., Hickman N., Tritt T.M., Blumm J. // *Appl. Phys. Lett.* – 2006. – V.88. – P.042106.
131. Zou M., Li J.-F., Du B., Liu D., Kita T. // *Solid State Chem.* – 2009. – V.182. – P.3138.
132. Zhou M., Chen L., Feng C., Wang D., Li J.-F. // *Appl. Phys.* – 2007. – V.101. – P.113714.
133. Yang J. // *Adv. Funct. Mater.* – 2008. – V.18. – P.2880.
134. Wang H., Li J.F., Zou M.M., Sui T. // *Applied Physics Letters.* – 2008. – V.93. – P.202106.
135. Yan X., Poudel B., Ma Y., Liu W.S., Joshi G., Wang H., Lan Y.C., Wang D.Z., Chen G., Ren Z.F. // *Nano Letters.* – 2010. – V.10. – P.3373.
136. Pichanusakorn P., Bandaru P. // *Materials Science and Engineering.* – 2010. – V.67. – P.19.

137. Zebarjadi M., Joshi G., Zhu G.H., Yu B., Minnich A., Lan Y.C., Wang X.W., Dresselhaus M., Ren Z.F., Chen G. // *Nano Letters*. – 2011. – V.11. – P.2225.
138. Venkatasubramanian R., Siivola E., Colpitts T., O'Quinn B. // *Nature*. – 2001. – V.413. – P.597.
139. Liu W., Yan X., Gang Chen, Ren Z. Recent advances in thermoelectric nanocomposites // *Nano Energy*. – 2012. – V.1. – P.42.
140. Popescu A., Woods L.M. // *Applied Physics Letters*. – 2010. – V.97. – P.052102.
141. Zhang Y., Ke X.Z., Chen C.F., Yang J.H., Kent P.R.C. // *Physical Review Letters*. – 2011. – V.106. – P.206601.
142. Zhao L.D., Zhang B.P., Li J.F., Liu W.S. // *Solid State Science*. – 2008. – V.10. – P.651.
143. Tang J.Y., Wang H.T., Lee D.H., Fardy M., Huo Z.Y., Russell T.P., Yang P.D. // *Nano Letters* 10 p.4279 (2010). . – 2010. – V.10. – P.4279.
144. He Y.P., Donadio D., Lee J.H., Grossman J.C., Galli G. // *ACS Nano*. – 2011. – V.3. – P.1839.
145. Yi T., Chen S., Yang S. Li, H., Bux S., Bian Z., Katcho N.A., Shakouri A., Mingo N, Fleurial J.-P., Browning N.D., Kauzlarich S.M. // *Mater. Chem*. – 2012. – V.22. – P.24805.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 18.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Галуцаком М.О., д.ф.-м.н., професором Куницьким Ю.А. (м. Київ)*

## NANOCOMPOSITE THERMOELECTRIC MATERIALS PRODUCTION, PROPERTIES, USING (REVIEW)

**D. M. Freik<sup>2</sup>, O.S. Krynytsky<sup>1</sup>, O.M. Matkivsky<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ivano-Frankivsk National Technical University Oil and Gas;*

*76018, Ivano-Frankivsk, 15, Karpatska str.;*

*e-mail: oleksandr.krynytsky@gmail.com*

<sup>2</sup>*Vasyl Stefanyk Precarpatian National University;*

*76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57; e-mail: freik@pu.if.ua*

*Detailed analysis of the technological methods used to obtain nanocomposite structures of semiconductor thermoelectric materials and methods of compaction in solid samples. Particular attention is paid to the characteristics of different classes of compounds for nanocomposites: structure, thermal and electrical properties, compaction methods and ways of use. Highlighted new strategies in obtaining nanocomposites.*

**Key words:** *thermoelectricity, nanostructure, nanocomposites.*

## РОЗРАХУНОК ТА ШЛЯХИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СПОЛУК IV-VI (ОГЛЯД)

**Р. О. Дзумедзей**

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;  
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;  
e-mail: [kepa@nashemisto.if.ua](mailto:kepa@nashemisto.if.ua)*

*Проведено детальний аналіз методів розрахунку термоелектричних параметрів. Встановлено температурні діапазони домінування різних типів розсіювання в чистих кристалах сполук IV-VI (PbS, PbSe, PbTe). Здійснено теоретичний розрахунок термоелектричних параметрів: рухливості  $\mu$ , термо-е.р.с.  $\alpha$ , питомої електропровідності  $\sigma$ , теплопровідності  $\chi$ , термоелектричної потужності  $\alpha^2\sigma$ , добротності  $Z$ , безрозмірної добротності  $ZT$ . Особлива увага звернена на шляхи оптимізації основних термоелектричних параметрів матеріалу для їх прогнозованого використання.*

**Ключові слова:** *рухливість, питома електропровідність, коефіцієнт термо-е.р.с., теплопровідність, термоелектрична потужність, термоелектрична добротність.*

### **Зміст**

#### Вступ

#### 1. Технологія

#### 2. Теорія

#### 3. Результати розрахунків термоелектричних параметрів

##### 3.1. Електропровідність халькогенідів свинцю n-типу провідності.

##### 3.2. Концентраційні залежності коефіцієнта термо-е.р.с.

##### 3.3. Розрахунок ґраткової та електронної складових коефіцієнта теплопровідності

#### 4. Оптимізація

#### Висновки

#### Література

### **Вступ**

Халькогеніди свинцю, в основному телурид свинцю і тверді розчини на його основі, зарекомендували себе ефективними промисловими матеріалами для термоелектрики [1-7]. Високі термоелектричні характеристики халькогенідів свинцю спричинені їх специфічними характеристиками: багатоеліпсоїдальний характер енергетичного спектра ( $N=4$ ), низькі значення теплопровідності ґратки ( $\sim 2,09 \cdot 10^{-2}$  Вт/см $\cdot$ К при

порівняно високій рухливості носіїв  $\sim 1000 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ). Низькі значення  $\chi_p$  значною мірою визначаються великою масою атомів, які утворюють ці сполуки, а відносно високим значенням рухливості сприяє мала величина ефективної маси носіїв і переважаюча роль ковалентної складової в зв'язках.

Сприятливим фактором для термоелектричної добротності халькогенідів свинцю є також велике значення діелектричної проникності  $\epsilon_0$ . Завдяки цьому відбувається суттєве зменшення поперечного перерізу розсіювання електричних заряджених домішкових центрів і мале розсіювання на йонізованих домішках [7]. Ця обставина особливо суттєва для визначення добротності термогенераторних матеріалів, в яких оптимальна концентрація носіїв значно переважає  $10^{19} \text{ см}^{-3}$ .

Як показує порівняння властивостей халькогенідів свинцю, при  $T=300 \text{ К}$  різниця в їх термоелектричних властивостях в основному визначається співвідношенням рухливості носіїв і теплопровідності ґратки. Найбільш сприятливим це співвідношення є у випадку телуриду свинцю n-типу, який володіє більшою, порівняно з іншими халькогенідами свинцю, рухливістю носіїв [2,7-9].

В області більш високих температур стає суттєвим ще один фундаментальний параметр матеріалу – ширина забороненої зони, яка визначає початок власної провідності.

Поява носіїв протилежного знаку призводить до різкого падіння  $Z$  через зменшення термо-е.р.с. і до росту теплопровідності за рахунок біполярної дифузії носіїв. Збільшення ширини забороненої зони з температурою сповільнює початок власної провідності, сприяючи досягненню більш високих значень  $Z_{\text{max}}$ ; по ширині забороненої зони телурид свинцю займає друге місце після сульфїду свинцю, але володіє найбільш високим значенням  $\mu/\chi_p$ . Сукупність цих факторів робить телурид свинцю найбільш перспективним серед халькогенідів свинцю.

Крім того, телурид свинцю вважається модельним матеріалом для науковців. Модельні матеріали – найбільш складні для вивчення, оскільки для них необхідно враховувати повний спектр різноманітних властивостей, якими у випадку більшості інших матеріалів просто нехтують за звичайних умов. Тому загальні підходи, які використовують для таких матеріалів, легко можна перенести на довільні інші сполуки. Детальні дослідження модельного матеріалу дає можливість створювати теоретичні моделі з метою пошуку матеріалів із наперед заданими властивостями чи оптимізувати параметри уже відомих матеріалів.

Відомо, що ефективність роботи термоелектричних перетворювачів енергії визначається термоелектричною добротністю використаних в них матеріалів [2,7,10]. Згідно сучасних уявлень, термоелектрична добротність матеріалів визначається величиною [10]:

$$Z = \frac{S^2 \sigma}{\chi}. \quad (1)$$

Основний термоелектричний матеріал (високі значення  $Z$ ) має проводити електрику як метал (велика питома електропровідність  $\sigma$ ), а тепло – як діелектрик (мала теплопровідність  $\chi$ ).

Більшість теоретичних робіт, присвячених вивченню зонної структури [7,11-14], дослідженню транспортних характеристик [7,15-18] акцентували увагу саме на телуриді свинцю, як модельному матеріалі та його властивостях у діапазоні температур (4,2-300) К. Прикладне ж значення для термоелектрики PbTe отримав в області середніх температур (450-800) К [3,8,19]. Широкий спектр досліджень виконувався і продовжується на даний час у Фізико-хімічному інституті Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Результати цих досліджень відображені у роботах [2,3,20-22].

Метою даного огляду є вибір кінцевої моделі розрахунку термоелектричних характеристик халькогенідів свинцю PbS, PbSe, PbTe n-типу провідності для температур (4,2-300) К та визначення шляхів їх подальшої оптимізації на основі аналізу існуючих даних та отриманих теоретичних і експериментальних результатів.

### 1. Технологія

Кристали бездомішкового телуриду свинцю отримували прямим сплавленням вихідних компонентів (свинець марки С-000, телур Т-В4) у графітизованих кварцових ампулах, відкачаних до тиску  $\sim 10^{-2}$  Па. Синтез та вирощування сплавів проводили в ампулах діаметром до 13 мм і довжиною 13-17 см, виготовлених із високо чистого кварцу. Кінець ампули мав форму капіляра для збільшення ймовірності росту лише одного центра кристалізації [23]. Ампули промивали сумішшю HF:HNO<sub>3</sub> (1:2) протягом 30 хв та дистильованою водою протягом 1 години [24], пропарювались у парах бідистилята 15-20 хв та сушилися без доступу повітря при 150-200<sup>0</sup>С.

У приготуванні таким чином ампулу завантажували вихідні компоненти (загрузочна маса 40-60 г, об'єм  $\sim 2/3$  об'єму ампули). Зважування проводили на аналітичних терезах ВЛР-200 з точністю до  $5 \cdot 10^{-5}$  г. Далі ампулу відкачували до  $10^{-5}$ - $10^{-6}$  мм.рт.ст., запаювали і поміщали у піч, температура якої повільно (для попередження вибуху S, Se чи Te) піднімалась на 40-60 градусів вище температури солідуса (до 960-1150<sup>0</sup>С, залежно до складу вихідної речовини). Синтез зразків проводили протягом 6 годин із застосуванням вібраційного перемішування.

Великі монокристали телуриду свинцю довжиною 7 см і діаметром 1 см були отримані методом Бріджмена в графітизованих кварцових ампулах із кульковим кінчиком. Кристали вирощували за швидкості опускання ампули 1,25 см/год і градієнті температури в області кристалізації 80 К/см. Переважаючий напрямок росту збігався з напрямком

<110>. Для виявлення дислокацій використовувався щавник такого складу: H<sub>2</sub>O (10 мл)+NaOH (5 г)+I<sub>2</sub>(0,2 г) [25]. Монокристали сколювали в рідкому азоті по площинах (100), і свіжосколоту поверхню щавили протягом 1,5-2 хв при 391-395 К. Густина дислокацій у кристалах р-типу, близьких до стехіометричного складу, складала 3·10<sup>7</sup> м<sup>-2</sup>.

Зразки для холлівських вимірювань вирізали із литих зразків за допомогою електроіскрової установки. Для видалення пошкодженого шару, який утворювався на поверхні зразків під час різання, їх поверхню обробляли електрохімічним травленням в розчині KOH+C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>O+H<sub>2</sub>O при температурі ~25<sup>0</sup>С. Час травлення в розчині складав 20-25 с при густині струму 0,5 А/м<sup>2</sup>. Електричні контакти наносили сплавом масового складу %: 57(Vi)+43(Sn) за допомогою флюсу ZnCl<sub>2</sub>+NH<sub>4</sub>Cl+NiCl<sub>2</sub>+H<sub>2</sub>O [23].

## 2. Теорія

Розв'язання кінетичного рівняння Больцмана загалом є складною задачею, яка, проте, значно спрощується введенням часу релаксації: коли відхилення розподілу носіїв заряду від рівноважного стану мале, можна вважати, що швидкість зміни функції розподілу внаслідок співударів пропорційна величині відхилення функції від рівноваги, тобто пропорційна  $f - f_0$  [26]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{СТ} = -\frac{f - f_0}{\tau(k)}, \quad (2)$$

де  $1/\tau(k)$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від хвильового вектора  $k$ , а  $\tau(k)$  – і є часом релаксації.

Дослідження механізмів розсіювання носіїв заряду зручно проводити на величинах, які можна виміряти експериментально. Найбільш зручною у такому випадку є рухливість носіїв заряду  $\mu$ , оскільки, з одного боку її легко виміряти, а, з іншого, теоретичний розрахунок рухливості здійснюють через чутливий до механізмів розсіювання час релаксації [15]:

$$\mu_H = e \left\langle \left[ \tau(\varepsilon) / m_0(\varepsilon) \right]^2 \right\rangle / \langle \tau(\varepsilon) / m_0(\varepsilon) \rangle, \quad (3)$$

тут кутові дужки визначають усереднення:

$$\langle A(\varepsilon) \rangle = \int_0^\infty (-\partial f_0 / \partial \varepsilon) k^3(\varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon / \int_0^\infty (-\partial f_0 / \partial \varepsilon) k^3(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$f_0(\varepsilon)$  – функція розподілу Фермі-Дірака,  $\tau$  – сумарний час релаксації, який враховує дію всіх механізмів розсіювання носіїв струму у халькогенідах свинцю n-типу провідності і обчислюється згідно з правилом Маттісена:

$$\tau = \sum_i \frac{1}{\tau_i}, \quad (4)$$

де  $\tau_i$  – час релаксації  $i$ -ого механізму розсіювання.



Із чисельних досліджень випливає, що основними механізмами розсіювання у кристалах халькогенідів свинцю є розсіювання на: кулонівському потенціалі вакансій (КЛПВ), короткодіючому потенціалі вакансій (КРПВ), деформаційних потенціалах акустичних (ДПАФ) та оптичних (ДПОФ) фононів, поляризаційному потенціалі оптичних фононів (ППОФ).

Вирази для часу релаксації, згідно яких проводились розрахунки в даній роботі, для різних механізмів розсіювання мають вигляд [7,15]:

а) КЛПВ:

$$\tau_C(x) = \frac{\varepsilon_0^2 (2m^*)^{1/2} (k_0 T)^{3/2}}{\pi (Ze^2)^2 N_v [\ln(1+\xi) - \xi / (1+\xi)]} \times \frac{(x + \beta x^2)^{3/2}}{(1 + 2\beta x)},$$

де  $\xi = (2kr_v)^2$ ,  $k$  – хвильовий вектор носія,  $r_v$  – радіус екранування потенціалу вакансії,  $N_v = 2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  для  $n < 4 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  та  $N_v = n/2$  для  $n \geq 4 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ;

б) КРПВ:

$$\tau_v(x) = \frac{\tau_{0,v} (x + \beta x^2)^{-1/2}}{(1 + 2\beta x) [(1-A)^2 - B]},$$

де

$$\tau_{0,v} = \pi \cdot \hbar^4 / m^* (2m^* k_0 T)^{1/2} U_{VC}^2 N_v,$$

$$A = \beta x (1 - K) / (1 + 2\beta x),$$

$$B = 8\beta x (1 + \beta x) K / 3(1 + 2\beta x)^2;$$

в) ДПАФ: час релаксації при розсіюванні на цьому потенціалі обчислюється за формулою із попереднього пункту, в якій слід прийняти індекс  $v=a$  та переписати вираз для  $\tau_{0,a}$  наступним чином:

$$\tau_{0,a} = 2\pi \hbar^4 C_1 / E_{oc}^2 (2m^* k_0 T)^{3/2};$$

г) ДПОФ:

$$\tau_D = \frac{\tau_{0,D} (x + \beta x^2)^{-0.5}}{(1 + 2\beta x) [(1-A)^2 - B]},$$

де

$$\tau_{0,D} = 2\hbar^2 a^2 \rho (\hbar \omega_0)^2 / \pi (2m_n k_0 T)^{3/2} E_{0C}^2;$$

д) ППОФ:

$$\tau_{opt}^{-1} = \frac{2^{1/2} e^2 k_0 T m_{dl}^{*1/2}}{\hbar^2 \varepsilon^{1/2}} \left( \varepsilon_\infty^{-1} - \varepsilon_0^{-1} \right) \frac{1 + (2\varepsilon / \varepsilon_G)}{[1 + (\varepsilon / \varepsilon_G)]^{1/2}} \times$$

$$\times \left\{ \left[ 1 - \delta_\infty \ln(1 + \delta_\infty^{-1}) \right] - \frac{2\varepsilon(\varepsilon_G + \varepsilon)}{(\varepsilon_G + \varepsilon)^2} \left[ 1 - 2\delta_\infty + 2\delta_\infty^2 \ln(1 + \delta_\infty^2) \right] \right\};$$

У виразах із пунктів а-д  $\epsilon_0$  – статична діелектрична проникність;  $U_{vc}$  – короткодіючий потенціал вакансії;  $E_{ac}$  – деформаційний потенціал вакансії;  $C_1$  – комбінація констант;  $K=1,5$  – відношення короткодіючих потенціалів вакансій для зони провідності і валентної зони та деформаційних потенціалів для цих зон;  $x$  – приведена енергія носіїв,  $\beta$  – параметр енергетичної зони,  $e_0$  та  $\epsilon_\infty$  – статична і високочастотна діелектричні постійні,  $T$  – температура,  $\hbar$  – постійна Планка,  $k_0$  – постійна Больцмана,  $e$  – заряд вільного електрона,  $\rho$  – густина,  $a$  – постійна ґратки,  $\omega_0$  – частота оптичного фонону,  $\delta_\infty = (2kr_\infty)^{-2}$ ,  $r_\infty$  – радіус екранування оптичних фононів носіями.

На рис.1-3 наведено розрахункові криві для різних механізмів розсіювання носіїв заряду у кристалах халькогенідів свинцю при 4,2 К, 77 К та 300 К. Як видно, результати добре узгоджуються із експериментальними даними і не суперечать відомим результатам [7,17,19].

Однак, варто відмітити, що для кристалів сульфїду та селенїду свинцю при 4,2 К спостерігається більш сильне розсіювання на вакансіях, ніж це має місце у телуриді свинцю.

Розсіюванням на вакансіях при азотних температурах можна досить добре у якісному відношенні пояснити явища переносу в електронних кристалах халькогенідів свинцю, а від концентрацій  $10^{19} \text{ см}^{-3}$  і вище – це розсіювання починає бути домінуючим. Дещо точнішим буде врахування взаємодії носіїв струму з фононами, яке домінує у більш широкому концентраційному діапазоні ( $10^{16} - 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ).

Розсіювання на потенціалах вакансій у домінуючому концентраційному діапазоні ( $8,5 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$  для PbTe,  $5 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$  для PbSe та  $2 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$  для PbS,) проявляється через розсіювання носіїв струму на короткодіючому потенціалі вакансій. Екранований же кулонівський потенціал вакансій відіграє досить незначну роль в розсіюванні. Але несподівана картина спостерігається у сульфїді свинцю, де розсіювання на кулонівському потенціалі суттєве при концентраціях  $1 \cdot 10^{16} - 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . Пояснити таку поведінку розсіювання електронів на кулонівському потенціалі вакансій можна пояснити малим значенням високочастотної діелектричної сталої  $\epsilon_0$ , яка дорівнює 18,4 для PbS, 25,2 для PbSe та 36,9 для PbTe. Відмінність у два рази між  $\epsilon_0$  у сульфїді та телуриді свинцю і спричинює необхідність врахування цього механізму розсіювання в першому із них.

При кімнатній температурі немає такого концентраційного діапазону, в якому б домінувало виключно розсіювання на вакансіях. Більше того, реалізація цього механізму розсіювання при  $T=300 \text{ К}$  в кристалах телуриду свинцю практично не впливає на явища переносу.

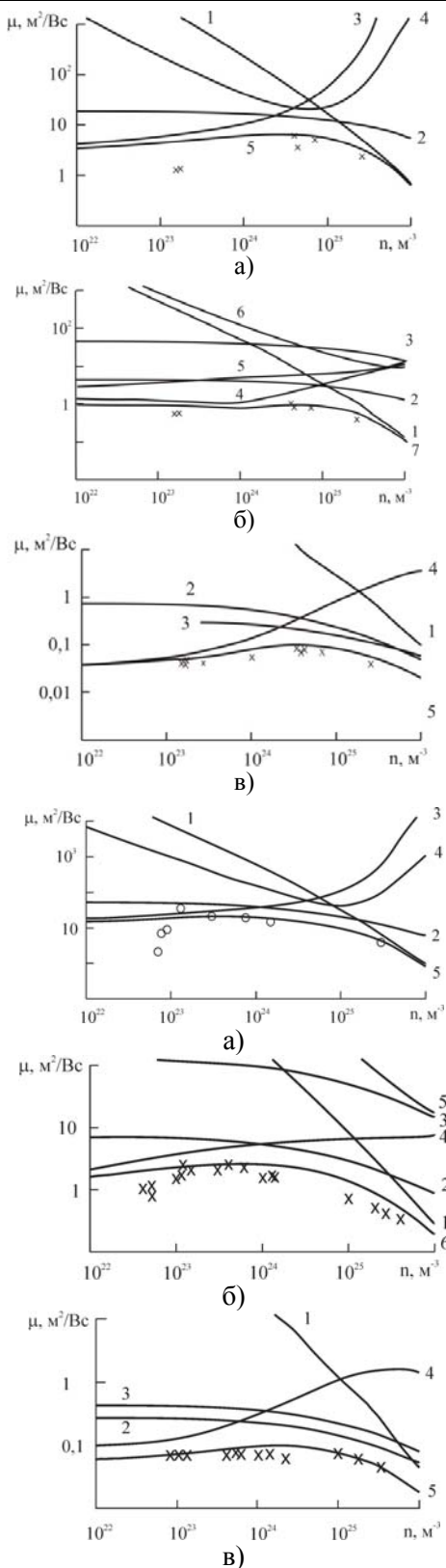


Рис.1. Концентраційні залежності рухливості носіїв заряду кристалів PbS за температур 4,2 К (а), 77 К (б), 300 К (в) для різних механізмів розсіювання носіїв заряду: на кулонівському потенціалі вакансій (а – криві 3, 4, б – криві 5, 6), короткодійному потенціалі вакансій (а, б, в – крива 1), акустичних фонах (а, б, в – крива 2), оптичних фонах (б, в – крива 3, 4) та для сумарного розсіювання (а, в – крива 5, б – крива 7)

Рис. 2. Концентраційні залежності рухливості носіїв заряду кристалів PbSe при температурах 4,2 К (а), 77 К (б), 300 К (в) для різних механізмів розсіювання носіїв заряду: на кулонівському потенціалі вакансій (а – криві 3, 4, б – крива 5), короткодійному потенціалі вакансій (а, б, в – крива 1), акустичних фонах (а, б, в – крива 2), оптичних фонах (б, в – крива 3, 4) та для сумарного розсіювання (а, в – крива 5, б – крива 6)

Розсіювання ж на оптичних фонах, при цьому, найбільш суттєве у кристалах PbS та PbTe і значно слабше у селеніді свинцю, що свідчить про сильну залежність розсіювання на оптичних фонах від ширини забороненої зони  $\epsilon_G$ :  $\epsilon_G(\text{PbSe}) < \epsilon_G(\text{PbTe}) < \epsilon_G(\text{PbS})$ , та сильну непараболічність енергетичних зон.

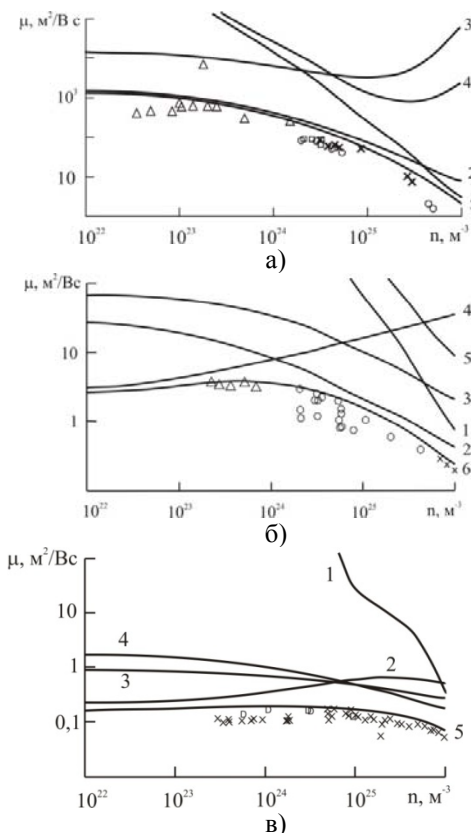


Рис.3. Концентраційні залежності рухливості носіїв заряду кристалів PbTe при температурах 4,2 К (а), 77 К (б), 300 К (в) для різних механізмів розсіювання носіїв заряду: на кулонівському потенціалі вакансій (а – криві 3, 4, б – крива 5), короткодіючому потенціалі вакансій (а, б, в – крива 1), акустичних фонах (а, б, в – крива 2), оптичних фонах (б, в – крива 3, 4) та для сумарного розсіювання (а, в – крива 5, б – крива 6)

Навпаки, розсіювання на акустичних фонах більш сильно проявляється у кристалах PbSe, тоді як у сульфіді та телуридів свинцю цей механізм є домінуючим у вужчій області концентрацій. Така особливість реалізації цього механізму розсіювання свідчить про те, що розсіювання на акустичних фонах, на противагу розсіюванню на оптичних фонах, суттєвіше в кристалах із більшою шириною забороненої зони. Але слід зазначити, що впливи розсіювання на акустичних та на оптичних фонах є співмірними і їх внесок у сумарне розсіювання суттєвий у цілому розглядуваному концентраційному діапазоні при 300 К для всіх кристалів халькогенідів свинцю, причому, розсіювання на акустичних фонах є єдиним видом розсіювання, яким більшою чи меншою мірою можна якісно описати явища переносу в температурному діапазоні 4,2-300 К та в області концентрацій  $10^{16}$ - $10^{20}$   $\text{см}^{-3}$  для кристалів PbTe, PbSe та PbS n-типу провідності.

Проведені розрахунки дали можливість встановити концентраційні границі реалізації та домінування кожного із розглянутих механізмів розсіювання носіїв струму, порівнюючи експериментальні та теоретичні значення рухливості носіїв струму. Однак, існують механізми розсіювання, які не проявляються при аналізі даних щодо рухливості. Так, розрахунок термо-е.р.с. вказав на необхідність суттєвого доповнення проведеного вище аналізу.

Електрон-електронні зіткнення враховувались через розрахунок коефіцієнта термо-е.р.с. Для цього необхідно було визначити значення параметра розсіювання  $r_\alpha$ .

Згідно [15] відношення параметрів розсіювання, визначених із рухливості та термо-е.р.с., дорівнює

$$\frac{r_\alpha}{r_\mu} = \frac{L}{L_0}. \quad (5)$$

Параметр розсіювання  $r_\mu = -\partial \ln \tau / \partial \ln \varepsilon$ ,  $L$  – число Лоренца, універсальна стала  $L_0 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e}\right)^2$  – число Лоренца у законі Відемана-Франца. А відношення  $\frac{L}{L_0}$  знаходиться із виразу

$$\frac{L}{L_0} = \left(1 + \frac{W_{ee}}{W_0}\right)^{-1}. \quad (6)$$

Величину теплового опору  $\frac{W_{ee}}{W_0}$  обчислювали згідно [21]

$$\frac{W_{ee}}{W_0} = \frac{2\pi^4 e^3 (k_0 T)^2 (k_F r_e) \mu n}{\varepsilon_\infty^2 \hbar^3 k_F^3 v_F^4} B \left[ (2k_F r_e)^{-1} \right].$$

Тут  $k_F = \left(\frac{3\pi^2 n}{N}\right)^{1/2}$  – середній квазіімпульс на рівні Фермі;

$$v_F = \left[ \frac{\varepsilon_F \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_G}\right)}{m_0^* \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_G}\right)^2} \right]^{1/2} \quad \text{– швидкість, що відповідає цьому квазіімпульсу;}$$

$$r_e = \left[ \frac{\varepsilon_\infty}{4\pi e^2 \rho(\varepsilon_F)} \right]^{1/2} \quad \text{– радіус екранування; } N \text{ – число еліпсоїдів;}$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2} m_d^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_G}\right) \sqrt{\varepsilon} \quad \text{– густина станів;}$$

$$B(z) = \left(1 + z^2\right) \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} z + \frac{2}{\pi} \frac{z}{1 + z^2}\right) - \frac{4}{\pi} \frac{z^3}{1 + z^2}.$$

Функція  $B(z)$  близька до одиниці при умові  $(2k_F r_e)^{-1} \ll 1$ , яка з

достатньою точністю виконується у розглянутих матеріалах.

Із (5) був отриманий параметр розсіювання, що відповідає електрон-електронним зіткненням:  $r_{\alpha} = 0,8$  [27].

Аналогічні розрахунки по обчисленню внеску міжелектронних зіткнень проводились при температурах 4,2 та 300 К, але відхилення числа Лоренца від універсальної сталої  $L_0 = (\pi/3)(k_0/e^2)$  при цих температурах несуттєве:  $\frac{L}{L_0} = 0,998$  при 4,2 К та  $\frac{L}{L_0} = 0,993$  при 300 К. Звідси можна зробити висновок про можливість нехтування впливом електрон-електронних зіткнень при температурах, відмінних від азотної.

Детальні межі домінування окремих механізмів розсіювання (температурні та концентраційні) наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Концентраційні та температурні межі домінування різних механізмів розсіювання носіїв струму у кристалах халькогенідів свинцю

4,2 К	77 К	300 К
Кулонівський потенціал вакансій		
PbS		
$1 \cdot 10^{16} - 5 \cdot 10^{18}, 10^{18} - 10^{19}$	$1 \cdot 10^{16} - 5 \cdot 10^{17}$	–
PbSe		
$1 \cdot 10^{16} - 2 \cdot 10^{18}, 7 \cdot 10^{18} - 1 \cdot 10^{19}$	–	–
PbTe		
$1 \cdot 10^{17} - 2 \cdot 10^{17}$ (слабко)	–	–
Короткодіючий потенціал вакансій		
PbS		
$1 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20}$	$8 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20}$
PbSe		
$2 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20}$	$8 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20}$
PbTe		
$1 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20}$	$8,5 \cdot 10^{19} - 1 \cdot 10^{20}$	$> 1 \cdot 10^{20}$
Поляризаційний потенціал оптичних фононів		
PbS		
–	$1 \cdot 10^{16} - 8 \cdot 10^{18}$	$1 \cdot 10^{16} - 1 \cdot 10^{18}$
PbSe		
–	$1 \cdot 10^{16} - 8 \cdot 10^{17}$	$1 \cdot 10^{16} - 6 \cdot 10^{17}$
PbTe		
–	$1 \cdot 10^{16} - 8,5 \cdot 10^{17}$	$1 \cdot 10^{16} - 7 \cdot 10^{18}$
Деформаційний потенціал оптичних фононів		
PbS		
–	–	$5 \cdot 10^{18} - 1 \cdot 10^{20}$
PbSe		
–	–	$1 \cdot 10^{19} - 2,5 \cdot 10^{19}$

PbTe		
-	-	$8 \cdot 10^{18} - 1 \cdot 10^{20}$
Деформаційний потенціал акустичних фононів		
PbS		
$5 \cdot 10^{18} - 5 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{16} - 1 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{18} - 1 \cdot 10^{20}$
PbSe		
$1 \cdot 10^{16} - 8 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{17} - 7 \cdot 10^{19}$	$6 \cdot 10^{17} - 1 \cdot 10^{20}$
PbTe		
$1 \cdot 10^{16} - 1 \cdot 10^{20}$	$8 \cdot 10^{17} - 1 \cdot 10^{20}$	-
Електрон-електронне розсіювання		
PbS		
-	-	-
PbSe		
-	-	-
PbTe		
-	$1 \cdot 10^{18} - 1 \cdot 10^{20}$	-

### 3. Результати розрахунків термоелектричних параметрів

#### 3.1. Електропровідність халькогенідів свинцю n-типу провідності.

Питома електропровідність  $\sigma$  визначається із виразу [26]

$$\sigma = en\mu, \quad (7)$$

чи для виродженого випадку

$$\sigma = e^2 n\tau / 2m. \quad (8)$$

Як видно із (8), електропровідність пов'язана із часом релаксації  $\tau$ , а отже, повинна визначатися механізмом розсіювання носіїв струму.

Врахування складної структури енергетичних зон дає наступний вираз для коефіцієнта електропровідності при відсутності зовнішнього магнітного поля [26]

$$\sigma_0 = \sigma_{11}(0) = \frac{e^2}{3\pi^2} \int \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \tau(\varepsilon) \frac{k^3(\varepsilon)}{m(\varepsilon)} d\varepsilon. \quad (9)$$

У вираз (9) входять такі величини, як  $\tau(\varepsilon)$ ,  $k(\varepsilon)$  та  $m(\varepsilon)$ , які визначаються явним виглядом закону дисперсії та механізмами розсіювання носіїв струму. Їх у загальному вигляді можна переписати через співвідношення

$$k(\varepsilon) = \frac{(2m_n \varepsilon)^{1/2}}{\hbar} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_G} \right)^{1/2},$$

$$m(\varepsilon) = m_n \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_G} \right),$$

для пружного розсіювання

$$\tau(\varepsilon) = \tau_{0r}(T) \left( \frac{\varepsilon}{k_0 T} \right)^{r-1/2} \frac{\left( 1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_G} \right)^{r-1/2}}{\left( 1 + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_G} \right)},$$

де  $r$  визначає розсіювання носіїв струму.

Врахування вищезгаданого дає вираз для розрахунку  $\sigma$  [26]:

$$\sigma_0 = \frac{e^2 (2m_n k_0 T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3 m_n} \tau_{0r}(T) \int_0^\infty \left( -\frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \frac{x^m (x + \beta x^2)^n dx}{(1 + 2\beta x)^k}, \quad (10)$$

де  $\beta = \frac{k_0 T}{\varepsilon_G}$  – параметр енергетичної зони,  $x = \frac{\varepsilon}{k_0 T}$  – приведена енергія,

$f_0 = \left[ 1 + e^{x-\eta} \right]^{-1}$ ,  $\eta = \frac{\varepsilon_F}{k_0 T}$ ,  $\varepsilon_F$  – енергія Фермі.

Розрахунок  $\sigma$  спрощується введенням так званих інтегралів Фермі, які протабульовані

$$I_{n,k}^m(\eta, \beta) = \int_0^\infty \left( -\frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \frac{x^m (x + \beta x^2)^n dx}{(1 + 2\beta x)^k}.$$

Отримані таким чином співвідношення дають можливість проаналізувати вплив домінуючих видів розсіювання на провідність у кристалах PbS, PbSe, PbTe.

### 3.2. Концентраційні залежності коефіцієнта термо-е.р.с.

У загальному випадку для виродженого та неvirодженого напівпровідників можна записати наступні вирази для коефіцієнта термо-е.р.с. [28]:

$$\alpha = \frac{\pi^2}{3} \left( r + \frac{3}{2} \right) \frac{k_0}{e} \frac{k_0 T}{\varepsilon_F}, \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{\langle \tau_0 x \rangle}{\langle \tau_0 \rangle} - \frac{\varepsilon_F}{k_0 T} \right), \quad (12)$$

де  $r$  – показник степеня у залежності часу релаксації від енергії,  $k_0$  – стала Больцмана, усереднення слід розуміти, як

$$\langle \alpha \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \alpha(x) x^{3/2} e^{-x} dx.$$

Якщо у напівпровіднику існує кілька видів носіїв струму, то сумарну термо-е.р.с. визначають із виразу [25]:

$$\alpha = \sum_i \alpha_i \frac{\sigma_i}{\sigma}, \quad (13)$$

де  $\sigma$  – сумарна електропровідність,  $\alpha_i$  та  $\sigma_i$  – парціальні коефіцієнти термо-е.р.с. та електропровідності для  $i$ -ого типу носіїв струму. Так, для власного напівпровідника вираз (13) набуде вигляду

$$\alpha = \alpha_n \frac{\sigma_n}{\sigma} + \alpha_p \frac{\sigma_p}{\sigma}, \quad (14)$$



тут індекси  $n$  та  $r$  відповідають електронам та діркам.

Врахування складної зонної структури халькогенідів свинцю та використання моделі Кейна дає наступні вирази для термо-е.р.с. [28]:

$$\alpha = \frac{k_0}{e} \frac{\pi^2}{3} \frac{2k_0 T m_0}{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}} (r+1), \quad (15)$$

$$\alpha = -\frac{k_0}{e} \frac{\pi^2}{3} \frac{2k_0 T m(\zeta)}{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}} \left[ (r+1) - \frac{2\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} m_0}{m^2(\zeta) \varepsilon_G} \right], \quad (16)$$

$r_\alpha$  – показник степеня в загальному виразі для часу релаксації, який визначається механізмом розсіювання;  $m_0$  – маса вільного електрона,  $m(\zeta)$  – маса електронів на рівні Фермі,  $n$  – концентрація вільних носіїв,  $\zeta$  – енергія Фермі;  $m(\zeta)$  визначається співвідношенням

$$m(\zeta) = m_0 \sqrt{1 + \frac{2\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{m_0 \varepsilon_G}}.$$

Вираз (15) відповідає врахуванню квадратичного закону дисперсії зі змінною ефективною масою, а (16), відповідно – неквадратичному закону дисперсії.

Для випадку, коли реалізуються різні механізми розсіювання носіїв одного знаку, сумарний вираз для коефіцієнта термо-е.р.с. обчислювали за формулою

$$\alpha = \sum_i \alpha_i,$$

$i$  – вказує на механізм розсіювання.

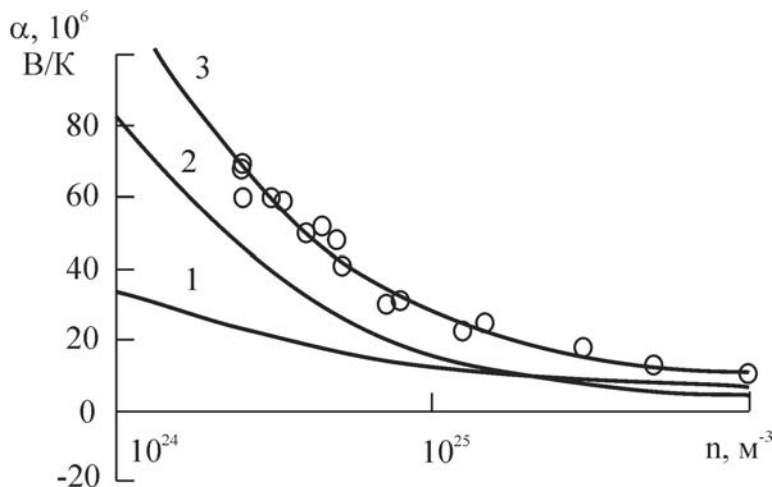


Рис.4. Залежність коефіцієнта термо-е.р.с. від температури для кристалів  $n$ -PbTe при 77 К. 1 – міжелектронне розсіювання, 2 – сумарне врахування всіх видів розсіювання без електрон-електронної взаємодії, 3 – сумарне врахування всіх видів розсіювання з електрон-електронною взаємодією. Експеримент: а – наші дані, б – [7]

3.3. Розрахунок граткової та електронної складових коефіцієнта теплопровідності

Теплопровідність напівпровідників визначається різними механізмами переносу тепла [2,28-30]:

$$\chi = \chi_e + \chi_{гр} + \chi_{фт} + \chi_b, \tag{17}$$

тут  $\chi_e$  – електронна,  $\chi_{гр}$  – граткова,  $\chi_{фт}$  – фотонна і  $\chi_b$  – біполярна складові. Завдяки відносно малому значенню ширини забороненої зони РbТе внесок біполярної дифузії слід враховувати від 300-350 К, фотонна складова теплопровідності при досліджуваних температурах ще менша. Тому (17) можна переписати у вигляді

$$\chi = \chi_e + \chi_{гр} \tag{18}$$

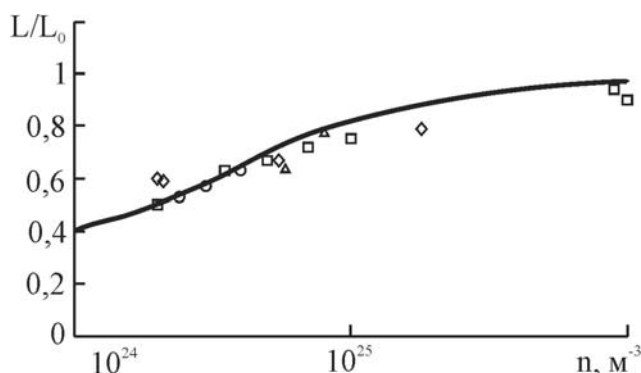


Рис.5. Відхилення числа Лоренца  $L$  від універсальної сталої  $L_0$  для кристалів n-PbTe при 77 К. Експериментальні значення згідно [7]

Вимірювання теплопровідності у сильному магнітному полі є простим та надійним способом розділення теплопровідності на граткову ( $\chi_{гр} = \chi_\infty$ ) та електронну ( $\chi_{ел} = \chi_0 - \chi_\infty$ , де  $\chi_0$  – повна теплопровідність, виміряна при відсутності магнітного поля).

Розрахунок електронної складової проводився згідно закону Відемана-Франца

$$\chi_e = L \sigma T,$$

де  $L$  – число Лоренца, яке для невироджених напівпровідників визначається із виразу  $L = (r + 2)(k_0 / e)^2$ ,  $r$  – параметр розсіювання, який є показником степеня у залежності довжини вільного пробігу від енергії,  $k_0$  – стала Больцмана,  $e$  – заряд електрона,  $\sigma$  – коефіцієнт електропровідності,  $T$  – температура.

Граткову складову теплопровідності знаходили із виразу для коефіцієнта термо-е.р.с. [7]

$$\alpha = 2 \frac{k_0}{e} \left( 1 + \frac{\chi_e}{\chi_{гр}} \right). \tag{19}$$

Коефіцієнт термо-е.р.с. для випадку квадратичного і неквадратичного законів дисперсії визначали, відповідно, із виразів (15) (16).

Коефіцієнт електропровідності  $\sigma$  визначали із рухливості носіїв струму у наближенні часу релаксації.

Результати проведених розрахунків для кристалів халькогенідів свинцю n-типу провідності наведено на рис.6-7.

Побудовані теоретичні криві базуються на отриманих вище концентраційних залежностях коефіцієнтів електропровідності  $\sigma$  та термо-е.р.с.  $\alpha$  і враховують механізми розсіювання, які мають місце у досліджуваних кристалах.

#### 4. Оптимізація

Термоелектрична потужність  $\alpha^2\sigma$  є однією із найбільш важливих характеристик, які визначають придатність матеріалу для застосування його в термоелектриці.

Використання саме напівпровідникових матеріалів дозволяє в значній мірі керувати термоелектричними параметрами матеріалів і реалізувати умови при яких їх співвідношення сприяють збільшенню добротності  $ZT$  до максимальних значень.

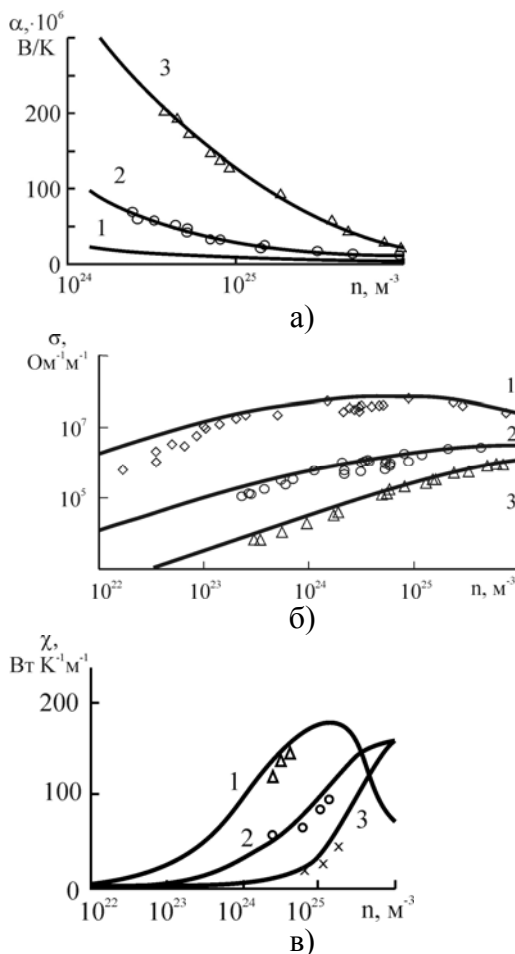


Рис.6. Концентраційні залежності коефіцієнтів термо-е.р.с. (а), питомої електропровідності (б) та теплопровідності (в) кристалів n-PbTe при температурах  $T, K$ : 4,2 – 1, 77 – 2, 300 – 3. Криві – розрахунок;  $\Delta$ ,  $o$ ,  $x$  – експеримент [28]

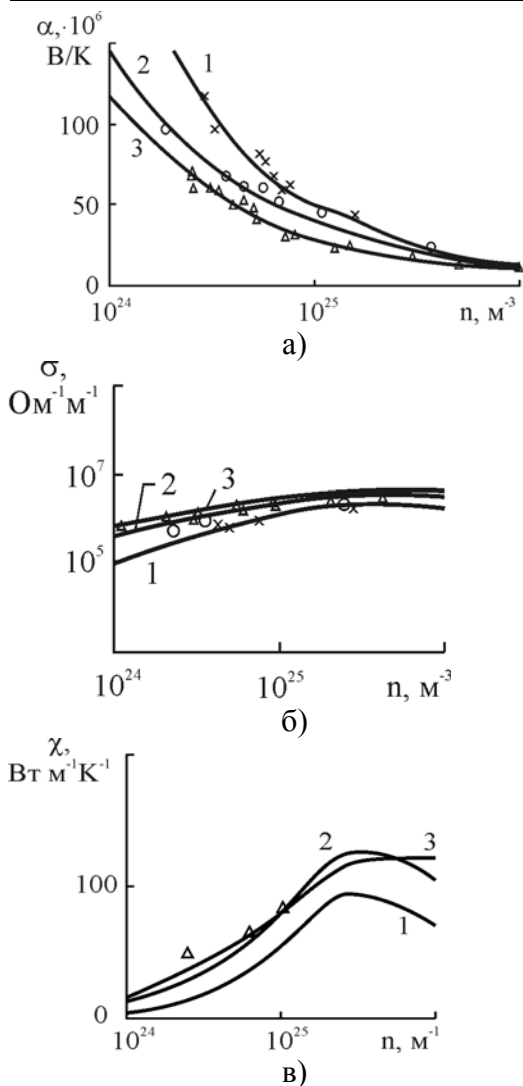


Рис.7. Концентраційні залежності коефіцієнтів термо-е.р.с. (а), питомої електропровідності (б) та теплопровідності (в) кристалів PbS (1), PbSe (2) та PbTe (3) n-типу провідності при температурі 77 К.  $\Delta$ , о, х – експеримент [30]

Оскільки, добротність  $Z$  має розмірність  $\text{K}^{-1}$ , часто використовують безрозмірну добротність  $ZT$ . Добротність  $ZT$  є стандартною мірою термоелектричної ефективності матеріалу.  $ZT$  безпосередньо пов'язана із ефективністю перетворення енергії  $\eta$ : вищі значення  $ZT$  призводять до більш ефективного перетворення енергії.

Добротність  $Z$  вказує на можливості визначення потенційно ефективних термоелектричних матеріалів. Зручною для практичного використання є безрозмірна добротність  $ZT$ , де  $T$  – температура. Для спрощеної теоретичної моделі, яка враховує параболічні зони та одну сферичну долину,  $ZT$  можна записати у вигляді [31]:

$$ZT = \frac{\left( \left( s + \frac{5}{2} \right) - \xi \right)^2}{\left( s + \frac{5}{2} \right) + (\beta \exp(\xi))^{-1}}, \quad (20)$$

де  $\beta$  визначається згідно виразу:

$$\beta = 5,74 \cdot 10^{-6} T^{3/2} \left( \frac{m^*}{m_0} \right)^{3/2} \frac{\mu}{\lambda_L},$$

$\xi$  – енергії Фермі в одиницях  $k_B T$  ( $E_F/k_B T$ ),  $s$  – параметр розсіювання;  $m^*$ ,  $m_0$ ,  $\mu$ ,  $\lambda_L$ ,  $k_B$  – ефективна маса, маса вільного електрона, рухливість носіїв заряду, граткова складова теплопровідності та стала Больцмана, відповідно.  $\beta$  також використовують в якості індикатора ефективності термоелектричного матеріалу. При строгих теоретичних розрахунках  $Z$  набуває досить складної математичної форми, яка враховує еквівалентні долини, можливі міждолинні механізми розсіювання та розсіювання всередині самої долини, непараболічну природу енергетичних зон носіїв заряду, а також внески неосновних носіїв.

Таким чином, добрі термоелектричні матеріали володіють високим коефіцієнтом термоелектричної потужності ( $S^2\sigma$ ) та низькою теплопровідністю. Існуючі теоретичні дослідження та експериментальні результати показали, що деякі напівпровідники добре відповідають поставленим до термоелектричних матеріалів вимогам [32]. Недавні дослідження в термоелектриці були зосереджені, в основному, на оптимізації роботи цих термоелектричних матеріалів [19,33-36].

Теплопровідність ґратки можна зменшити без різкого пониження коефіцієнта термоелектричної потужності. Існує підхід, який полягає в збільшенні коефіцієнта потужності через регулювання густини електронних станів (DOS) з використанням низькорозмірних ефектів квантових обмежень у таких матеріалах, як надґратки квантових точок, нанонитки та квантові ями [14,37]. Сучасні дослідження показали, що завдяки включенню наночастинок у сплави на основі халькогенідів свинцю, можна суттєво понизити теплопровідність, що призводить до покращення ZT.

Як було показано вище,  $z = z(\mu, \beta, \tau)$ . З виразу видно, що при фіксованій температурі значеннями  $Z$  можна керувати шляхом зміни рівня хімічного потенціалу  $\beta$ , рухливості носіїв струму, ефективної маси і параметра розсіювання, який залежить від механізму розсіювання носіїв струму, а також значно збільшити безрозмірну термоелектричну добротність кристалічних напівпровідників, використовуючи для цього класичні методи створення оптимальних концентрацій носіїв струму та збільшення внеску фононного розсіювання. Промислове застосування знайшли матеріали на основі систем Bi-Te, Pb-Te, Ge-Si, у яких значення добротності ZT дещо нижчі, ніж отримані в лабораторіях.

Враховуючи наведені вище міркування, для розв'язання конкретних прикладних задач можна вибрати термоелектричний матеріал з оптимальними властивостями.

Для отримання високих значень термоелектричної добротності необхідні високі значення термо-е.р.с., питомої електропровідності та найнижчі значення коефіцієнта теплопровідності.

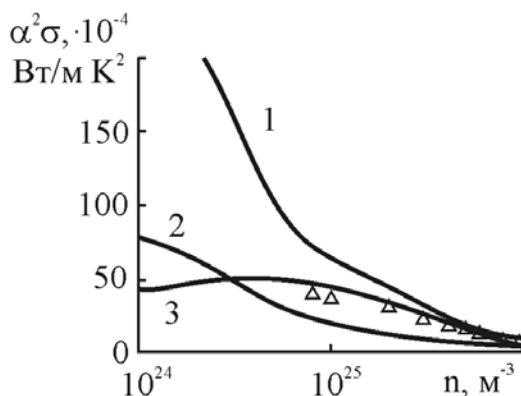


Рис.8. Термоелектрична потужність телуриду свинцю для 4,2 К (1), 77 К (2) та 300 К (3). Криві – розрахунок, точки – експеримент при 300 К

На перший погляд, така картина є дивною, адже відомо, що саме РbТе є затребуваним промисловим матеріалом. Тому тут слід звернути увагу на дві деталі. По перше, розглядуваний у статті температурний діапазон не є діапазоном промислового використання халькогенідів свинцю для термоелектрики. При вказаних температурах «термоелектричними» вважаються сполуки на основі  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ,  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ . Солі свинцю для цих температур, окрім суто побудови теоретичної моделі, детально вивчали ще й з причини їх практичного використання за вказаних умов як активних елементів для пристроїв ІЧ-техніки [17]. А, по друге, телурид свинцю, як це впливає із отриманих даних (рис.8, табл.2), більш різко, у порівнянні із іншими халькогенідами свинцю, покращує свої термоелектричні властивості із ростом температури.

Аналогічним чином, змінюючи склад, можна регулювати концентрацію йонізованих вакансій, що дозволить збільшити чи зменшити, відповідно до потреб, ефективність розсіювання на вакансіях. Така ж ситуація виникає і при аналізі розсіювання вільних носіїв на коливаннях кристалічної ґратки.

Залежність різних коефіцієнтів від впливів механізмів розсіювання носіїв струму добре було видно на концентраційних залежностях рухливості (рис.3), електропровідності, термо-е.р.с., теплопровідності (рис.6), термоелектричної потужності (рис.8), добротності (табл.2). Зміна у значенні хоча б одного з переважаючих механізмів розсіювання призведе до суттєвої зміни всіх вище перелічених величин, а отже, властивості матеріалу при цьому будуть уже іншими.

Сучасні технології дають можливість плавно керувати властивостями напівпровідникових матеріалів. Тому детальний аналіз дозволяє вибором технологічних процесів (керуванням концентрацією вакансій, легуванням, створення твердих розчинів, тощо) створити матеріали із домінуванням наперед заданих видів розсіювання для їх прогнозованого використання у якості ефективних приладових структур електроніки.

Таблиця 2. Розраховані значення безрозмірної термоелектричної добротності  $ZT$  для кристалів  $PbS$  ( $Se$ ,  $Te$ )

Концентрація, $M^{-3}$	Матеріал								
	PbS			PbSe			PbTe		
	Температура								
	4,2 К	77 К	300 К	4,2 К	77 К	300 К	4,2 К	77 К	300 К
$2,5 \cdot 10^{24}$	0,016	0,07	0,5	0,008	0,17	1,2	0,005	0,12	1,33
$5 \cdot 10^{24}$	0,007	0,02	0,07	0,004	0,08	0,83	0,003	0,045	0,7
$1 \cdot 10^{25}$	0,003	0,004	0,001	0,002	0,04	0,29	0,002	0,02	0,35
$2,5 \cdot 10^{25}$	0,003	0,0004	0,002	0,001	0,015	0,07	0,001	0,007	0,11

Збільшення  $Z$  можна досягти за рахунок збільшення відношення рухливості до теплопровідності. Збільшення  $\mu/\chi$  чи  $\sigma/\chi$  можна досягти введенням нейтральних домішок. При такому легуванні концентрація носіїв залишається незмінною, розсіювання фононів може зростати швидше, ніж розсіювання електронів, тому  $\sigma/\chi$  повинно зрости. Можна зменшити також коефіцієнт теплопровідності введенням йонізованих домішок; додаткове розсіювання фононів можна спостерігати при розсіюванні на різного типу інших дефектах ґратки (дислокаціях, вакансіях та ін.), тобто, при використанні полікристалічних матеріалів. Однак, найбільший ефект можна досягнути при введенні ізовалентних атомів заміщення. В цьому випадку утворюються ізоморфні тверді розчини, що не приводить до суттєвих змін спектру носіїв струму і рухливості, але через велику концентрацію ізовалентних атомів зростає розсіювання фононів і значно зменшується коефіцієнт теплопровідності. В твердих розчинах довжина вільного пробігу фононів може зменшитися до кількох міжатомних відстаней і теплопровідність відповідно зменшиться до теплопровідності аморфних речовин. Наприклад, для складу 50%  $PbTe$  - 50%  $PbSe$  вдалося зменшити теплопровідність порівняно з  $PbTe$  у 2,5 рази. Добротність таким способом можна збільшити в 1,5-2 рази [34].

Аналіз концентраційних залежностей термоелектричної потужності  $\alpha^2\sigma$  показує, що сульфід та селенід свинцю мають дещо схожий між собою концентраційний характер. Значення ж  $\alpha^2\sigma$  для  $n$ - $PbTe$  суттєво відрізняються як кількісно, так і якісно. Причому, може скластися враження, що із збільшенням температури серед всіх халькогенідів свинцю погіршуються параметри саме у телуриді свинцю. Однак, тут потрібно звернути увагу на те, що величини  $\alpha$  і  $\sigma$  взаємопов'язані між собою. А кінцева ефективність матеріалу для термоелектрики визначається значеннями добротності. Тому, окрім  $\alpha^2\sigma$  потрібно враховувати ще й коефіцієнт теплопровідності  $\chi$ . Взаємне врахування всіх цих трьох величин призводить до отримання досить складної сумарної залежності для добротності. Тобто, значення  $ZT$  не відповідає навіть якісно концентраційним змінам термоелектричної потужності. Так, наприклад, якщо криві, що описують зміну  $\alpha^2\sigma$  для  $PbSe$  та  $PbS$  майже співпадають, то враху-

вання ще й  $\chi$  призводить до того, що  $ZT$  для  $PbSe$  при температурі 77 К і вище, перевищує  $ZT$  для  $PbS$  більше, ніж вдвічі.

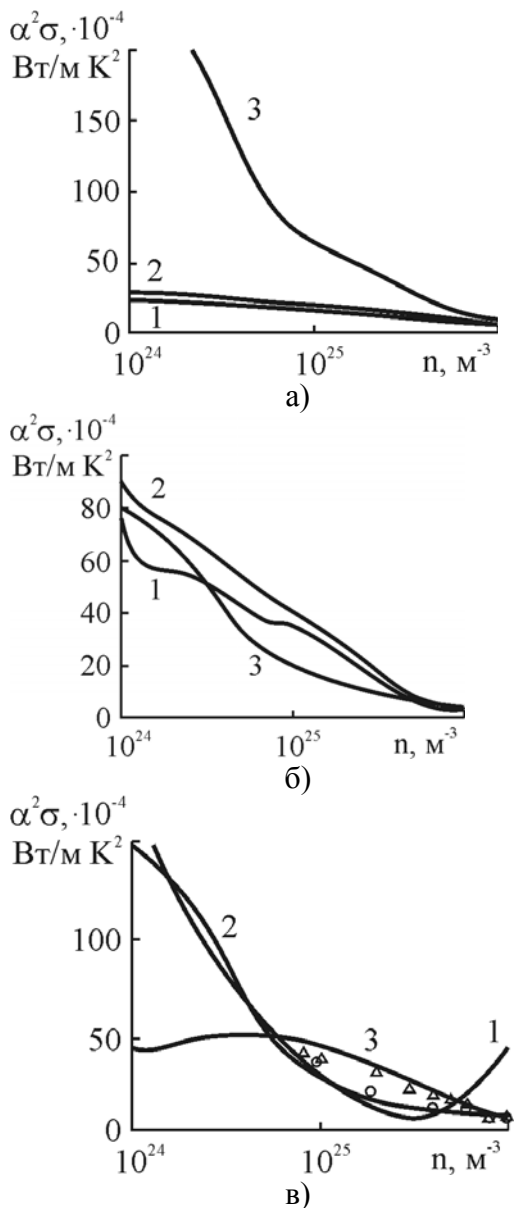


Рис.9. Концентраційні залежності коефіцієнта термоелектричної потужності кристалів  $PbS$  (1),  $PbSe$  (2) та  $PbTe$  (3) при температурах  $T$ , К: 4,2 (а), 77 (б), 300 (в). Криві – розрахунок; експеримент:  $\Delta$  –  $PbTe$ ,  $\circ$  –  $PbSe$

Навпаки,  $PbTe$ , який демонстрував найкращі значення  $\alpha^2 \sigma$  при 4,2 К, показав при цій температурі найнижчі значення добротності.

Аналіз табл. 2 вказує, що при 4,2 К найвищі значення  $ZT$  спостерігаються для кристалів  $PbS$ , при 77 К – для  $PbSe$  і при 300 К – для  $PbTe$ .

Як було вже відзначено вище, така ж закономірність спостерігається і при зміні діелектричної сталої цих сполук. Однак, навіть для якісного пояснення зміни  $ZT$  з температурою чи концентрацією носіїв не



можна обмежуватися лише одним характером зміни діелектричної сталої  $\epsilon_0$ . Потрібно використовувати комплексний підхід, який враховує і зміну  $\epsilon_0$ , і зміну ширини забороненої зони, і наявність певної концентрації вакансій (як іонізованих, так і нейтральних) тощо. Найбільш чітко і системно весь комплекс вказаних величин враховує аналіз механізмів розсіювання носіїв заряду, які сьогодні можна достатньо точно задавати технологічними умовами отримання.

Навпаки, PbTe, який демонстрував найкращі значення  $\alpha^2\sigma$  при 4,2 К, показав при цій температурі найнижчі значення добротності.

Аналіз табл. 2 вказує, що при 4,2 К найвищі значення ZT спостерігаються для кристалів PbS, при 77 К – для PbSe і при 300 К – для PbTe.

Як було вже відзначено вище, така ж закономірність спостерігається і при зміні діелектричної сталої цих сполук. Однак, навіть для якісного пояснення зміни ZT з температурою чи концентрацією носіїв не можна обмежуватися лише одним характером зміни діелектричної сталої  $\epsilon_0$ . Потрібно використовувати комплексний підхід, який враховує і зміну  $\epsilon_0$ , і зміну ширини забороненої зони, і наявність певної концентрації вакансій (як іонізованих, так і нейтральних) тощо. Найбільш чітко і системно весь комплекс вказаних величин враховує аналіз механізмів розсіювання носіїв заряду, які сьогодні можна достатньо точно задавати технологічними умовами отримання.

Як видно із рис.9 та табл.2, PbTe значно чіткіше демонструє стабільність та прогнозованість своїх параметрів. Цей висновок добре узгоджується із сучасними даними, про які йшлося у вступі до цієї статті.

### Висновки

1. Встановлені концентраційні та температурні межі домінування механізмів розсіювання носіїв заряду, які мають місце у халькогенідах свинцю: на кулонівському потенціалі вакансій, деформаційному потенціалі оптичних фононів, деформаційний потенціал акустичних фононів, поляризаційний потенціал оптичних фононів, а також міжелектронного розсіювання.

2. Виконано експериментальні дослідження коефіцієнтів явищ переносу (рухливість  $\mu$ , термо-е.р.с.  $\alpha$ , питома електропровідність  $\sigma$ , теплопровідність  $\chi$ , термоелектрична потужність  $\alpha^2\sigma$ , добротність  $Z$ , безрозмірна добротність  $ZT$ ) та здійснено їх теоретичний розрахунок з врахуванням домінуючих механізмів розсіювання носіїв струму в кристалах халькогенідів свинцю n-типу провідності.

3. Показано, що вибором переважаючого, або кількох механізмів, розсіювання можна оптимізувати основні термоелектричні параметри матеріалу для їх прогнозованого використання у приладових структурах.

*Література*

1. Handbook of Thermoelectrics / D.M. Rowe – 1995. – 701 p.
2. Фреїк Д.М. Физика и технология полупроводниковых пленок / Д.М.Фреїк, М.А.Галушак, Л.И.Межиловская – Львов: Изд-во Львовского университета, 1988. – 152 с.
3. Фреїк Д.М. Напівпровідникові тонкі плівки – сучасний стан (огляд) / Д.М. Фреїк, В.М. Чобанюк, Л.І.Никируй // Фізика і хімія твердого тіла. – 2006. № 3. – С. 405-417.
4. Термоэлектричество в России: История и современное состояние / Л.П.Булат, Е.К.Иорданишвили, А.А.Пустовалов, М.И.Федоров // Термоэлектричество – 2009. №4. С.7-31
5. Technology of chalcogenide thermoelements Chapter 1. Structure and properties of materials / Journal of Thermoelectricity – 2000. – №3. – P. 29-44.
6. Дашевский З. Термоэлектричество в халькогенидах свинца (глава в книге «Физика и применение полупроводников IV-VI групп») / З.Дашевский. – Под ред. Д.Хохлова. Гордон & Брич, 2002.
7. Равич Ю.И. Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца PbSe, PbTe, PbS. / Ю.И. Равич, Б.А. Ефимова, И.А. Смирнов. –М.: Наука, 1968. – 384 с.
8. Lead Chalcogenides: Physics and Applications (Optoelectronic Properties of Semiconductors and Superlattices). – ed. by D.Khokhlov, Taylor & Francis, 2002. – 720 p.
9. Абрикосов Н.Х. Полупроводниковые материалы на основе соединений  $A^{IV}B^{VI}$  / Н.Х.Абрикосов, Л.Е.Шелимова. – М.: Наука, 1975. – 195 с.
10. Анатычук Л.И. Термоэлементы и термоэлектрические устройства: Справочник. / Л.И. Анатычук. – К.: Наукова думка, 1979. – 676 с.
11. Lopez-Otero A. The use of a phase diagram as a guide for the growth of PbTe films / A. Lopez-Otero // Appl. Phys. Lett. – 1975. – N8. – P. 470-472.
12. Dalven R. Energy-Gap Anomaly in the Semiconductor Sequence PbS, PbSe and PbTe / R. Dalven // Phys. Rev. B. – 1971. – № 10. – P. 3359-3367.
13. Волков Б.А. Электронная структура точечных дефектов в полупроводниках  $A^{IV}B^{VI}$  / Б.А.Волков, О.А.Панкратов // ЖЭТФ. – 1985. – № 1. – С. 280-293.
14. Enhancement of Thermoelectric Efficiency in PbTe by Distortion of the Electronic Density of States / J.P.Heremans, V.Jovovic, E.S.Toberer, A.Saramat, K.Kurosaki, A.Charoenphakdee, S.Yamanaka, G.J.Snyder. // Science. – 2008. – № 5888, P. 554-557.
15. Заячук Д.М. К вопросу о доминирующих механизмах рассеяния в теллуриде свинца / Д.М. Заячук // ФТП. – 1997. – № 2. – С. 217-220.
16. Заячук Д.М. Власні дефекти та електронні процеси в  $A^{IV}B^{VI}$  / Д.М.Заячук, В.А.Шендеровський // Укр. фіз. журн. – 1991. – № 11. – С. 1692-1713.

17. Особенности рассеяния носителей тока в узкощелевых полупроводниках / Ф.Ф.Сизов, Г.В.Лашкарев, М.В.Радченко, В.Б.Орлецкий, Е.Т.Григорович // ФТП. – 1976. – № 6. – С. 1801-1808.
18. Weak electron-phonon coupling contributing to high thermoelectric performance in n-type PbSe / H.Wang, Y.Pei, A.D.LaLonde, G.J.Snyder // Proceeding of the NAS of the USA. – 2012. – № 25. – P. 9705–9709.
19. Lead telluride alloy thermoelectrics / A.D.LaLonde, Yanzhong Pei, Heng Wang, and G.J.Snyder // Materials today. – 2011. – № 11. – P. 526–532.
20. Зонна структура, механізми розсіювання та кінетичні явища у кристалах n-PbTe / Д.М.Фреїк, М.О.Галушак, Л.І.Никируй, В.М.Кланічка, В.М.Шперун // УФЖ. – 2001. – № 4. – С. 499-502.
21. Влияние механизмов рассеяния и зонной структуры на термоэлектрические свойства монокристалов халькогенидов свинца / Д.М.Фреик, Л.И.Никируй, В.М.Кланічка, В.М.Шперун, И.Петкович // Термоэлектричество. – 2001. – № 4. – С. 45-52.
22. Фреїк Д.М. Досягнення і проблеми термоелектрики 1. Історичні аспекти (Огляд) / Д.М.Фреїк, Л.І.Никируй, О.С.Криницький // Фізика і хімія твердого тіла. – 2012. – № 2. – С. 297-318.
23. Таиров Ю.М. Технология полупроводниковых и диэлектрических материалов / Ю.М.Таиров, В.Ф.Цветков. – М.: Высшая школа, 1983. – 271 с.
24. Zoutendyk Z.R. Diffusive-convective physical vapor transport of PbTe from a Te-rich solid source / Z.R.Zoutendyk, W.Akutagawa // J.Cryst. Growth. – 1982. – N. 2. – P. 245-253.
25. Абрикосов Н.Х. Полупроводниковые халькогениды и сплавы на их основе / Н.Х.Абрикосов, В.Ф.Банкина, Л.В.Порецкая. – М.: Наука, 1975. – 219с.
26. Зеегер К. Физика полупроводников / К. Зеегер. – М.: Наука, 1977. – 615 с.
27. Електрон-електронне розсіювання носіїв у кристалах халькогенідів свинцю n-типу / Д.М.Фреїк, Л.І.Никируй, В.В.Нижникевич // Вісник Прикарпатського університету. Фізика. Математика. – 2001. – № 2. – С. 71-78.
28. Термоелектричні властивості легованого телуриду свинцю PbTe:Bi(Sb) / Л.І.Никируй, Р.О.Дзумедзей, М.О.Галушак, Т.П.Гевак, Ю.В.Бандура // Фізика і хімія твердого тіла. – 2011. – № 3. – С. 589-593.
29. Кроткус А. Электропроводность узкощелевых полупроводников / А.Кроткус, З.Добровольскис. – Вильнюс: Мокслас, 1988. – 174 с.
30. Теплопровідність легованих кристалів PbTe:Bi(Sb). Теоретичні основи та розрахунок / Л.І.Никируй, Р.О.Дзумедзей, Ю.В.Бандура, Т.П.Гевак, // Фізика і хімія твердого тіла. – 2011. – № 4. – С. 882-887.
31. Шперун В.М. Термоелектрика телуриду свинцю та його аналогів / В.М.Шперун, Д.М.Фреїк, Р.І.Запужляк. – Івано-Франк.: Плай, 2000. – 250 с.
32. Zheng J.-C. Recent advances on thermoelectric materials / J.-C.Zheng // *Front. Phys. China*. – 2008. – № 3. – P. 269–279.

33. Yan-Ling Pei Electrical and thermal transport properties of Pb-based chalcogenides: PbTe, PbSe and PbS / Pei Yan-Ling, Liu Yong // Journal of Alloys and Compounds. – 2012. – № 40. – P. 514.
34. Qian Zhang Heavy Doping and Band Engineering by Potassium to Improve the Thermoelectric Figure of Merit in p-Type PbTe, PbSe and PbTe<sub>1-y</sub>Se<sub>y</sub> / Zhang Qian, Cao Feng, Liu Weishu, Lukas Kevin, Yu Bo, Chen Shuo, Opeil Cyril, Broido David, Chen Gang, Ren Zhifeng // Journal of the American Chemical Society. – 2012. – № 24. – P. 10031.
35. Steven N. Girard Analysis of Phase Separation in High Performance PbTe–PbS Thermoelectric Materials / N.Girard Steven, Schmidt-Rohr Klaus, C.Chasapis Thomas, Hatzikraniotis Euripides, B.Njelic, E.M.Levin, A.Rawal, M.Paraskevopoulos Konstantinos, G.Kanatzidis Mercuri // Advanced Functional Materials. – 2013. – № 3. – P. 23.
36. Heng Wang, Eugen Schechtel, Yanzhong Pei, G. Jeffrey Snyder, High Thermoelectric Efficiency of n-type PbS / Wang Heng, Schechtel Eugen, Pei Yanzhong, G. Jeffrey Snyder // Advanced Energy Materials. – 2013. – № 3. – P. 1.
37. Pei Yanzhong Combination of large nanostructures and complex band structure for high performance thermoelectric lead telluride / Yanzhong Pei, Nicholas A. Heinz, Aaron LaLonde, G. Jeffrey Snyder // Energy & Environmental Science. – 2011. – № 4. – P. 3640.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 12.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.х.н., професором Фреїком Д.М.,  
д.ф.-м.н., професором Стасюком З.В. (м. Львів)*

## CALCULATION AND OPTIMIZATION THERMOELECTRIC PARAMETERS OF COMPOUNDS IV-VI (REVIEW)

**R. O. Dzumedzey**

*Vasyl Stefanyk Precarpatian National University;*

*76018, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;*

*e-mail: kepa@nashemisto.if.ua*

*Detailed analysis of methods for calculating thermoelectric parameters. Established temperature ranges dominance of different types of scattering in pure crystals of compounds IV-VI (PbS, PbSe, PbTe). The theoretical calculation of the thermoelectric parameters: mobility  $\mu$ , Seebeck coefficient  $\alpha$ , electrical conductivity  $\sigma$ , thermal conductivity  $\chi$ , thermoelectric power  $\alpha^2\sigma$ , figure of merit  $Z$ , dimensionless figure of merit  $ZT$ . Particular attention is paid to ways of optimizing the main parameters of the thermoelectric material for their projected use.*

**Key words:** *mobility, electrical conductivity, Seebeck coefficient, thermal conductivity, thermoelectric power, thermoelectric figure of merit.*

## ОСОБЛИВОСТІ ПРОЕКТУВАННЯ СЛУХОВИХ АПАРАТІВ НА ІНТЕГРАЛЬНІЙ ЕЛЕМЕНТНІЙ БАЗІ

**С. П. Новосядлий, Л. В. Мельник**

*Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника;  
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;  
тел. (0342) 71-48-48; e-mail: [kre@pu.if.ua](mailto:kre@pu.if.ua)*

*Основне призначення слухового апарату (СА) полягає в перетворенні сигналу, який отримується джерелом звукової інформації, таким чином, щоб цей сигнал міг сприйнятися людиною з поганим слухом із достатньо високим ступенем слухового відчуття. Більша частина людей використовують СА для прослуховування мовних сигналів. В ряді випадків СА знаходить своє застосування як засіб послаблення поганих відчуттів від вушного шуму. Перетворення акустичного сигналу, що здійснюється СА, можуть мати різний характер. В найпростішому випадку – це підсилення звуків. В багатьох практичних випадках підсилення може супроводжуватись низько- або високочастотною фільтрацією, заданим обмеженням динамічного діапазону підсилювального сигналу. Існують СА з нелінійним перетворенням амплітудно-частотного спектру вхідного сигналу, антишумовою обробкою суміші сигнал-шум, паралельною обробкою сигналу в декількох частотних діапазонах. Для якісного СА важливими є стабільність частотного спектру, величина і стабільність напруги живлення (потужності споживання) та мінімальні габарити. Ці питання лежать в основі даної статті, що присвячена особливостям конструкторсько-схемотехнічного проектування СА на інтегральній елементній базі.*

**Ключові слова:** *звукова інформація, акустичний сигнал, амплітудно-частотна характеристика, спектр, слуховий апарат.*

### **Вступ**

Узагальнена структурна схема слухового апарату (СА) наведена на рис.1. Вхідний сигнал може бути акустичним або електромагнітним. У відповідності з такою схемою перетворювачі вхідного сигналу – це мікрофон або котушка індуктивності. Крім цього, СА часто має ще електричний вхід, через який вхідний сигнал (для приладу, з виходу підсилювача звукової частоти телевізора або іншої побутової техніки) може через кабельний перехідний пристрій подаватись безпосередньо на блок обробки сигналів. Як вхідний перетворювач використовується телефон або кістковий вібратор. Це залежить від того, для якого виду звукопроведення (повітряного чи кісткового) призначений СА. Звуковий сигнал, який формується телефоном, вводиться певним способом у вухо люди-

ни. Механічні коливання, що спотворюються кістковим вібратором, через сосковий перехідник передаються в область середнього і внутрішнього вуха, де і створюються слухові відчуття.

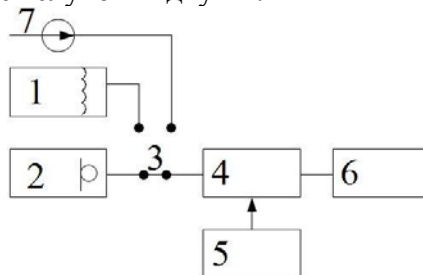


Рис.1. Функціональна структурна схема слухового апарату (СА): 1,2 – перетворювачі вхідного сигналу; 3 – перемикач; 4 – блок обробки сигналу; 5 – блок живлення; 6 – вихідний перетворювач сигналу; 7 – електричний вхід

Режими роботи СА від мікрофона є, як правило, основним і дозволяє безпосередньо сприймати голос співрозмовника та навколишні звуки, важливі для користувача СА. Можливість перемикання у режим від індуктивної котушки дає змогу людині зі слабким слухом вести телефонні перемовини, слухати без завад звуковий супровід під час перегляду фільмів у кінотеатрах чи телевізійних передач. Крім цього, режим роботи СА від індукційної котушки широко використовується під час занять на лекціях, чи в класах. Тут принцип передачі сигналів базується на індуктивному зв'язку між джерелом сигналу та індуктивною котушкою.

Під час проектування сучасних СА конструктор повинен вирішити такі завдання:

1) розробити оптимальну механічну конструкцію апарату і його складових частин з акустичними елементами для електроакустичних перетворювань, які за мінімальних розмірів апарату забезпечують стабільну роботу та високі естетично-ергономічні показники;

2) розробити стабільну, низькошумову і економічну електричну шину апарату з мінімальним числом радіоелементів;

3) розробити мініатюрні електроакустичні перетворювачі. Це досить складне завдання, бо сьогодні в світі виробництво високоякісних електричних мікрофонів і електромагнітних телефонів для СА зосереджено в декількох фірмах США, Німеччини та Франції.

СА поділяються на чотири основних види, які відрізняються за конструктивним виконанням, а, отже, місцем розташування на тілі хворого: заушні, внутрівушні, кишенькові та слухові апарати в окулярній оправі. Номенклатура СА, що сьогодні випускаються у світі, за станом виробництва розподіляється наступним чином: заушні – 70-80%, внутрівушні – 15-20%, кишенькові – 5-10% і в окулярній оправі – 1-2%.

Специфічною особливістю СА є тісний взаємозв'язок між електроакустичними параметрами апаратів, елементами конструкторсько-технологічними аспектами, пов'язаними з їх розробкою та серійним виробництвом. Це зумовлено тим, що СА відносяться до мініатюрних електроакустичних пристроїв, які характеризуються значним діапазоном підсилення звуку, частковою стабілізацією, мінімальними габаритами. Крім цього, частотні характеристики СА залежить не тільки від форми ЧХ мікрофону і телефону, електричних компонентів схеми підсилення, але і від конструкторського рішення СА з мінімальними допусками та від розміщення елементів.

Найбільш поширене використання отримав заушний СА – конструкція дугоподібної форми, яка розміщується за вушною раковиною (рис.1). Конструкції даних заушних СА передбачають можливість підключення відносно мікрофона, який з'єднується з апаратом кабелю довжиною 1-1,5 м, що закінчується спеціальним рознімачем. Це дозволяє значно підвищити співвідношення сигнал/шум. Як джерело живлення в заушних СА застосовують дешеві акумулятори, срібло-цинкові, ртутно-цинкові елементи. Нами планувались літєві джерела живлення-акумулятори. Мінімізація подання звуку від телефону в мікрофон досягаються такими технічними прийомами :

- 1) Мікрофон (М) і телефон (Т) закріплюються безпосередньо до корпусу СА через гумові амортизатори;
- 2) М і Т разом з амортизаторами розміщують в спеціальні відсіки, які називають камерами;
- 3) Введення підсилених звуків в слуховий прохід здійснюється за допомогою останнього за допомогою вушного вкладиша. Одна із таких камер Т і М зображена на рис.3.

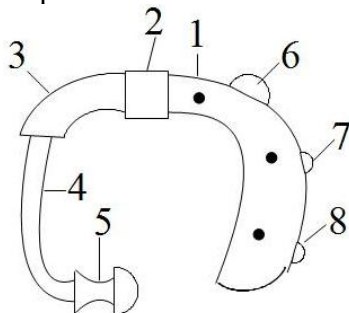


Рис.2. Конструкція звукового СА. 1 – корпус; 2 – мікрофонний вхід; 3 – жорсткий звукопровід; 4 – гнучкий звукопровід; 5 – вушний вкладиш; 6 – регулятор підсилення; 7 – перемикач режиму роботи; 8 – обойма джерела живлення

Внаслідок великої відстані між мікрофоном і телефоном (до десяти см) і відсутності між ними механічного контакту акустичний зворотний зв'язок в кишеньковому СА може бути зроблений достатньо малим, а віброакустичний – зведений до мінімуму, що полегшує отримання в

ньому стабільного і дуже високого звукопідсилення. Виносний телефон вставляється у вушний слуховий прохід (раковину) за допомогою вушного вкладиша. Кишенькові СА, що застосовуються з кістковим вібратором, мають в своєму комплексі пружне кріплення вібратора до голови.

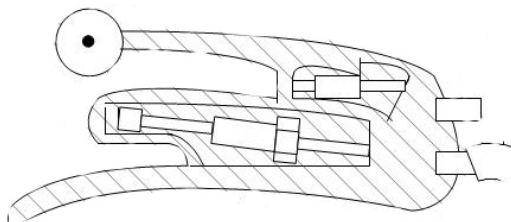


Рис.3. Фрагмент корпусу завушного СА з мікрофонною і телефонною камерами: 1 – корпус СА; 2 – мікрофонна камера; 3 – мікрофон; 4 – амортизатор; 5 – телефонна камера; 6 – телефон; 7 – амортизатор; 8 – регулятор підсилення; 9 – акустичний вхід; 10 – фрагмент жорсткого звукопроводу

Внутрішньовушні СА внаслідок своїх конструктивних і акустичних особливостей помітно виділяються на фоні СА інших видів, і є сьогодні найбільш поширеними. Перш за все, – це СА, в яких всі складові частини сконцентровані в невеликому об’ємі всередині корпусу, який є наймініатюрнішим із всіх корпусів СА. Комплексність корпусу і відсутність вихідного звукопроводу, під’єданого шнура, що мають інші конструкції СА, диктують необхідність розміщення СА в зовнішньому вусі людини. Оскільки відстань між мікрофоном і телефоном в такому СА не перевищує 1 см, то неможливо отримати велике звукопідсилення. Тому застосування таких СА є досить обмеженим: їх використовують як “вушні пробки” або “вушні вставки”.

### 1. Електроакустичні параметри СА

Електроакустичні параметри СА викликають неабиякий практичний інтерес, оскільки ними доводиться оперувати у найрізноманітніших сферах, пов’язаних із СА, починаючи з їх розробки, випробувань, експлуатації та конструювання.

Всі параметри і характеристики СА поділяються на три групи. Перша група складається з показників, які використовують при порівнянні техніко-експлуатаційних характеристик і технічного рівня СА. Друга група поєднує параметри, які є необхідними при контролі якості продукції і процесі виробництва. До третьої групи відносяться параметри, які необхідні для СА при слухопротезуванні.

Розглянемо основні електроакустичні параметри СА при повітряному звукопроведенні. Тут можна виділити електроакустичні параметри СА, які характеризуються особливостями передачі різних рівнів вхідного сигналу на фіксованій частоті. До таких параметрів відносяться: акустичне підсилення по тиску (ПЗТ), яке знаходиться в межах від 30-50 до 80-85 дБ, що може змінюватись регулятором. Другий параметр – це аку-



стичне підсилення, що є різницею між ПЗТ акустичного сигналу біля барабанної перетинки, що створюється СА і ПЗТ за відсутності СА (табл.1). Величина акустичного підсилення може змінюватися за рахунок електричного підсилювача на 30-40 дБ, замість телефону до 20 дБ.

Інший параметр вхідного підсилення звукового тиску характеризує можливість СА зі створення звукової потужності підсилюваного акустичного сигналу. Він напряму пов'язаний з підсиленням тиску на акустичному вході СА і його акустичним підсиленням: при відкритості в тракті помітних нелінійних спотворень сигналу вихідне підсилення звукового тиску рівне сумі вхідного та акустичного підсилень.

Таблиця 1.

№, п/п	Назва параметру	Спосіб вимірювання параметру
1.	Акустичне (підсилення по тиску)	Різниця ПЗТ на вході СА і ПЗТ на його виході
2.	Акустичне підсилення, що вноситься	Різниця між ПЗТ акустичного сигналу біля барабанної перетинки і ПЗТ біля неї без СА
3.	Функціональне підсилення СА	Різниця порогів слуху чистого тону при використанні СА і без нього
4.	Максимальне акустичне підсилення ( $f > 1000$ Гц)	Акустичне підсилення, виміряне при положенні регулятора, що відповідає максимальному підсиленню
5.	Усереднене акустичне підсилення	Середньоарифметичне значення на частотах 500, 1000 і 2000 Гц
6.	Усереднене високочастотне підсилення	Середньоарифметичне значення на частотах 1000, 1600 і 2500 Гц
7.	Максимальне (пікове) акустичне підсилення	Акустичне підсилення, що визначається на частоті максимального підсилення СА

Рівень насичення показує максимальне вихідне підсилення звукового тиску, яке створює СА, і характеризує його максимальну потужність. В багатьох моделях СА наявні засоби для регулювання в межах 10-25 дБ рівня насичення.

Власні шуми в СА пов'язані з наявністю в складі СА електронного підсилювача, а у випадку застосування неелектромагнітного електричного мікрофону – і додаванням шумів капсули мікрофона і вмонтованого в нього узгоджувачого підсилювача. Тут можна виділити два параметри СА, що характеризує шумові властивості СА: вихідний рівень власних шумів і приведений до входу рівень власних шумів. В сучасних СА вхідний рівень власних шумів не перевищує 55-70 дБ, а приведений до входу – 17-30 дБ.

Коефіцієнт гармонік вказує, наскільки чисто відтворюється неспотворений вхідний акустичний сигнал. Він визначається за формулою:

$$K_{\Gamma} = \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} P_i^2 / P_1}, \quad (1)$$

де  $P_i$  і  $P_1$  – звукові частинки сигналу основної гармоніки та  $i$ -тої гармоніки на виході СА. Коефіцієнт гармонік не повинен перевищувати 3-4% і визначають його на частотах 500, 800, 1000 і 1600 Гц.

Амплітудна характеристика вказує на залежність між вихідним і вхідним підсиленням звукового тиску на певній частоті (1000 Гц) і зводиться за різних положень регулятора акустичного підсилення.

Характеристика спрямованості – це відносна залежність вихідного підсилення звукового тиску на виході від напрямку на джерело зв'язку.

## **2. Вимірювання основних електроакустичних параметрів СА і їх функціональні можливості**

Об'єктивна перевірка електроакустичних параметрів СА здійснюється за допомогою комплексу електроакустичної вимірювальної апаратури у відповідності з держстандартом на СА. Для проведення вимірювань до складу комплексу повинні входити: джерело акустичного сигналу з регульованою частотою і величиною засоби для підтримання постійним його вихідного рівня звуку, реєстратори вихідного акустичного сигналу, імітатори механічного навантаження СА. Акустичним навантаженням слугує камера зв'язку об'ємом 2 см<sup>3</sup> з прилаштованим до неї вимірювальним мікрофоном, а імітатором навантаження СА для кісткового звукопроведення – штучний мастоїд (як у ТА штучне вухо чи рука), який не тільки є моделлю реального механічного навантаження для кісткового вібратора, але і забезпечує вимірювання рівня змінної сили.

Найбільш поширеним сьогодні для вимірювання параметрів СА є спеціально призначений для цього комплект електроакустичної апаратури данської фірми Grac&Kjaer, який в одиничному екземплярі був наявний на ВАТ «Родон». Він обслуговував акустичні параметри ТА. Цей комп'ютерний комплекс включає в себе малогабаритну заглушену акустичну безехову (безшумну) камеру, необхідну для проведення вимірювань в умовах близьких до умов вільного звукового поля, що, в свою чергу, відповідає точності вимірювань на повторність результатів. Такий комп'ютерний агрегат-комплекс може працювати разом із вимірювальним манекеном (штучне вухо), в якому зроблений імітатор слухового проходу (як у людини), що є удосконаленим аналогом камери зв'язку та імітатором вушної раковини.

Для вимірювання електроакустичних параметрів СА найбільш часто використовують “метод тиску”. У відповідності з ним СА розміщується поблизу джерела звуку; вимірювальний мікрофон, що контролює підсилення звукового тиску від джерела акустичного сигналу, розміщується на відстані 5-10 см від акустичного входу СА. В точці заміру підсилення звукового тиску підтримують постійним за допомогою вимірю-

вального мікрофона, що відградуваний на тиск. Вся апаратура повинна забезпечувати достатньо низький рівень власних шумів та вібрацій. Глуха (тиха) камера для вимірювання електроакустичних характеристик СА забезпечує умови вільного звукового поля в частотному діапазоні 150-8000 Гц, а джерело звуку разом із вимірювальним мікрофоном та вимірювальною апаратурою створюють в точці заміру підсилення звукового тиску в межах 50-90 дБ з похибкою  $1 \div 2,5$  дБ.

Різними підприємствами виготовляється багато моделей та різних модифікацій СА чотирьох основних видів, розглянутих нами вище. Цей величезний парк (табл.1) моделей характеризується великою кількістю функцій, значень електроакустичних та експлуатаційних параметрів та широкими можливостями для їх регулювання при підгонці до клієнта і його переналаштування для конкретної акустичної ситуації.

У відповідності з медичними рекомендаціями СА доцільно класифікувати на основі тільки одного показника – максимального рівня насичення. Цей параметр є одним із важливих для повітряного звукопроведення і відіграє вагомую роль при підгонці СА для людей з порушеним слухом. Цим параметром СА поділяють на 5 категорій:

Категорія СА	Рівень насичення, дБ
A-надмале вихідне підсилення звукового тиску	<105
B-мале	105-114
C-середнє	115-124
D-велике	125-134
E-надвелике	>135

Аналіз свідчить, що СА із повітряним звукопроведенням, які на сьогодні випускаються, за своїм призначенням і технічними характеристиками можуть бути поділені на 4 основні групи: 1 – прості; 2 – помірно-складні; 3 – функціонально-насичені; 4 – надпотужні.

В таблиці 1 наведено перелік функцій і параметрів СА виробництва різних фірм і країн, які є характерними для кожної з груп. При реалізації ЧХ різних видів в різних моделях застосовуються плавне або ступінчасте їх регулювання. ЧХ акустичного підсилення, які реалізовані в СА, далеко не у всіх випадках відповідають вимогам затвердженим стандартом, розрахованим і встановленим експериментально. Пояснюється, це перш за все, обмеженнями на синтез ЧХ заданої форми, особливо у випадку заушних та внутрішньовушних СА, як це показано на рис.4.

Корекція ЧХ у СА може здійснюватись як незалежно (за нижніми і верхніми частотами), так і суміжним способом, коли при ослабленні нижніх частот одночасно підсилюються верхні. Такими різними способами (плавно чи ступінчасто) в різних модифікаціях СА регулюються параметри АРП (автоматичного регулювання підсилення).

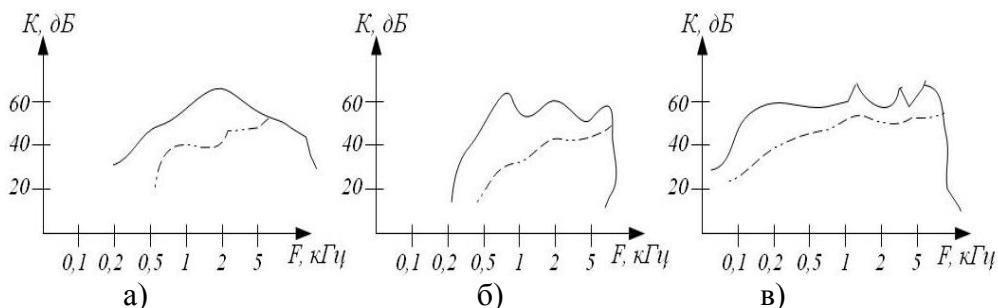


Рис.4. Приклади ЧХ акустичного підсилення заушних і внутрішньовушних СА: а) Selectra PP-6(Швейцарія), б) AD 434(Нідерланди), в) Siemens AMI (Німеччина)

Одним із найбільш ефективних способів регулювання ЧХ кишенькових СА є заміна телефону. Широко використовуються також регулятори ЧХ електронного підсилювач, який впливає на ЧХ СА загалом.

Основними способами регулювання ЧХ внутрішньовушних СА є зміна ЧХ підсилювача звукової частоти, а також застосування вушних вкладок із зовнішніми отворами. В заушних СА, крім цього, здійснюється ступінчасте регулювання ЧХ за рахунок заміни жорстких звукопроводів еластичними і за рахунок фільтра-втулки, що може переміщуватись всередині такого гнучкого звукопроводу.

До оригінальних корисних функціональних властивостей кращих сучасних СА відносяться:

- введення в СА багатоступінчастого перемикача ЧХ. Таке регулювання закладене, наприклад, в моделях швейцарської фірми Phonak (СА LC8/ВР05);

- можливість регулювання часу приглушення АРП, що знижує рівень шуму (забезпечується шумозаглушувачами), наприклад фірма Philips змінює час приглушення АРП в межах 50-340 мс;

- автоматичне пониження підсилення СА на верхніх частотах у міру наближення до максимального підсилення. Це покращує антигенераційну стійкість СА (наприклад, як це робить данська фірма Oticon в заушних моделях Е30Р, Е40);

- застосування виносного телефону в заушних СА, що покращує відтворення нижніх частот за менших нелінійних спотворень, наприклад СА фірми Maico (США), модель S235;

- вмонтовування індикаторів стану джерела живлення, що контролює ступінь зношування елемента живлення в заушних (модель Е30Р, данська фірма Oticon). Тут індикаторна лампочка попереджує про необхідність заміни джерела живлення;

- забезпечення постійного високого значення акустичного підсилення (Oticon, Phonar).

-

### 3. Схемотехнічні та акустично-механічні особливості СА

Побудова і вибір схем СА обумовлена особливостями їх роботи і забезпечення вимог до параметрів, що задаються стандартами європейських країн: низьковольтне живлення ( $\leq 1,2-1,5$  В); висока сталість підсилення при підвищенні чи пониженні напруги живлення; невелика напруга вхідного шуму підсилювача (1-2 мкВ), тобто зниження теплового і дробового та фланер-шумів в елементах схеми; досить високий коефіцієнт підсилення підсилювача (10000-20000) та малі нелінійні спотворення. Це вимагає введення до схеми підсилення глибокого від'ємного оберненого зв'язку, низькошумові транзистори на вході, транзистори з малою залишковою напругою на виході ( $U_{кн}$ ); стабільні коефіцієнти підсилення транзисторів у заданому частотному діапазоні.

Саме необхідність забезпечення заданих функціональних можливостей накладає свій відбиток і на схемотехніку СА: наявність АРП та регулюючих фільтрів для забезпечення АЧХ та динамічного діапазону з частотною корекцією спектра. З іншого боку кількість елементів повинна бути мінімальною, щоб зменшити потужність споживання. Одна із таких схем СА для заушних і внутрішньовушних моделей наведена на рис.5.

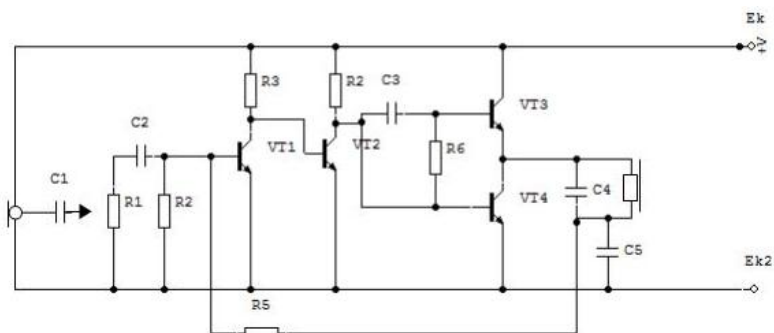


Рис.5. Електрична схема заушних та внутрішньовушних СА з мінімальною кількістю елементів

У ній підсилювач даного СА побудований на біполярних транзисторах n-p-n-типу, із яких VT1 і VT2 утворюють попередній каскад підсилення. Вихідний каскад зібраний на комплементарній парі (p-n-p і n-p-n-транзисторах) VT3 і VT4. Режим роботи транзисторів відповідає класу А або АВ і залежності від опору R6, який, по суті, регулює величину нелінійних спотворень. Навантаження підсилювача відносно високоомне, бо на частоті 1 кГц опір телефону складає 1 кОм. Споживаний струм СА тут не перевищує 0,15 мА. Всі опори низькоомні, щоб забезпечити мінімальний шум. Як розділяючі конденсатори використовуються варикапи з лінійною кулон-вольтовою характеристикою.

Сучасна мікроелектроніка, без сумніву, стимулює розвиток різних технічних модифікацій схем СА і, перш за все, зі зменшеним струмос-

поживанням, зменшеною ємністю і резисторами. У зв'язку з цим на увагу заслуговує робота підсилювача в класі Д, де в схемі підсилювача СА вже використовується к-МОН-технологія формування транзисторів, а надмініатюрна котушка індуктивності в LC-фільтрі нижніх частот на виході підсилювача замінена гідратором (для фільтрації частоти генератора  $f=40$  кГц). При роботі на телефон вже з опором 600 Ом (на  $f=1$  кГц) струм споживання склав  $\leq 50$  мкА, коефіцієнт гармонік  $\leq 0,5$  % на частоті 500 Гц при вихідному підсиленні звукового тиску на рівні 110 дБ.

Враховуючи шлях мініатюризації СА, у розробників нових моделей виникають труднощі з використанням мініатюрних органів управління, і перш за все, регулятором гучності, тож постало питання введення сенсорного регулювання.

Одна із таких схем подана на рис.6. В схемі як регулювальний елемент використовується польовий транзистор VT на основі n-МОН структури, який включений в коло управління коефіцієнтом підсилення підсилювача звукової частоти, величина якого є пропорційною опору переходу витік-стік. Крім цього, цей опір каналу транзистора VT залежить від напруги на конденсаторі C1, який включений між затвором і витком транзистора VT. Заряд і, відповідно, напруга на конденсаторі можуть змінюватись утворенням кола його зарядження і розрядження від дотику пальцем руки відповідно до контактів K1 або K2. Опір кожного контакту пальця складала  $\phi$ -5 мОм. Такі контакти формуються із алюмінієвого сплаву АКГо-1-1 або золота осадженим із золотохлористоводневої кислоти ( $Au(HCl_4)$ ). Як конденсатор C1, так і транзистор VT повинні мати мінімальний струм втрат.

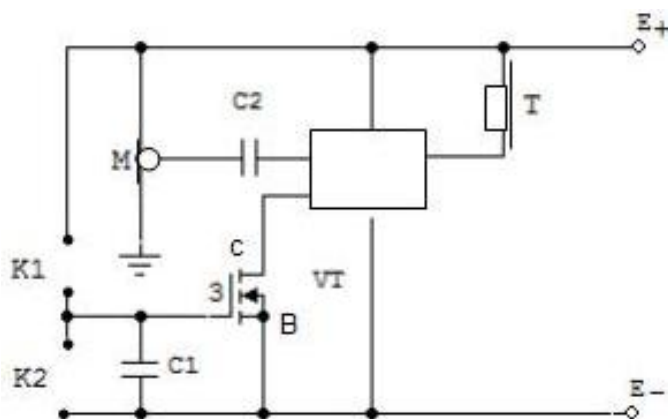


Рис.6. Схема внутрішньовушного СА із сенсорним регулюванням гучності і витком транзистора VT

На сьогодні вже накопичено значну кількість технічних рішень щодо СА з регулюванням ЧХ акустичного підсилення. Одна із таких

можливих схем регулювання ЧХ СА заушного типу подана на рис.7. Тут активний RC-фільтр виконаний на транзисторі VT із складним частотно-залежним від'ємним оберненим зв'язком, який реалізований шляхом подачі сигналу із колектора транзистора VT у вхідну базову область через елементи R4, C3, C4 і кола із елементів C1 C2 R1. Особливістю регулювання ЧХ підсилювача звукового тракту є зміна їх нахилу за допомогою резистора R1. Це проходить тому, що зміна опору R1 призводить до зміни коефіцієнта передачі для сигналу в колі бази і сигналу, який надходить через конденсатор C5 колом оберненого зв'язку. В результаті зміни коефіцієнта передачі в області НЧ коефіцієнт передачі збільшується в області верхніх частот, що передається по колу оберненого зв'язку і навпаки (рис.7б). Як бачимо, майже в 20 дБ можна змінювати ЧХ за допомогою основного RC-фільтра. Більш прийнятною електричною схемою активного RC-фільтра є схема СА, в якій організовані два незалежних частотних тракту проходження сигналу через фільтри ФНЧ і ФВЧ з незалежним регулюванням за допомогою резисторів R3 і R7 (рис.8). Чітке регулювання ЧХ підсилювача звукового тракту здійснюється опором R3, за допомогою якого одночасно (як і в попередній схемі) підвищуються високі частоти і знижуються нижні.

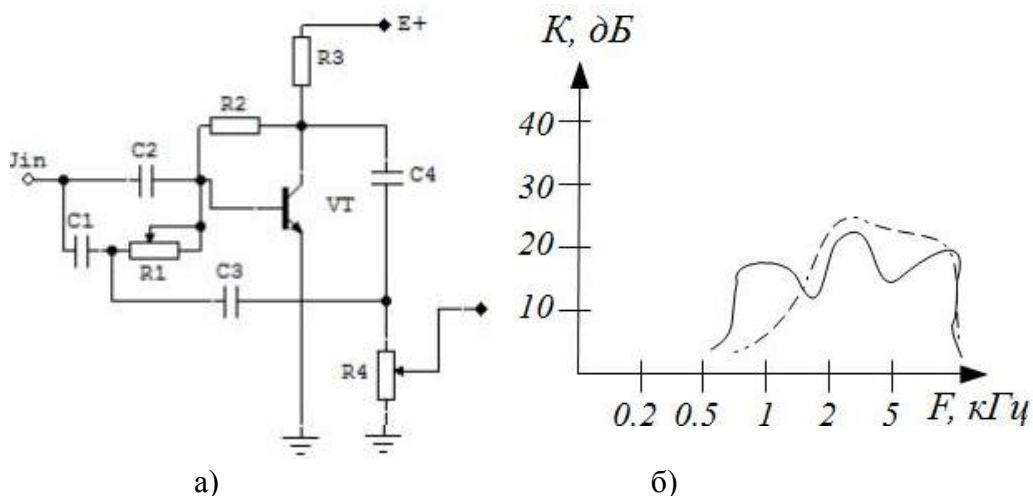


Рис.7. Електрична схема RC-фільтра ВЧ для регулювання ЧХ СА заушного типу а) і його ЧХ б)

На сьогодні всі розробники СА заушних та внутрішньоушного типів стараються уніфікувати електричну схему СА з використанням повністю інтегральної схеми, яку б слід використовувати у без корпусному виконанні (на павучках). Але яку елементну базу при цьому використати: біполярні транзистори, польові транзистори чи комбінований варіант? Сьогодні це питання ще не вирішене, бо схемотехнічні рішення визначаються суперечливими параметрами: потужністю споживання, коефіцієнтом підсилення і т.ін.

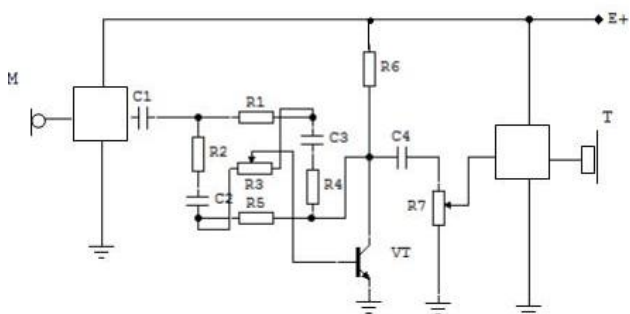


Рис.8. Електрична схема СА звушного типу з регулюванням активним RC-фільтром у вигляді RC-моста

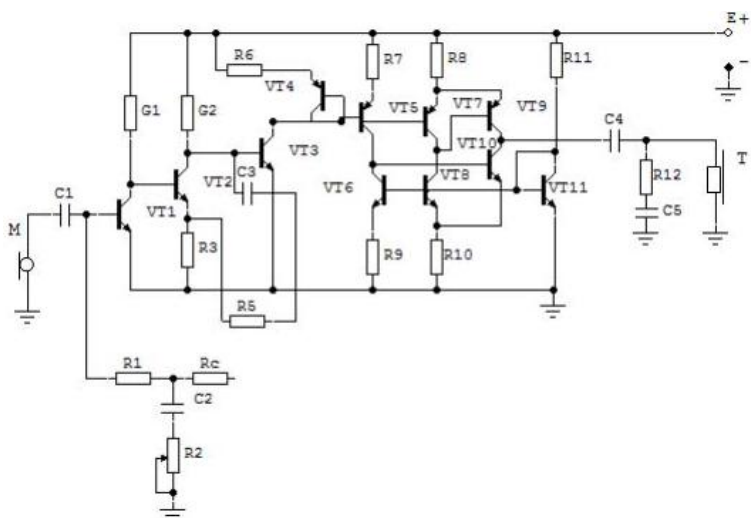


Рис.9. Електрична схема СА звушного типу у вигляді біполярної інтегральної схеми

Звичайно, зараз нас цікавить підсилювач СА в інтегральному виконанні. Дану схему (рис.9) використовують в більшості СА заданого типу. На транзисторах VT1, VT2 і VT3 виконано каскад попереднього підсилення, в який включені генератори струму G1 і G2. Транзистори VT1 і VT2 працюють при струмах емітера 20-30 мкА (в мікрорежимі), що забезпечує чудове узгодження з електричним мікрофоном М із мінімальним шумом та високу економічність за споживаною потужністю. Транзистор VT3 разом з транзистором VT4 забезпечують конвертацію напруги в струм і споживають струм в межах 30-50 мкА, знімаючи з попередньої ступені струм 1 мкА. Конденсатор С3 призначений для частотної корекції підсилювача і є смісним навантаженням. Вихідний каскад побудований на комплементарних транзисторах VT9, VT10 (різного типу провідності). Входи цього вихідного каскаду потужності підключені до відповідної шини джерела живлення через струмозадаючі ланки. Одна з них виконана на транзисторі VT6 та резисторах R8, R1 і транзисторі



VT11 в діодному включенні, а друга – на транзисторі VT4 у діодному включенні, резисторі R4, транзисторі VT7 і резисторі R9. Вказані ланки і додаткові транзистори VT5 і VT8 забезпечують необхідний базовий струм для комплементарної пари вихідного каскаду на рівні 100 мкА.

Для зниження нелінійних спотворень підсилювач звукового тракту охоплений місцевим від'ємним оберненим зв'язком (резистори R3, R5) та загальним оберненим зв'язком (R1, R2, R6, C2), що забезпечує температурну стабілізацію підсилювача та коефіцієнт підсилення на рівні 3520-10000, що може регулюватись резистором R2. Мікрорежими транзисторів забезпечуються гетерною технологією із  $Si_xO_yN_z$ , що формується після базової імплантації.

#### 4. Аналіз елементної бази СА і технологій їх формування.

Розглянуті вище вимоги до сучасних СА, їх схемотехнічні та конструктивні особливості взаємопов'язані із електрорадіоелементами (ЕРЕ), електроакустичними перетворювачами, джерелами живлення, що використовуються в СА Тут для всієї елементної бази важливим є мініатюрність, що часто лякає виготовлювачів, за винятком підприємств мікроелектроніки. Всі елементи повинні працювати за низької напруги живлення <1,5 В, а комутаційні елементи повинні бути розраховані на малі струми (до 50-100 мА), мікрофон і телефон повинні мати підвищену чутливість, конденсатори та резистори повинні бути тонкоплівковими з дуже малими ТКО і ТКЕ та малим значенням номіналів. Тут, звичайно, свої напрацювання мало наше підприємство ВАТ «Родон», яке впровадило у виробництво телефонні апарати як аналогового, так і цифрового сигналу, радіотелефони. Зупинимось на особливостях елементної бази: 1) електроакустичних перетворювачів; 2) інтегральних схем як мікрошумових, так і мікропотужних та малогабаритних; 3) тонкоплівкових пасивних R, C – елементів та безкорпусних транзисторів; 4) малогабаритних корпусних деталей та звукопроводів. До цих всіх питань треба віднести важливе питання – сучасний дизайн СА, який міг би вийти на світовий ринок і перемогти в конкурентній боротьбі за електроакустичними параметрами і надійністю.

На сучасному етапі розвитку СА все більше застосування як електроакустичні перетворювачі знаходять електричні мікрофони та електромагнітні телефони. Розглянемо їх частотні характеристики.

Електричні мікрофони мають такі переваги перед електромагнітними: широкий діапазон частот, велику чутливість, невеликі габарити, можливість спряження (узгодження) з інтегральними схемами. До недоліків електричних мікрофонів слід віднести: наявність шумів, високу вартість, додаткові витрати потужності і наявність фільтра в колі мікрофона.

Найбільше поширення сьогодні в СА знайшли електричні мікрофони фірм Knowles Electronics (Англія), Microtel (Нідерланди) завдяки

їх високій чутливості, яка знаходиться в межах 10-30 мВ/ Па. Частотні характеристики чутливості електричних мікрофонів для СА подано на рис.10а. Об'єм мікрофона, всередині якого монтується узгоджуючий підсилювач, складає 30 мм<sup>3</sup>.

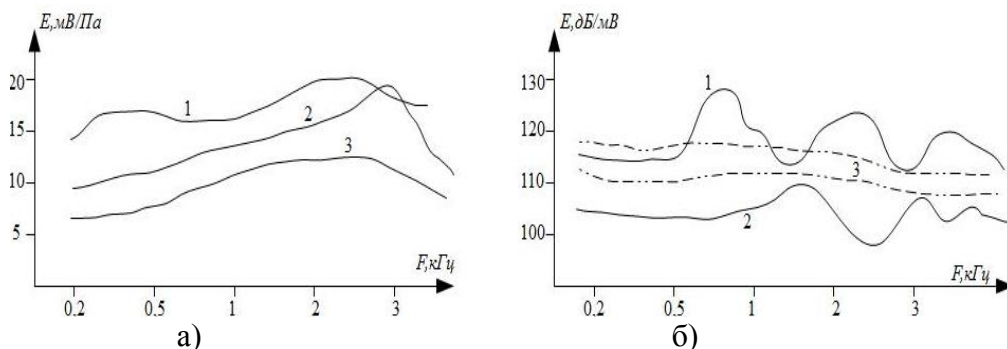


Рис.10. Частотні характеристики : а) електричного мікрофона (1 – модель 1751 (Англія), 2 – модель 32 (Нідерланди) 3 – модель МС (СРСР)); б) електромагнітного телефону (1 – модель 1878 (Нідерланди), 2 – модель ТЕМ-1956 (СРСР) 3 – модель ВТУ-5 (СРСР))

Частотні характеристики віддачі телефонів для СА подані на рис.10б.

Опір таких телефонів може бути в межах 200-1000 Ом на частоті 1000 Гц. За їх допомогою забезпечується підсилення звукового тракту на рівні 100-12- дБ. Саме на ВАТ «Газотрон» (м. Рівне) розпочалось освоєння електретних мікрофонів-телефонів, як для телефонних апаратів, так і для СА. Відповідно були проведені перемовини на виготовлення дослідних зразків та їх серійне освоєння.

Зупинимось на особливостях структур інтегральних схем як підсилювачів звукової частоти СА. Такі мікросхеми можуть виконуватись за напівпровідниковою або гібридною тонкоплівковою технологією. Кожна із цих технологій заслуговує на увагу щодо забезпечення прецизійності електричних параметрів.

В останні роки у заушних чи внутрішньовушних СА уже використовуються безкорпусні напівпровідникові схеми, зібрані на павучках. Таке виконання дуже добре узгоджується із суміщеною напівпровідниковою та гібридною технологіями виготовлення підсилювачів звукового тракту: ІС кріпиться на системній платі, на якій вже сформовані пасивні елементи (резистори та ємності) та відповідна розводка.

В таблиці 2 наведено параметри і характеристики напівпровідникових ІС для СА, що були розроблені у нас і за кордоном.

Схема LC505, яка побудована на основі низьковольтного операційного підсилювача, вирізняється малим числом елементів та споживаною потужністю. В їх число входить і RC-ланка для регулювання коефіцієнта підсилення (вивід 4) і резистор для підлаштування режиму ви-

хідного транзистора (вивід 1). Ця схема забезпечує дуже високу термо-стабільність за рахунок ОП (0,3-0,4 дБ на 0,1 В). Габаритні розміри підсилювача 3,5×3,5×1,5 мм.

Таблиця 2. Параметри і характеристики ІС для СА.

№, п/п	Типи інтегральної схеми	Напруга живлення, В	Коефіцієнт підсилення за напругою, дБ	Вихідна потужність, мВт	Номінальний опір, Ом	Максимальний струм	Наявність АРП
1	K538 УН-2	1,2±10%	63	0,2	1000	1,2	немає
2	K548 УН-2	1,2±10%	68	0,2	1000	1,2	є
3	K548 УН-3	1,3±10%	80	2	100	1,2	немає
4	LC505	0,9-1,8	68-76	0,5	1000	0,5	немає
5	WC501G	1,1-1,8	56-62	0,5	600	0,5	є
6	LC549	0,8-1,8	38-42	7	400	0,6	є
7	LC506	1,0-1,8	38-42	0,01	1000	0,9	немає
8	WC535G	1,0-1,6	67-84	6	400	0,9	є

На рис.11. наведено структурні схеми деяких ІС для СА: тип LC505, WC501G.

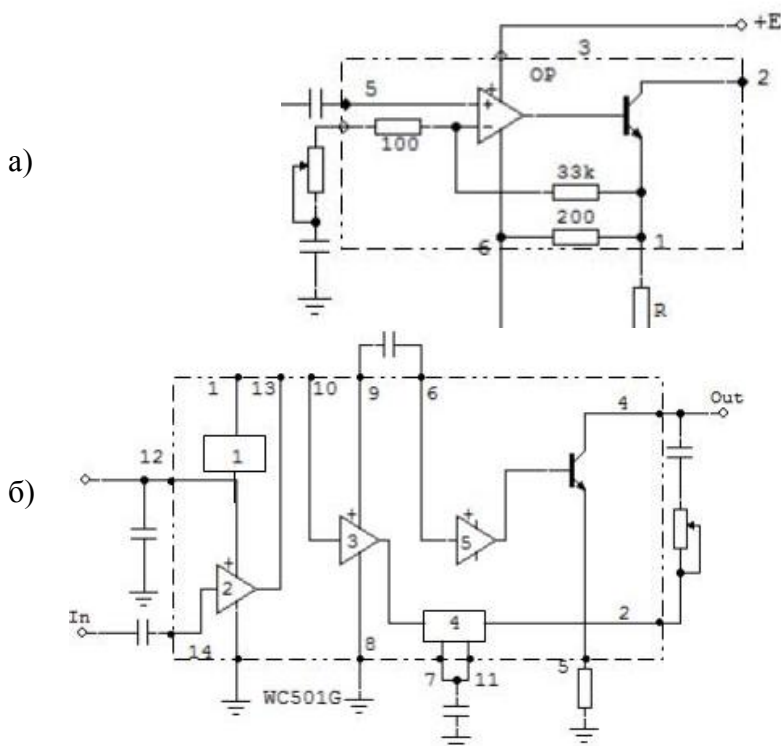


Рис.11. Структурні схеми підсилювачів звукового тракту для СА заушного типу. а) LC505 б) WC501G

Інша мікросхема WC501G також розрахована на застосування в СА середньої потужності, але вже із збільшеними функціональними можливостями: АРП, попередній підсилювач 2 для індуктивної котушки, самостійні каскади попереднього 3 і вихідного каскаду 5 підсилення, що забезпечує гнучкість в регулюванні тембру та шумоподавлення. Габарити 6×3,4×1,5 мм. Величина АРП підбирається конденсатором, підключеним до виводів 7 і 11 випрямляча 4, а регулятор напруги 1 забезпечує високу стабілізацію  $K_u$ .

Мікросхема WC501G відноситься до числа мікропотужних схем СА. Набір реалізуючих функцій є невеликим, проте її можна використовувати для СА певних категорій глухих. Мікросхема має два ідентичні підсилювачі, які працюють в режимі АВ. Дані підсилювачі попереднього підсилення забезпечують високу температурну стабільність  $K_u$ .

На основі приведених аналізу та досліджень інвестиційного проекту «Слухові апарати» можна зробити наступні висновки:

1. Даний інвестиційний проект СА можна реалізувати на ВАТ «Родон» (м. Івано-Франківськ).
2. Для реалізації проекту необхідно розробити повний комплект конструктивної та технологічної документації.
3. Потрібно спроектувати повний комплект технологічного оснащення для виготовлення корпусних деталей та комплекту пакування.
4. Потрібно провести макетування і моделювання електричної схеми з визначенням параметрів і характеристик СА.
5. Потрібно виготовити установочну партію з проведенням усіх необхідних випробувань.
6. Потрібно провести маркетингові дослідження ринків збуту як внутрішніх, так і зовнішніх.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 26.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Мельником П.І.,  
д.ф.-м.н., професором Стасюком З.В. (м. Львів)*

## FEATURES OF PLANNING OF HEARING DEVICES ON AN INTEGRAL ELEMENT BASE

**S. P. Novosyadliy, L. V. Melnyk**

*PreCarpathian National University by Vasyl Stefanic;  
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;  
ph. +380 (342) 71-48-48, e-mail: [kre@pu.if.ua](mailto:kre@pu.if.ua)*

*The basic setting of hearing device (HD) consists in transformation of signal which turns out a sound information generator thus, that this signal could be perceived by a man with the defective hearing, with enough high level auditory feeling. Greater part of people use HD for listening of linguis-*

*tic signals. In the row of cases HD finds the application in a role of mean of reduce of the bad feelings from a ear noise. Transformations of acoustic signal, that HD is carried out can carry a different character. There is this strengthening of sounds in simplest case. In many practical case of strengthening can be accompanied by low or high-frequency filtration, set limitation of dynamic range of amplifying signal. Exist HD with nonlinear transformation of amplitude frequency spectrum of entrance signal by antinoise treatment of mixture signal-noise, by the simultaneous signal processing in a few frequency ranges. For high-quality HD stability of frequency spectrum, size and stability of tension of feed (powers of consumption) and minimum sizes is important. Given questions and lie in the basis of the given article, the features of the construct scheme planning of HD on an integral element base are examined in which.*

**Key words:** *sound information, acoustic signal, amplitude frequency description, spectrum, hearing device.*

# *Нафтогазова справа*

УДК 553.98

## **ПЕТРОФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НАФТОВИХ І ГАЗОВИХ КОЛЕКТОРІВ ПЕРЕДКАРПАТТЯ**

**В. І. Грицишин, С. Ф. Кучер**

*Карпатське управління геофізичних робіт;  
76000, м. Івано-Франківськ, вул. О. Блавацького, 22;  
тел. +380 (342) 77-55-63; e-mail: kugrvat@gmail.com*

*Розглянуто питання вивчення фізико-петрографічних параметрів порід-колекторів нижньосарматських відкладів Більче-Волицької зони Передкарпатського прогину з використанням даних керна і результатів геофізичних досліджень свердловин. Зіставлено дані літолого-петрофізичних властивостей порід з геолого-геофізичними параметрами, що дало змогу провести оцінку підрахункових параметрів на Хідновицькому газовому родовищі.*

***Ключові слова:** колектор, петрофізичні параметри, пористість, проникність, питомий електричний опір, швидкість пружних коливань.*

### **1. Природні пористі середовища і їх заповнювачі**

#### **1.1 Породи-колектори нафти і газу**

Поклади нафти і газу приурочені до чисельних різновидностей гірських порід осадового та виверженого походження. У природних умовах поклади нафти і газу переважно приурочені до піщанистих і карбонатних відкладів.

Гірські породи, заповнені газом і нафтою, здатні їх віддавати у промислових кількостях, називаються колекторами. Велика частина нафтових і газових підземних резервуарів складена породами осадового походження: пісковиками, вапняками і доломітами.

Скупчення нафти і газу встановлені у відкладах різного походження, починаючи від кембрію і закінчуючи верхнім пліоценом. Відомі скупчення нафти і газу як в докембрійських, так і в більш молодих четвертинних відкладах.

Вивержені і метаморфічні породи можуть вміщувати вуглеводні, якщо вони внаслідок вивітрювання і тектонічних процесів набули вторинної пористості і тріщинуватості.

Розрізняють два типи колекторів: гранулярні і тріщинні. Переважно гранулярними колекторами є піщано-алевритові породи, які характеризуються міжзерною пористістю і міжзерною проникністю; вапняки і доломіти з пелітовою або трубчастою структурою також подібні до гранулярних колекторів.

Більшість відомих у світі покладів нафти і газу внаслідок структурних умов, наявності пластів малої товщини та інших причин характеризуються відносно невеликими промисловими запасами. Крім цього, у багатьох випадках відбір нафти і газу із продуктивних пластів може бути обмежений через низьку фільтраційну здатність гірських порід. Застосування методів інтенсифікації припливів нафти і газу (гідророзрив пласта, солянокислотна обробка та ін.) у більшості випадків покращує фільтраційні властивості привибійної зони свердловин.

Колекторські характеристики (пористість, проникність) залежать від крупності, відсортованості і окатаності мінеральних зерен, що складають породу, від компоновки зерен, видів і типів цементації, структури порових каналів, текстури порід, залягання в розрізі, різних співвідношень з супутними породами і тощо.

Вивчення і аналіз всіх наведених вище елементів дозволяє правильно оцінювати властивості колекторів, які значною мірою впливають на нафтонасиченість і нафтовіддачу. В цей же час встановлення функціональних і статистичних зв'язків між колекторськими властивостями і різними кількісними характеристиками теригенних порід відкриває широкі можливості для прогнозування цих властивостей за даними комплексу літолого-геологічних параметрів (гранулометричний склад, глибина залягання, густина, проникність і тощо) і геофізичних характеристик (питомий електричний опір, швидкість пружних коливань, радіоактивні властивості порід, потенціали самочинної поляризації і т.ін.).

Літолого-петрографічні дослідження тріщинних колекторів пов'язано з особливим підходом, оскільки ємність і фільтрація в них обумовлені структурно-генетичними особливостями тріщинуватих порід-колекторів, серед яких переважають карбонатні породи. В карбонатних породах порівняно рідше зустрічаються колектори порового типу, міжзернові пустоти в яких утворилися внаслідок первинної седиментаційної компоновки мінерального скелета гірської породи. Ємність в карбонатних колекторах частіше виникає внаслідок постседиментаційних процесів вилугування частинок скелета, доломітизації, перекристалізації. В даній статті способи вивчення фільтраційно-ємнісних властивостей карбонатних колекторів не розглядаються.

Колекторські властивості порід (пористість, проникність, газонасиченість) залежать від умов, при яких осади формувались, від діагенетичних і епігенетичних процесів, а також від проявів тектонічних сил. Формування осадочних порід – тривалий і складний процес.

Властивості порід залежать не тільки від їх мінерального складу, але і від будови, яка визначається формою і розташуванням складових частин породи. Структурні і текстурні особливості порід впливають на їх ємнісні і фільтраційні властивості. За величиною зерен середовища осадових порід розрізняють структури псефітову, псамітову (піщанисту), алевритову і пелітову [1].

Псефітова структура властива грубоуламковим породам, які складаються з уламків розміром більше 2 мм. Псамітова структура характерна для пісковиків і пісків з розмірами частинок від 0,1 до 1-2 мм (при грубозернистій структурі переважають зерна розміром понад 1 мм, при крупнозернистій – від 0,5 до 0,25 мм, при дрібнозернистій – менше 0,25 мм).

Алевритова структура властива дрібноуламковим породам з розмірами частинок від 0,01 до 0,1мм (при крупнозернистій структурі переважають зерна від 0,1 до 0,05мм, при дрібнозернистій – від 0,05 до 0,01мм).

Пелітова структура характерна для тонкоуламкових гірських порід з розмірами частинок 0,01мм і менше (при мікрозернистій структурі переважають зерна від 0,01 до 0,001мм, при криптозернистій – 0,001мм і менше, при різнозернистій – менше 0,01мм). Виділення структурних типів порід ґрунтоване на вимірюванні величин переважаючих зерен.

Текстура гірської породи характеризується розміщенням і розподілом її складових частин. Основною текстурною ознакою осадових порід є їх шаруватість, яка пов'язана як з накопиченням осаду, так і з літифікацією.

Шаруватість в основному буває горизонтальною, похилою і неправильною. Зустрічаються плейчасті структури, які виникають внаслідок сповзання осадів по дну басейну, тектонічного змінання, гідратації ангідриту та ін.

Характер шаруватості впливає на фільтраційні властивості порід у вертикальному і горизонтальному напрямках, а також на вибір методів впливу на привибійну зону пласта (застосування гідророзриву пласта з метою збільшення припливу пластових флюїдів у свердловину).

Характер розподілу і розміщення пор є текстурною ознакою. В цей же час пористість залежить і від структури породи.

Розміри і форма пор значною мірою визначаються розміром і формою мінеральних зерен, з яких складається порода. Отже, розрізняють також структуру порового простору.

Колекторські властивості порід в значній мірі визначаються складом і структурою цементуючих речовин, але в основному вони залежать від взаєморозташування і кількісного співвідношення цементу і уламкових зерен, тобто від текстурних елементів породи.

Мінеральні речовини, які виповнюють у породі проміжки між більш крупними зернами і уламками і зчіплюють останні між собою, називаються цементом. Об'єм пористих проміжків зменшується в міру



збільшення кількості цементу. В теригенних породах-колекторах цемент призводить до зменшення величини перерізу порових каналів і, як наслідок, знижуються величини проникності, коефіцієнта нафтогазонасиченості та ін.

За речовинним складом цемент поділяється на два основні типи: мономінеральний і полімінеральний. Більш поширені глинисті цементи, менш поширені цементи хомогенного походження. Серед хомогенних цементів переважну роль відіграють карбонати, сульфати, оксиди і гідрооксиди різних елементів.

Вплив мінерального складу цементу на колекторські властивості порід визначається, головним чином, сорбційними властивостями мінералів цементу і мірою гідрофільності або гідрофобності останніх. Стосовно глинистих цементів, розрізняють такі структури, як пелітова та алевропелітова. Пелітова структура стосується глин з розміром частинок менше 0,01мм, а алевролітова вказує на присутність в них домішки тонкого алевритового матеріалу.

Хомогенні цементи можуть бути аморфними і зернистими. Розрізняють різнозернисті, тонкозернисті, середньозернисті та інші типи цементів.

Структура цементів також до деякої міри визначає колекторські властивості порід. Особливо велике значення під час оцінки порід-колекторів з точки зору їх ємнісних і фільтраційних властивостей, а також величини їх залишкової водонасиченості, має текстура цементів. За цією ознакою розрізняють такі основні типи цементу [2]: контактний (цемент дотику) – цементуюча речовина знаходиться тільки в місцях контактування уламкових зерен; згустковий (плямистий цемент) – матеріал цементу нерівномірно розподілений у породі у вигляді локальних ділянок; плівковий – цемент присутній у вигляді тонких шарів, що огортають зерна породи; поровий – речовина цементу знаходиться у проміжках між зернами породи; базальний – зерна занурені в цементуючу масу і не дотикаються між собою.

Переважно в породах спостерігається комбінація двох або більше названих типів цементациї з переважанням одного з них.

Найбільш сприятливим для колекторських властивостей порід є контактний тип цементациї, оскільки у цьому випадку спостерігається найбільша проникність, досить низька залишкова водонасиченість і в найменшій мірі проявляються сорбційні і гідрофільні властивості цементуючої речовини. Найменше сприятливим з цих точок зору є поровий і базальний типи цементациї.

### ***1.2 Форми залягання порід-колекторів у покладах нафти і газу***

Породи-колектори є складовою частиною нафтогазоносною світи, відображеною у відповідній літофації. З найбільш відомих поширеними є вапняки і доломіти, глини (сланці) з прошарками і лінзами пісковиків і пісків, пісковики і піски.

Необхідною умовою утворення нафтового і газового покладу є наявність у товщах, які формують геологічні структури, пористих тіл, здатних акумулювати розсіянні і мігруючі вуглеводні. Колектори, які складають масивні резервуари, літологічно можуть бути однорідними (Шебелинське газове родовище) або неоднорідними (Хідновицьке газове родовище).

### *1.3 Властивості пластових рідин і газів*

Більшість природних нафт на 95-99% складається із вуглеводню і водню. При цьому вміст вуглеводню коливається від 83 до 87,4%, а водню – від 9,3 до 15%.

Вуглеводні, які є присутніми в нафті, розподіляються на три класи: парафінові, нафтеніві і ароматичні.

В нафті в різній кількості є присутніми сірка, азот, кисень. Вміст сірки коливається від 0,01 до 5%. Вміст азоту в нафті не перевищує 1%. Вміст кисню в нафті не перевищує 2%.

Природний газ складається здебільшого з метану і в невеликій кількості містить азот.

В природному газі міститься метан ( $\text{CH}_4$ ), етан ( $\text{C}_2\text{H}_6$ ), пропан ( $\text{C}_3\text{H}_8$ ), бутан ( $\text{C}_4\text{H}_{10}$ ) і пентан ( $\text{C}_5\text{H}_{12}$ ). Густина чистого метану у співвідношенні до повітря 0,554.

Густина нафт коливається від 650 до 1000  $\text{кг/м}^3$ ; густина асфальту може сягати до 1100  $\text{кг/м}^3$ .

Газоконденсатна пластова система є сумішшю вуглеводнів з незначною домішкою неорганічних сполук (азот, вуглекислота, пари води, сірководень). У цій суміші 75-95% складає метан.

Нафта володіє високим електричним опором, завдяки чому її виявляють в розрізах свердловин. Діелектрична стала нафти – 2, льоду – 93,9, гірських порід – від 6 до 11.

Води нафтових і газових родовищ в залежності від умов залягання у співвідношенні до продуктивних горизонтів називають верхніми, піддошовними і краєвими або контурними. В продуктивних пластах крім нафти і газу знаходиться залишкова вода. За характером мінералізації розрізняють води прісні, солоні і розсоли.

Підземні води насичені газом. Густина води визначається відношенням спостережуваної густини до густини, заміряної за стандартних умов (тиск – 1 мПа, температура – 15,5°C).

Питомий електричний опір є важливою фізичною властивістю і використовується при електрометрії свердловин. Питомий опір води залежить від її хімічного складу і температури, а також від тиску, який впливає на розчинність газу у воді. Питомий опір води з підвищенням температури зменшується.

**2. Петрофізичні основи вивчення колекторських властивостей піщанистих порід у тонкошаруватому розрізі.**

Експериментальні роботи з питань вивчення петрофізичних характеристик порід-колекторів в тонкошаруватих розрізах слід проводити в таких напрямках:

- мікроскопічне дослідження шліфів;
- визначення структури порового простору; за даними ртутної порометрії;
- визначення елементного складу порід за даними рентгено-структурного аналізу;
- визначення природи радіоактивності гірських порід за даними гамма-спектроскопії;
- вивчення гранулометричного складу піщано-глинистих порід;
- визначення коефіцієнтів пористості і проникності порід;
- вивчення електричних параметрів (параметра пористості і параметра насичення);
- вивчення швидкісних характеристик і зв'язок їх з пористістю і глинистістю;
- вивчення пористості і залишкової водонасиченості порід.

В основу вивчення петрофізичних характеристик у тонкопрошарковому розрізі нами розглянуто геолого-геофізичні матеріали по Хідновицькому газовому родовищу.

Хідновицьке газове родовище розташоване в північно-західній частині Більче-Волицької зони Передкарпатського прогину і приурочене стратиграфічно до нижньосарматських відкладів.

В літологічному відношенні продуктивна частина розрізу представляє собою потужну товщу піщано-алеврито-глинистих відкладів з широким діапазоном змінювань фізико-літологічних властивостей як по площі, так по заляганню.

Породи нижнього сармату широко розповсюджені в Більче-Волицькій зоні Передкарпатського прогону. Нижньосарматський підярус складається з піщано-глинистої товщі дашавської світи. Світа, в основному, виражена глинами з прошарками алевролітів, пісковиків і туфів.

Туфи мають своєрідну електричну характеристику – низькі електричні опори і позитивні аномалії потенціалів самочинної поляризації.

У розрізах горизонтів відзначається циклічність, яка характеризується поступовою зміною глинистих порід на піщанисті з наявністю в покрівлі циклів прошарків низькоомних туфів.

Вивчення фізико-літологічної характеристики розрізу проводилось за даними лабораторних визначень зразків порід.

Літологічний склад порід визначався в шліфах і з допомогою гранулометричного аналізу.

Глини під мікроскопом складаються із найдрібніших частинок глинистих мінералів, які представлені гідролюдами з незначною домішкою монтморилоніту.

Пісковики світло-сірі, різнозернисті, вапняковисті, слюдисті (від слабозцементованих до міцних), поліміктові і олігоміктові.

Середньо- і високопористі пісковики сірі, середньої міцності і слабозцементовані, олігоміктові (кварцові). Цемент пісковиків глинистий і глинисто-карбонатний. Тип цементації – поровий, порово-базальний.

Механічний склад пісковиків:

Розмір зерен 1,0-0,5мм – 8-28%;

Розмір зерен 0,5-0,25мм – 15-22%;

Розмір зерен 0,25-0,1мм – 13-37%;

Розмір зерен 0,1-0,01мм – 5-17%;

Розмір зерен 0,01 і менше – 2-3%.

### 2.1 Пористість

Лабораторними методами визначалась абсолютна і відкрита пористість. Значення відкритої пористості пісковиків і алевролітів коливається від 1 до 40%.

Оскільки відбір керна сильно ускладнює процес буріння і є дискретним методом вивчення розрізу, геофізичні методи дозволяють отримувати безперервну інформацію про розріз, отже, цей метод є найбільш ефективним під час вивчення ефективних товщин, пористості і газонасиченості колекторів.

З метою ув'язки параметрів геофізичних досліджень з лабораторними даними кернавого матеріалу був вивчений і проаналізований весь фондовий геофізичний і геологічний матеріал, який дозволив встановити кореляційні зв'язки між геофізичними параметрами, пористістю і газонасиченістю.

Оскільки на Хідновицькому родовищі не весь кернавий матеріал був досліджений на предмет вивчення петрофізичних характеристик, особливо в умовах, наближених до пластових, для оцінки колекторів були використані залежності, встановлені для аналогічних відкладів на розвідувальних площах Летня, Залужани та ін. На Летнянському родовищі відібрано велику кількість зразків (461 шт.), побудовані такі залежності:

$$P_n = 0,845 \cdot K_n^{-1,83}, \quad r = -0,95, \quad (1)$$

$$\Delta T = 186 + 5,187 \cdot K_n, \quad r = 0,91, \quad (2)$$

$$\Delta T = 173,09 + 4,66 \cdot K_n + 2,45 \cdot K_{гл}, \quad R = 0,88, \quad (3)$$

$$P_n = 1,038 \cdot K_b^{-1,782}, \quad r = -0,97, \quad (4)$$

$$K_{в.з.} = 125,9 \cdot e^{-0,0727 \cdot K_n}, \quad r = -0,94, \quad (5)$$

де  $P_n$  – параметр пористості ;

$K_n$  – коефіцієнт відкритої пористості (для формул 2; 3; і 5 –  $K_n$ , %);

$\Delta T$  – інтервальний час, мкс/м;

$K_{гл}$  – коефіцієнт об'ємної глинистості, %;

$P_n$  – параметр насичення;

$K_b$  – коефіцієнт водонасиченості;

$K_{в.з.}$  – коефіцієнт залишкової водонасиченості, %.

Графіки рівнянь (1)-(5) представлені на рисунках 1-4.

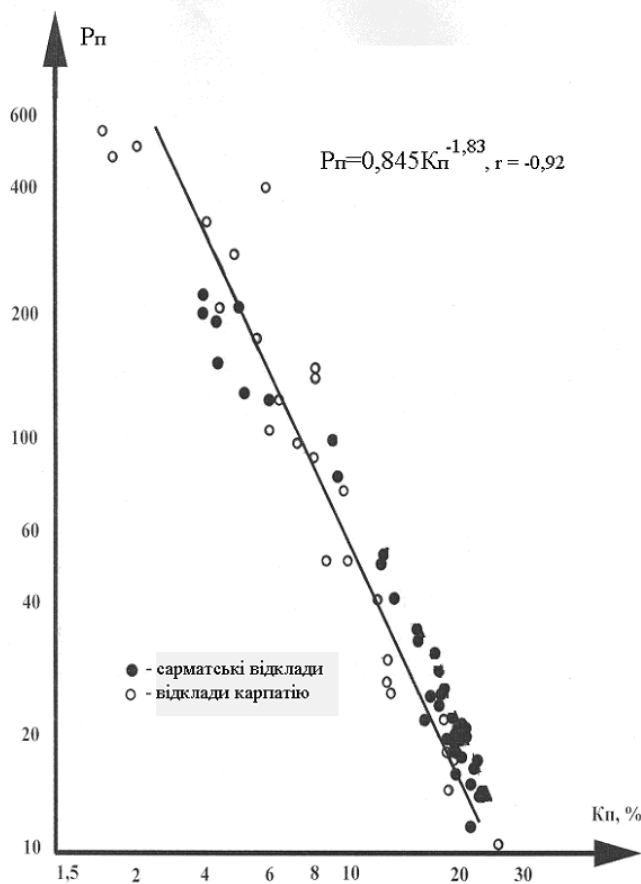


Рис.1. Залежність  $P_{п}=(K_{п})$  для пісковиків нижньосарматських відкладів по Летнянській площі

Для анізотропних товщ характерним є те, що опір промитої зони за даними бокового мікрокаротажу (БМК) занижений через значну заглинизованість піщанистих проверстків, тож визначення  $K_{п}$  за даними БМК не дає позитивних результатів. Для нижньосарматських відкладів площі Залужани було встановлено залежності між пористістю, опором промитої зони або опором пласта і глибиною залягання  $H$  (км). Залежності мають такий вигляд:

$$K_{п} = 19,0845 - 3,1727 \cdot H + 0,0426 \rho_{п} / \rho_{в}, \quad (6)$$

$$K_{п} = 21,4629 - 2,756 \cdot H - 0,0797 \rho_{зп} / \rho_{ф}, \quad (7)$$

де  $\rho_{п}$ ,  $\rho_{зп}$ ,  $\rho_{в}$ ,  $\rho_{ф}$  – відповідно питомий електричний опір пласта, зони проникнення, пластової води, фільтрату промивальної рідини (ПР), Ом·м;  $H$  – глибина залягання пласта, км.

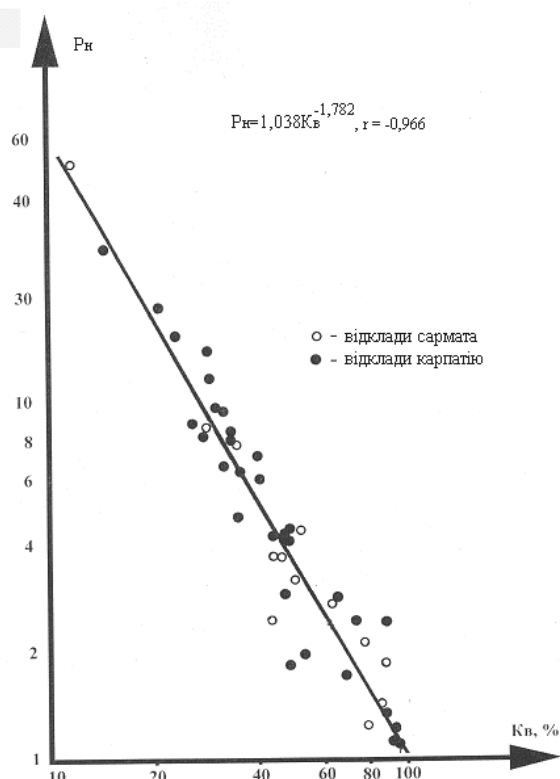


Рис.2. Графік залежності  $P_k = f(K_b)$  для відкладів сармату Летнянського газового родовища

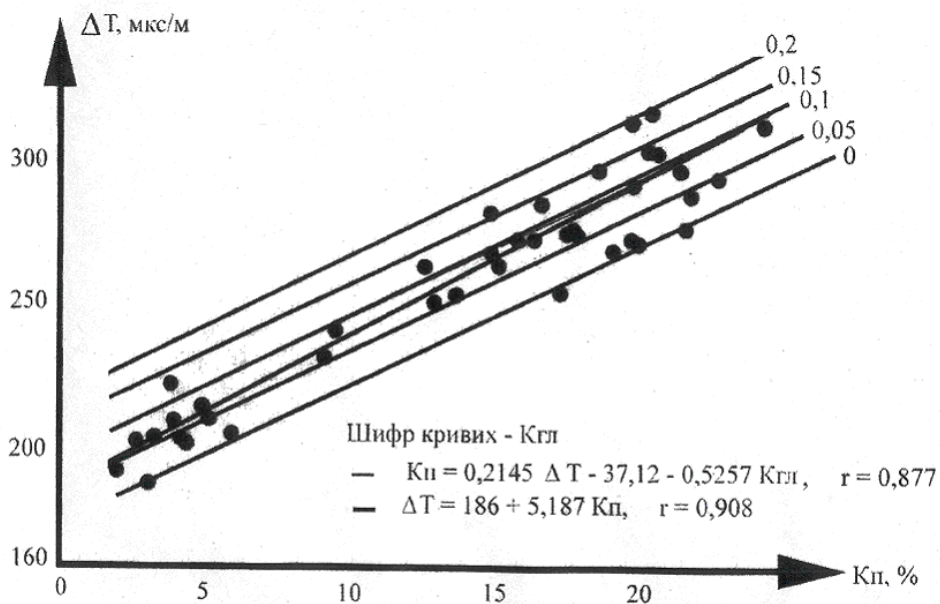


Рис.3. Графік залежності  $\Delta T = f(K_{п})$

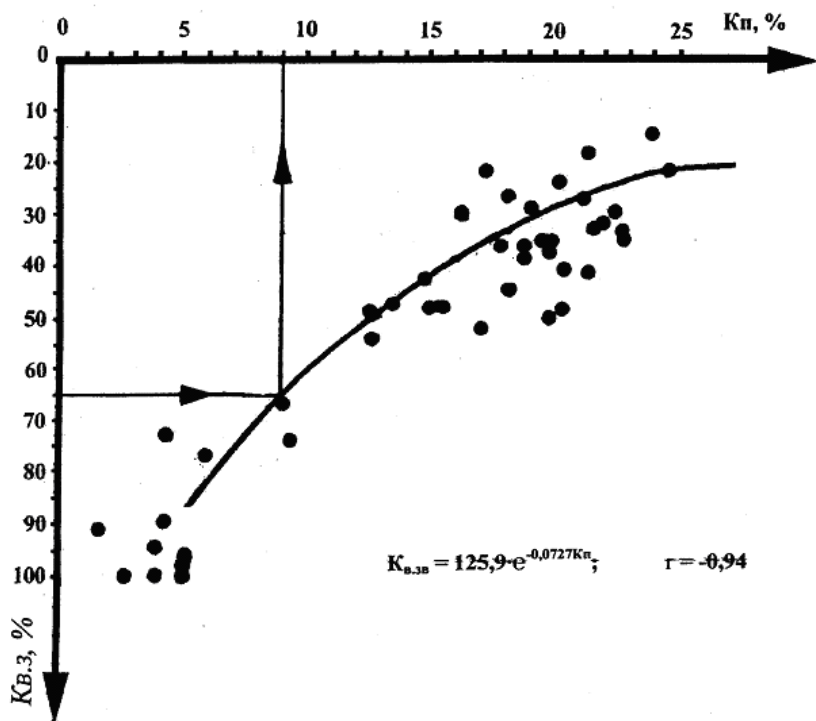


Рис.4. Графік залежність  $K_{в,з}=f(K_{в})$  для відкладів сармату Летнянського газового родовища

### 3 Визначення коефіцієнтів пористості за даними ГДС

#### 3.1 Визначення коефіцієнтів пористості за даними акустичного каротажу

Коефіцієнти пористості за даними АК визначались відповідно для чистих і заглинзованих колекторів (2) і (3). У величину  $\Delta T$  вводились поправки за розуцільнення, а для заглинзованих порід і за глинистість. Коефіцієнт глинистості визначався за даними гамма-каротажу (ГК). Для цього використовувались залежності між коефіцієнтом об'ємної глинистості  $K_{гл}$  і подвійним різницеvim параметром  $\Delta I_{\gamma}$  (рис.5). Формула цієї залежності така:

$$K_{гл} = 31,24 \cdot \Delta I_{\gamma} + 3,9848. \quad (8)$$

Для визначення  $K_{п}$  за даними АК також застосовувалось рівняння середнього часу з врахуванням глинистості:

$$K_{п} = \frac{\Delta T_{пл} - \Delta T_{ск}}{\Delta T_{р} - \Delta T_{ск}} - K_{гл} \frac{\Delta T_{гл} - \Delta T_{ск}}{\Delta T_{р} - \Delta T_{ск}}, \quad (9)$$

де  $\Delta T_{пл}$ ,  $\Delta T_{гл}$ ,  $\Delta T_{ск}$ ,  $\Delta T_{р}$  – відповідно інтервальний час у пласті, в глинах, скелеті і промивальній рідині.  $\Delta T_{р}$  прийнято 640 мкс/м,  $\Delta T_{ск}=186$  мкс/м.

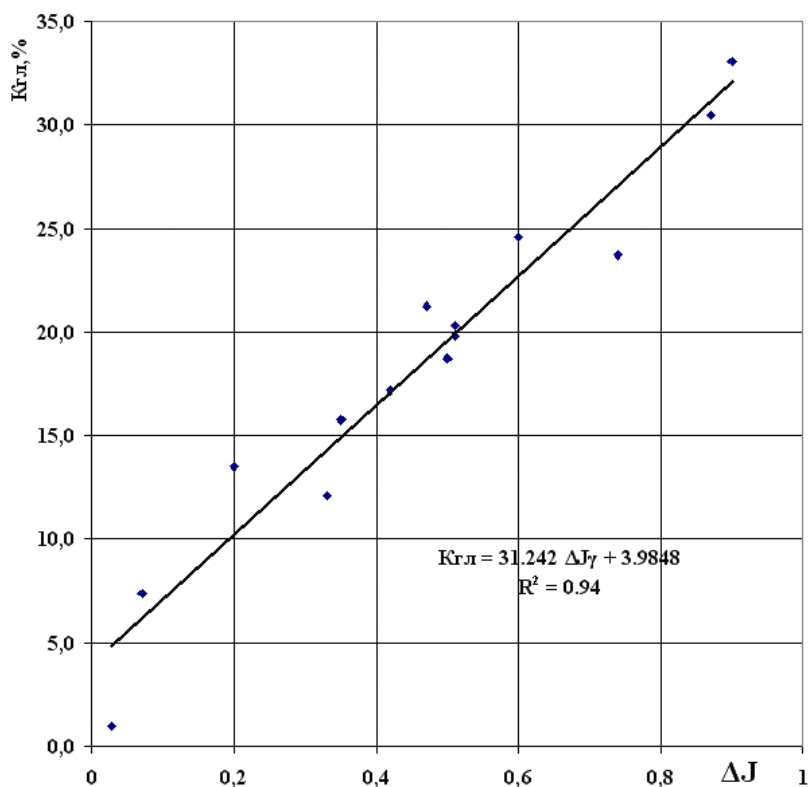


Рис.5. Графік залежності  $K_{gr}$  від  $\Delta J$  для сармат-баденських відкладів Передкарпаття

### 3.2. Визначення коефіцієнтів пористості за даними методів ПС і ГК

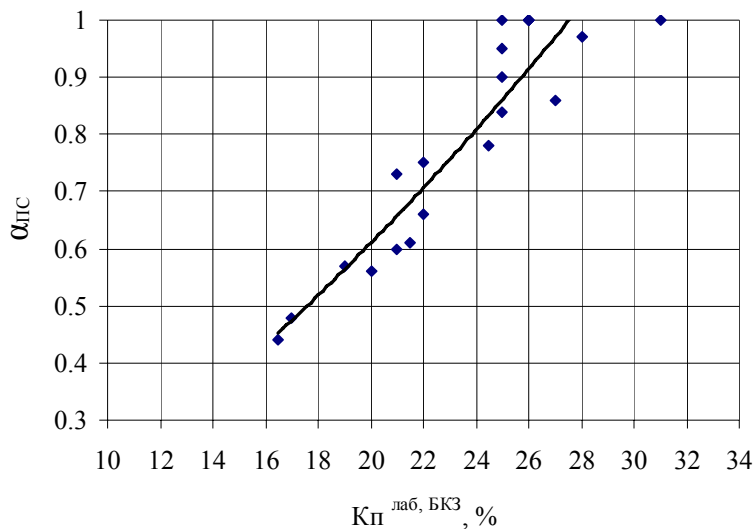


Рис.6. Залежність  $\alpha_{PS}=f(K_p)$  для нижньосарматських відкладів Хідновицького родовища



Для побудови графічної залежності  $\alpha_{\text{ПС}}=f(K_{\text{П}})$  для колекторів Хідновицької площі були використані пласти з мінімальною глинистістю і найбільшою пористістю. Графічна залежність (рис.6) описана рівнянням:

$$K_{\text{П}} = 19,7\alpha_{\text{ПС}} + 4,74, \quad (10)$$

Оскільки товщина окремих піщанистих прошарків є невеликою і крива ПС значною мірою знівельована, тож нами замість параметра  $\alpha_{\text{ПС}}$  використовувався параметр  $\alpha_{\text{ГК}}=1-\Delta I_{\gamma}$

### 3.3. Оцінка газонасиченості піщанисті порід за даними ГДС

Одним з важливих питань на площах Зовнішньої зони є визначення коефіцієнтів газонасиченості за даними методу опору. Для нижньо-сарматських відкладів у праці [3] рекомендується залежність (4), встановлена на зразках порід Летнянського газового родовища у камері при встановленому тиску з одноразовим визначенням залишкової водонасиченості і питомого електричного опору води.

Для порівняння величин  $K_{\text{Г}}$ , одержаних за даними опору з використанням залежності (4), ми проводили оцінку газонасиченості виділених колекторів у продуктивній частині розрізу через ефективну пористість. Для цього визначали коефіцієнти зв'язаної води  $K_{\text{В.З}}$  за залежністю (5). Цю залежність встановлено для неогенових відкладів Передкарпаття [4].

Отже, використавши залежність (5) за величиною  $K_{\text{В.З}}$  і  $K_{\text{П}}$  для колекторів у контурі газонасиченості, розраховуємо коефіцієнт ефективної пористості за формулою:

$$K_{\text{П.еф}} = K_{\text{П}}(1-K_{\text{В.З}}), \quad (11)$$

Звідси визначаємо максимально можливе значення  $K_{\text{Г.ММ}}$  за формулою:

$$K_{\text{Г.ММ}} = K_{\text{П.еф}}/K_{\text{П}} = 1-K_{\text{В.З}}. \quad (12)$$

### 4. Обґрунтування нижніх меж параметрів колекторів

Петрофізичні залежності між параметрами порід і зв'язки між продуктивністю та газопроникністю випробуваних об'єктів і їхніми фільтраційно-ємнісними параметрами мають кореляційний характер.

Для визначення граничних параметрів порід нами використані дослідження на керновому матеріалі для Летнянського родовища, зокрема залежності між пористістю, проникністю і ефективним радіусом пор.

Залежність між фазовою і абсолютною проникністю (рис.7) має такий вигляд:

$$K_{\text{пр}}^{\text{абс}} = 8,1557 \cdot K_{\text{пр.ф}}^{0,66881}, \quad R^2=0,9662 \quad (13)$$

де  $K_{\text{пр}}^{\text{абс}}$  – абсолютна проникність, мД;

$K_{\text{пр.ф}}$  – фазова проникність за гексаном, мД.

Згідно з цією залежністю абсолютна проникність величиною  $0,1 \cdot 10^{-3}$  мкм<sup>2</sup> відповідає значенню  $K_{\text{пр.ф}}=0,065 \cdot 10^{-3}$  мкм<sup>2</sup>. Цю величину слід вважати мінімально можливою, оскільки за графіком  $Q_{\text{Г}}=f(K_{\text{пр.ф}})$  при значенні  $K_{\text{пр.ф}}=0,065 \cdot 10^{-3}$  мкм<sup>2</sup> одержані промислові дебіти газу від

5,77 тис.м<sup>3</sup>/д (св. 5-Вижомлянська) до 8,57 тис.м<sup>3</sup>/д (св. 1-Вижомлянська) (див. рис.8). За графіком (рис.9) величина  $K_{пр}^{абс}=0,1 \cdot 10^{-3}$  мкм<sup>2</sup> відповідає значенню середнього радіусу пор  $K_{еф}=0,5$  мкм, що згідно з [4] може бути прийняте за межеве значення.

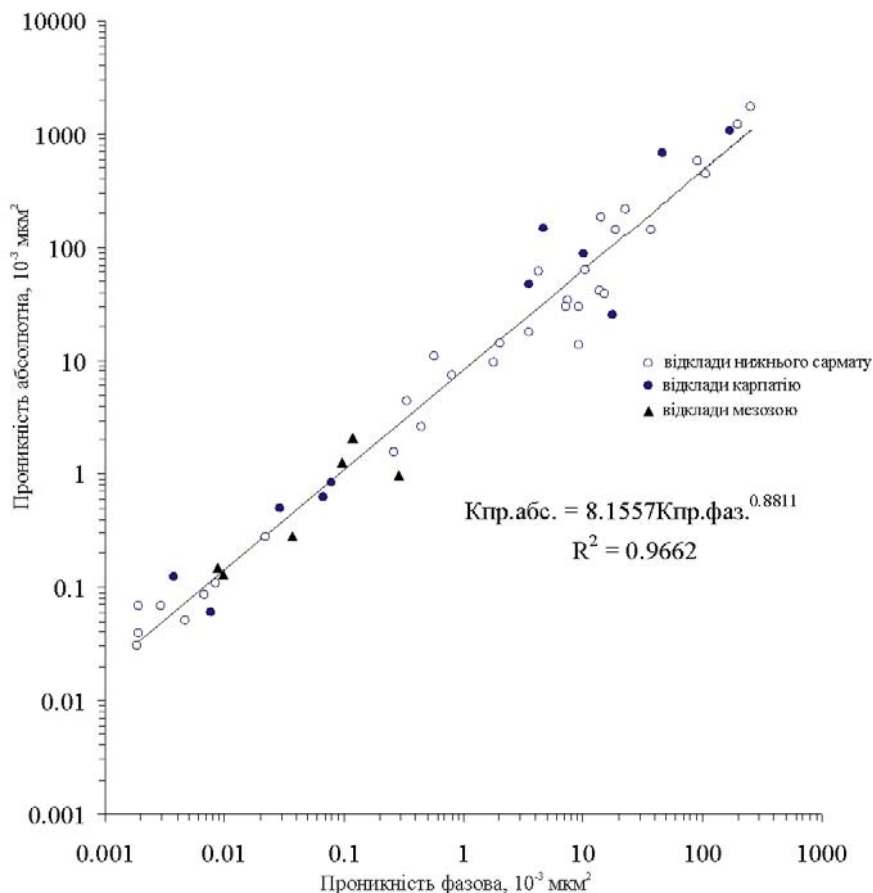


Рис.7. Залежність абсолютної проникності від фазової порід-колекторів Летнянського газового родовища

На представницькій виборці взірців на Летнянському родовищі визначена залишкова водонасиченість методом капілярметрії, а також вивчена залежність ємнісно-фільтраційних властивостей від кількості і складу цементу. За наявності цементу в породі 25% і більше, порода становиться неколектором.

Визначення нижніх меж параметрів колекторів проводилося за методикою, яка полягає в тому, що абсолютна проникність визначається за графіком її залежності від фазової проникності (рис.7 і 10). Таким чином, нижні межі значень фазової проникності, відкритої пористості та залишкової водонасиченості, для нижньосарматських колекторів складають:

$K_{пр.ф} = 0,065 \cdot 10^{-3} \text{ мкм}^2$ ;  $K_{пр}^{abc} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ мкм}^2$ ;  $K_{п.гр} = 9,0\%$ ;  $K_{в.з} = 65\%$ .

Отже, вказані нижні межі значень пористості та водонасиченості за аналогією можуть бути використані і для колекторів Хідновицького газового родовища. Умови осадоутворення одновікових нижньосарматських відкладів у межах вказаних родовищ були адекватними, а фізико-літологічні властивості порід у розрізах свердловин є ідентичними.

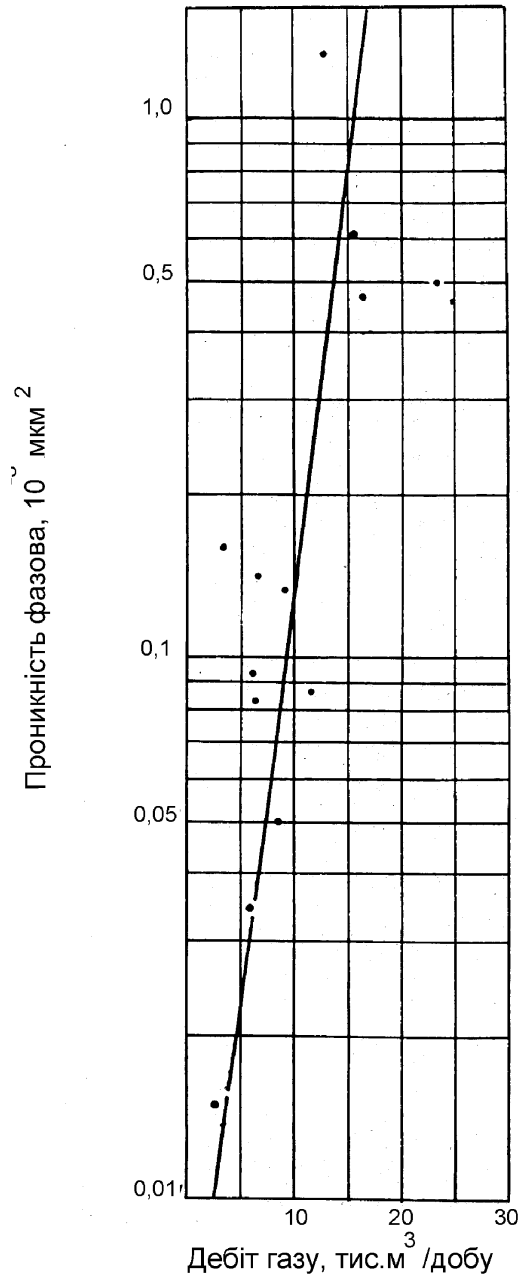


Рис.8. Залежність дебіту газу від фазової проникності по КВТ Вижомлянського газового родовища

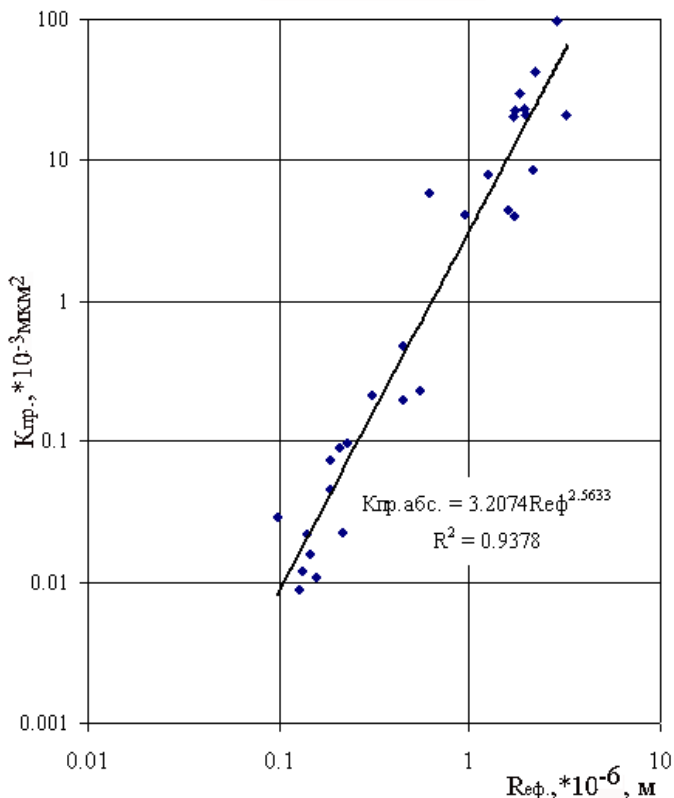


Рис.9. Залежність між абсолютною проникністю і ефективним радіусом пор (N1s1). Вижомлянське газове родовище

**4.1 Виділення колекторів і визначення ефективних товщин**

Ефективну товщину колекторів з однорідною нафто- або газонасиченістю визначають як приведену до вертикальної свердловини різницю між загальною товщиною і сумарною товщиною заглинзованих прошарків – неколекторів. Якщо позначити частку глинистих (або ущільнених) прошарків у пласті через  $X_{гл}$  або  $X_{щ}$ , то ефективна товщина колектора може бути обчислена за такою формулою:

$$h_{ef} = H_{зар}(1 - X_{гл(щ)}). \tag{14}$$

Частку сумарної товщини глинистих (ущільнених) прошарків визначають за даними ГК і БМК. Інколи використовують криві мікрозондів і мікрокавернометрії. Якщо тонкопрошарковий пласт вміщує одночасно глинисті і ущільнені прошарки, то ефективна товщина знаходиться як

$$h_{ef} = H_{зар}(1 - X_{гл} - X_{щ}). \tag{15}$$

В основу виділення тонких глинистих прошарків за даними ГК нами покладена величина  $\Delta I_{\gamma,гр}$  з врахуванням граничного значення  $K_{гл,гр} = 25\%$ . Підставляючи це значення в формулу (8), знаходимо  $\Delta I_{\gamma,гр} = 0,67$ .

Для пісковиків даного родовища мінімальне значення  $\Delta I_{\gamma_{\min}}$  становить 3,3 мкР/год (усереднене по всіх свердловинах), а максимальне значення в глинах  $\Delta I_{\gamma_{\max}}=12$  мкР/год. Для встановлення  $\Delta I_{\gamma_{\text{гп}}}$  використовується рівняння подвійного різницевого параметра:

$$\Delta I_{\gamma} = \frac{I_{\gamma} - I_{\gamma_{\min}}}{I_{\gamma_{\max}} - I_{\gamma_{\min}}} \quad (16)$$

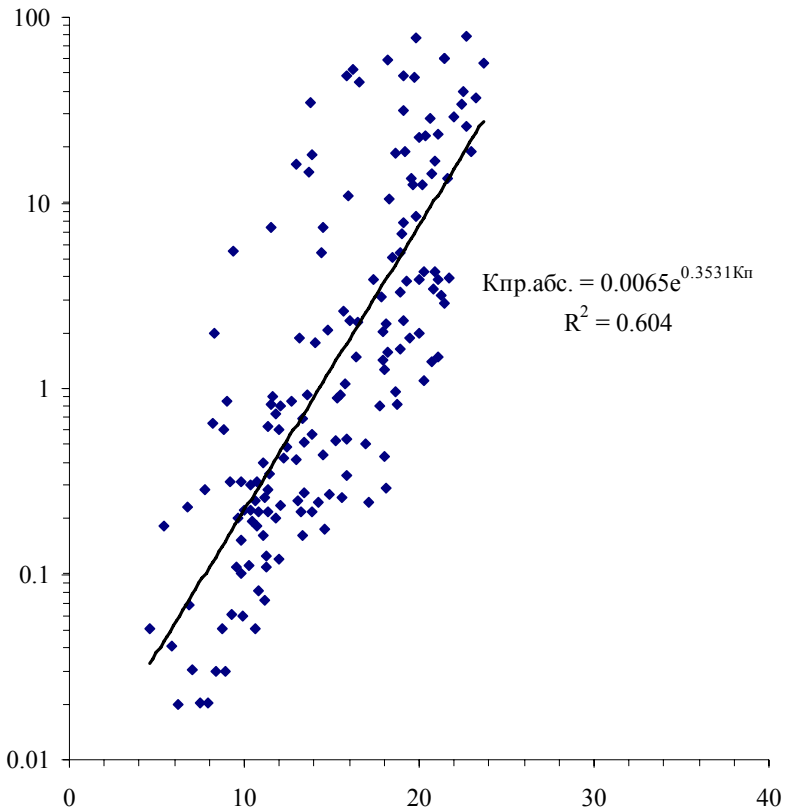


Рис.10. Зв'язок між пористістю та абсолютною проникністю сарматських колекторів Вижомлянського і Летнянського газових родовищ

Після обчислення за цим рівнянням отримаємо  $I_{\gamma_{\text{гп}}}$  рівненної лінії, що становить 9,13 мкР/год. Враховуючи те, що в окремих свердловинах  $I_{\gamma_{\min}}$  коливається від 2,8 до 4,0 мкР/год, нами прийнято граничне значення для колекторів  $I_{\gamma_{\text{гп}}}=9,5$  мкР/год.

На діаграмах гамма-каротажу наводились рівненні лінії  $I_{\gamma_{\text{гп}}}$  і до колекторів відносились виділені прошарки пісковиків, гамма-активність яких не перевищувала 9,5 мкР/год. У пластах, де поряд з глинистими прошарками знаходились ущільнені різновиди пісковиків і алевролітів, вони вилучались із загальної товщини пласта. Для ідентифікації щільних прошарків використовувались криві БМК, БК, МК, на яких ущільнені прошарки за опором перевищували опір проникливих прошарків.

Товщина пористих піщанистих прошарків в продуктивній частині розрізу становила 0,2-0,4 м.

Виділення порових колекторів за даними непрямих кількісних критеріїв обумовлено такими передумовами.

В досліджуваному розрізі породи-колектори відрізняються від неколекторів значеннями фільтраційно-ємнісних властивостей, а відповідно і значеннями геофізичних характеристик, які відображають пористість ( $\Delta T_{гр}$ ,  $\Delta I_{пг-гр}$ ,  $R_{п.гр}$ ) і глинистість ( $\alpha_{пс.гр}$ ,  $\Delta I_{г.гр}$ ) порід.

Згідно з працею [5] одним з петрофізичних способів встановлення граничних значень може послужити зіставлення коефіцієнтів пористості з залишковою водонасиченістю  $K_{в.з}$  гідрофільного колектора. За величиною  $K_{в.з}$  розраховують коефіцієнт ефективної пористості  $K_{п.еф}$  (11), що характеризує частку об'єму пор, яку можуть займати вуглеводні. Значення  $K_{п}$ , яке відповідає  $K_{в.з}=1$  або  $K_{п.еф}=0$ , можна приймати за  $K_{п.гр}$ . Воно є нижнім межовим значенням пористості для гідрофільного міжзеренного колектора, оскільки при  $K_{п}=K_{п.гр}$  гідрофільна порода не містить вуглеводнів. Однак при виділенні промислово-продуктивних колекторів для підрахунку запасів і проектування розробки покладу потрібно користуватись критерієм визначення  $K_{п.гр}$ , який відповідає значенню  $K_{в.з}=K_{в}-K_{г.з}$ , де  $K_{г.з}$  – коефіцієнт залишкової газонасиченості.

Дослідження відносної фазової проникності при двофазній фільтрації (вода+газ) в колекторах з різною проникністю показує, що зі зменшенням  $K_{пр}$  коефіцієнт  $K_{в.з}$ , який характеризує наявність зв'язаної води у породі, закономірно зростає, звужуючи область двофазної фільтрації, тоді як межа, що характеризується значенням  $K_{в}=K_{в}^{**}$  для різних колекторів, практично не переміщується зі зменшенням  $K_{пр}$  і відповідає діапазону  $K_{в}^{**}=0,7-0,85$  [5] в різних колекторах. Таким чином, значення  $K_{в}^{**}=1-K_{г.з}$  у першому наближенні можна прийняти сталим і воно окреслює діапазон  $K_{в.з}<K_{в}<1$ , для якого рух газу у порах неможливий. При цій умові порода з  $K_{в.з}\geq K_{в}^{**}$ , яка вміщує газ в об'ємі пор  $K_{п}(1-K_{в.з})$ , не дає припливу пластового флюїду під час випробування.

Для Вижомлянської площі залежність між  $K_{в.з}$  і  $K_{п}$  має такий вигляд:

$$K_{в.з}=0,04 K_{п}^{-1,7}. \quad (17)$$

Згідно з цією формулою при  $K_{п.гр}=9\%$  значення  $K_{в.з.гр}=67\%$  майже відповідає значенню  $K_{в.з.гр}$  і для аналогічних відкладів Летнянського родовища.

Для встановлення ефективності геофізичних методів під час проведення обчислень коефіцієнтів пористості за даними ГДС були використані методи опору (БКЗ, БК, БМК), метод потенціалів самочинної поляризації (ПС), методи акустичного і гамма-каротажу. Для цього використовувались петрофізичні залежності, наведені у попередніх розділах. Нижче наводимо результати таких обчислень (див. таблицю) у свердловинах Хідновицького газового родовища.



*Література*

1. Ханин А.А. Петрофизика нефтяных и газовых пластов / А.А.Ханин. – М.: Недра, 1976. – С. 295.
2. Швецов М.С. Петрография осадочных пород / М.С.Швецов. – М.: Гостоптехиздат, 1948. – С. 416.
3. Грицишин В.И. “Комплексное изучение коллекторов нефтеносных и газоносных месторождений Предкарпатья”, отчет / В.И.Грицишин. – Ивано-Франковск, ИФИНГ, 1987. – С. 68-81.
4. Грицишин В.І. Петрофізична характеристика колекторів нафтових і газових родовищ Карпатського регіону і Дніпровсько-Донецької западини / В.І.Грицишин. – Івано-Франківськ: Лілея НВ, 2012. – С. 273.
5. Вендельштейн Б.Ю. Методические рекомендации по определению подсчетных параметров залежей нефти и газа по материалам геофизических исследований скважин с привлечением результатов анализов керна, опробования и испытаний продуктивных пластов / Б.Ю.Вендельштейн, В.Ф.Козяр, Г.Г.Яценко. – Калинин, 1990. – 261 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 11.10.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**, д.т.н., професором **Дорошенко В.М.**(м. Київ)*

**PHYSICAL PETROLEUM PROPERTIES OF OIL AND GAS COLLECTORS OF PRECARPATYA**

**V. I. Grytsyshyn, S. F. Kucher**

*Carpathians management of geophysical works;  
76000, Ivano-Frankivs'k, O. Blavatsky str., 22;  
ph. +380 (342) 77-55-63; e-mail: kugrvat@gmail.com*

*The question of study of physical petrography parameters of breeds-collectors of low Sarmat deposits of the Bilche-Volitsky area of the Pre-Carpathians bending is considered with the use of data of kern and results of geophysical researches of mining holes. Data of litology petroleum physical properties of breeds are confronted with geology-geophysical parameters, that allowed to conduct estimation of account parameters on the Hidnovitsky gas deposit. Il. 10, Bibl. 5*

**Keywords:** *collector, petroleum physical parameters, porosity, permeability, specific electric resistance, speed of resilient vibrations.*



## НОВІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ ТЕРТЯ В ГАЛЬМІВНИХ МЕХАНІЗМАХ БУРОВИХ УСТАНОВОК

**Л. І. Криштопа, С. І. Криштопа, І. Б. Прунько, І. М. Богатчук**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-24-64; e-mail: [retes@mail.ru](mailto:retes@mail.ru)*

*Представлено перспективний напрям підвищення ефективності бурових установок за рахунок автоматизації процесів гальмування бурових лебідок на основі широкого впровадження електронних і комп'ютерних технологій. Виконано постановку завдання і сформульовано основні принципи побудови автоматизованих тормозних систем. Основою запропонованого підходу є комплексне застосування електронних пристроїв для оптимізації процесу гальмування при виконанні спуско-піднімальних операцій.*

**Ключові слова:** *автоматизації процесів гальмування, бурова лебідка, електронні пристрої, комп'ютерні технології, виконанні спуско-піднімальні операції.*

Автоматизація спуско-піднімальних операцій з метою мінімізації витрат часу на проведення вказаних робіт є важливою народно-господарською задачею. Це пов'язано з тим, що для існуючого рівня техніки і технології буріння тривалість спуско-піднімальних робіт складає більшу частину від загального календарного часу і для глибоких свердловин перевищує тривалість механічного буріння в 3-3,5 рази [1].

Перспективним напрямком удосконалення спуско-піднімальних операцій є автоматизації процесів гальмування на основі широкого впровадження електричних, електронних систем та комп'ютерних технологій, бурхливий розвиток яких спостерігається останнім часом. Це пов'язано з тим, що людина, при ручному керуванні процесом гальмування, априорі не здатна забезпечити оптимальність цього процесу в залежності від дії різних чинників. Для порівняння на рис.1 наведена діаграма опускання при ручному і автоматичному гальмуванні бурильної колони на довжину однієї свічки.

Кожний цикл діаграми опускання бурильної колони на довжину однієї свічки складається з трьох періодів: періоду розгону  $t_p$ , протягом якого колона збільшує швидкість руху у вільному падінні; періоду сталої швидкості руху  $t_c$ ; періоду уповільнення руху до повної зупинки  $t_y$ . Для забезпечення мінімізації витрат часу на проведення спуско-піднімальних робіт система автоматизованого керування про-

цесом гальмування повинна забезпечувати опускання бурильної колони з максимально можливою в залежності від навантаження на гаку постійною швидкістю та мінімальний час гальмування при зупинці колони. Автоматизована система, у порівнянні з ручним керуванням, здатна точніше підтримувати максимально можливу швидкість опускання бурильної колони та пізніше починати гальмування колони під час третього періоду опускання, за рахунок чого і буде досягтися економія часу.

Проведений аналіз наукових публікацій та літератури за останні 15-20 років з проблематики автоматизації процесу гальмування під час виконання спуско-піднімальних робіт дає підстави для висновку, що, незважаючи на окремі результати, спрямовані на вирішення локальних задач [2,3], на даний час відсутня методологія автоматизації та оптимізації процесів гальмування під час опускання бурильних колон з врахуванням технічних можливостей сучасної електронної та комп'ютерної апаратури. Така ситуація пов'язана, переважно, з наступним.

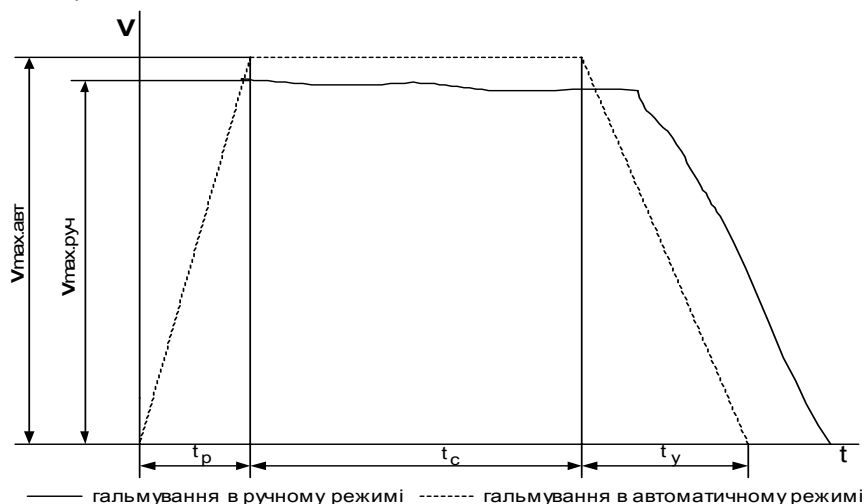


Рис.1. Діаграма опускання бурової колони на довжину однієї свічки

По-перше, відносна тривалість процесів гальмування (загальна тривалість періоду сталої швидкості руху  $t_c$  та періоду уповільнення руху до повної зупинки  $t_y$ ) є порівняно невисокою і складає 5-10% від загального часу спуско-піднімальних операцій. Тому цьому напрямку поки що приділялась недостатня увага. Але на сьогоднішній час конструкції механізмів досягли достатньо високого рівня досконалості, тому різке покращення їхніх технічних характеристик неможливе, тож необхідно використовувати всі можливі резерви збільшення їхньої ефективності.

По-друге, до недавнього часу електронні компоненти мали відносно високу вартість та недостатню надійність. Але в даний час ситуація в цьому плані різко покращилась.

По-третє, широкому використанню електронних систем керування заважає відсутність відповідних виконуючих механізмів, оскільки безпосередньо керувати механічним, гідравлічним або пневматичним приводом комп'ютерні системи не можуть.

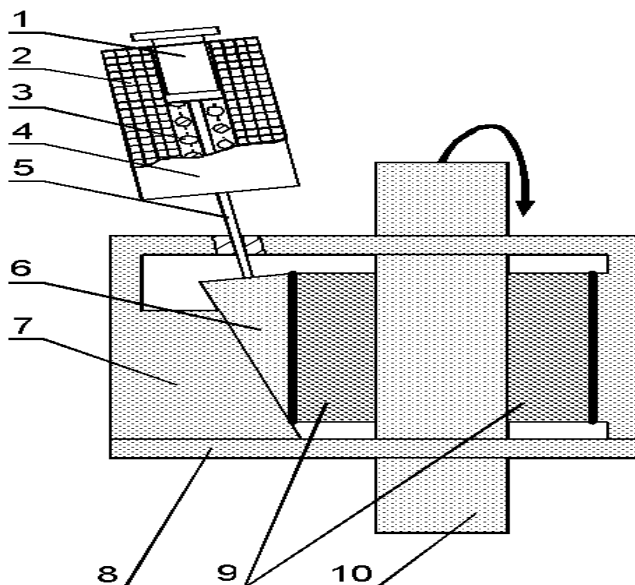
З метою використання сучасних електронних технологій для керування спуско-піднімальними операціями необхідно замість традиційних гальм з механічним або пневматичним приводом використовувати гальма з електричним приводом, перевага яких полягає в тому, що електронні системи досить просто можуть безпосередньо керувати роботою гальмівних пристроїв з електричним приводом. На сьогоднішній день в існуючих бурових установках електричні гальмівні пристрої використовуються тільки в якості допоміжних і тому для автоматизації процесів гальмування актуальною є задача створення основних гальм бурових лебідок з електроприводом.

Впровадження електричного приводу одночасно дозволяє успішно реалізовувати ще одну задачу – використовувати в якості основних гальм дискові гальмівні механізми, оскільки електричний привод може з однаковою ефективністю керувати будь-яким типом гальмівних механізмів. Дискові гальмівні механізми мають перед стрічково-колодковими гальмами цілий ряд переваг: менші масу та габарити; менші зазори між дисками та колодками в незагальмованому стані (0,1...0,5 мм для дискових гальм та 2...4 мм для стрічково-колодкових гальм) та відповідно менший хід гальмівної колодки дозволяють підвищити швидкодію і передавальне відношення гальмівного приводу; більш рівномірне спрацювання фрикційних матеріалів, так як тиск по поверхні пари тертя диск-колодка розподіляється рівномірно; більший гальмівний момент, який створюється за рахунок зрівноваження сил, що діють з боку колодок на диск; більшу стабільність гальмівного моменту, що розвивається на парах тертя. Найбільш актуальною перевагою дискових гальм, у порівнянні з стрічково-колодковими, є можливість забезпечення більш ефективного відведення тепла від поверхонь тертя, особливо при використанні вентильованих дискових механізмів.

В даний час в світі тільки починається перехід на дискові гальма у бурових лебідках. Так, для мобільних бурових установок зараз в наявності є лише дві таких моделі лебідок [4].

Використання гальмівних систем з електронною системою керування електричним приводом та дисковими гальмівними механізмами дозволяє створити конструкції гальм зі значно кращими у порівнянні з традиційними конструкціями експлуатаційними показниками. Наприклад, можливо значно збільшити гальмівні моменти з одночасним

зменшенням витрат потужності на привод гальмівних механізмів. Будова однієї з перспективних конструкцій, яку достатньо легко можна реалізувати на практиці, наведена на рис.2. Дисковий гальмівний механізм приводиться в дію електричним приводом, який складається з якоря 1, виготовленого з магнітного матеріалу, електромагнітної обмотки 2, відтискної пружини 3, корпусу 4, штоку 5 з немагнітного матеріалу. Гальмівний механізм складається з рухомої колодки 6, виготовленої у формі клинця, нерухомої колодки 7, плаваючого супорта 8, гальмівних накладок 9 та вентилязованого гальмівного диска 10.



1 – якор; 2 – електромагнітна обмотка; 3 – відтяжна пружина; 4 – корпус; 5 – шток; 6 – рухома колодка; 7 – нерухома колодка; 8 – плаваючий супорт; 9 – гальмівні накладки; 10 – гальмівний диск

Рис.2. Перспективна конструкція дискового гальмівного механізму з електричним приводом

Принцип роботи конструкції полягає в тому, що шток гальмівного приводу 5 натискає не безпосередньо на гальмівні накладки 9, а через проміжний клинець 6. Тому при гальмуванні гальмівний диск 10 притискає сам до себе гальмівні накладки 9: одну безпосередньо, а другу – через колодку 7 та плаваючий супорт 8.

На першій стадії гальмування блок керування гальмівною системою подає на електромагнітну обмотку привода максимальний початковий струм. На другій стадії, після різкого збільшення гальмівного моменту за рахунок ефекту самопритискання гальмівних накладок, струм обмотки керуючим електронним блоком значно зменшується. В подальшому величина струму електромагнітної обмотки регулюється

блоком керування в залежності від темпу уповільнення гальмівного диску. Наведена конструкція дозволить значно скоротити витрати потужності на привод гальмівних механізмів у порівнянні з пневматичним та гідравлічним приводом.

В запропонованій конструкції для реалізації схеми електроприводу використовується електромагнітна обмотка з натискним якорем. Перевага цієї системи полягає в тому, що вона конструктивно є відносно простою. Але для створення значного магнітного потоку, з метою реалізації великих зусиль на натискному якорі необхідно мати порівняно великі будівельні об'єми статора. Тому, в подальших, більш досконаліх конструкціях, найбільш доцільно як виконуючий механізм використовувати електричний двигун з понижуючим редуктором та натискним шпинделем.

Але з метою мінімізації витрат на переобладнання гальмівної системи бурової лебідки електричний привод основних гальм як стрічково-колодкових, так і дискових, може бути реалізований і в інших варіантах. На першому етапі, наприклад, можливо оснащувати пневмоциліндри гальмівних механізмів з пневмоприводом керуючими електромагнітними клапанами. Проте треба враховувати, що такі системи будуть дещо ускладнені та мати порівняно низьку швидкодію, а це є небажаним для відносно швидкоплинних процесів гальмування.

З метою комплексного вирішення автоматизації процесу гальмування електронна керуюча система також повинна керувати допоміжними гальмами. Найбільш доцільно використовувати електричні допоміжні гальма, які відрізняються зручністю керування, стабільністю режиму роботи, можливістю плавного регулювання гальмівного моменту. Гальмівний момент електричного допоміжного гальма можливо регулювати зміною величини струму обмотки збудження комп'ютером через реле керування.

Можливе також використання для автоматизованої гальмівної системи як допоміжні гідравлічні гальма. Як відомо, зміна величини гальмівного моменту допоміжного гідравлічного гальма досягається регулюванням рівня рідини в ньому. Тому для автоматичного керування гальмівним моментом гідравлічного гальма необхідно за допомогою електронного керуючого пристрою, в залежності від ваги бурильної колони, змінювати рівень рідини в гальмі. Для цього гальмівну систему необхідно додатково обладнати давачами рівня рідини та частоти обертання гальмівного барабану (диска). Зміна рівня рідини буде відбуватись з допомогою насоса і залежатиме від команд електронного керуючого блоку.

Для створення автоматизованої гальмівної системи необхідно вирішити ще одну задачу. Розробити конструкції та виготовити на сучасній елементній базі вимірювальні давачі, наприклад, швидкості і переміщення бурової колони, частоти обертання гальмівного бараба-

ну (диска). Ці давачі повинні бути максимально простими конструктивно та мати мінімальну інерційність. Перевагою сучасних електронних комплектуючих є достатньо висока надійність, що особливо важливо для бурових робіт.

На рис.3 наведена загальна принципова схема системи гальмування бурової лебідки з електронною системою керування. Схема повинна складатися з давачів частоти обертання гальмівного барабану 1 (ДЧ), швидкості руху колони труб 2 (ДШ), переміщення колони 6 (ДПК), блока керування 3 (БК) з відповідним програмним забезпеченням, допоміжного електричного гальма 5 з аналогово-цифровим перетворювачем та реле керування допоміжним електричним гальмом 4 (РКДГ), основного електричного гальма 8 з аналогово-цифровим перетворювачем та реле керування основним електричним гальмом 7 (РКОГ). Для збільшення надійності автоматизованої системи гальмування всі давачі повинні бути продубльовані.

В даний час для дослідження можливості практичного використання електронних гальмівних систем в нафтогазовій галузі на кафедрі нафтогазового технологічного транспорту створюється лабораторна модель лебідки бурової установки з електричним гальмівним приводом та електронною системою керування. В першу чергу планується створення моделі лебідки з дисковим гальмівним механізмом та системою самопідсилення гальмівного моменту.

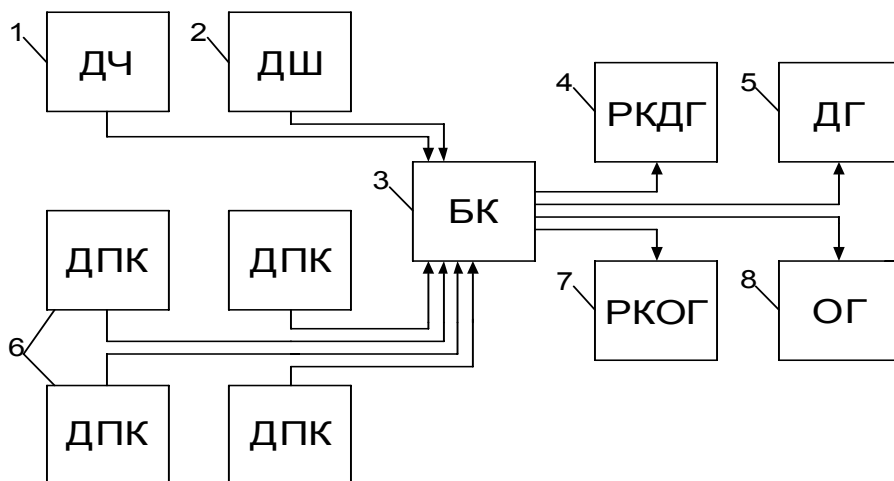


Рис.3. Принципова схема системи гальмування бурової лебідки з електронною системою керування

### **Висновки**

Для удосконалення спуско-піднімальних операцій необхідним є широке впровадження автоматизованих систем керування процесом гальмування. Подальше удосконалення гальмівних систем можливе тільки на основі широкого використання електронних систем та

комп'ютерних технологій. Для впровадження керуючих комп'ютерних систем необхідне застосування як виконавчих механізмів гальмівних пристроїв з електричним приводом. Для подальшого збільшення ефективності гальмівних систем необхідне широке використання дискових гальмівних механізмів.

### *Література*

1. Новое поколение буровых установок Волгоградского завода в Западной Сибири / В.Г.Колчерин, И.В.Колесников, В.С.Копилов, Ю.Л.Баренбойм. – Сургут, ГУП ХМАО “Сургутская типография”, 2000. – 320 с.
2. Устройство оптимизации спуско-подъемных операций в бурении: А.с. 1492030 СССР, Е21В 44/00 / В.А.Бражников, Н.И.Заварзин, А.К.Рахимов, М.И.Сергеев (СССР). – №4322199/23; Заявлено 26.10.87; Опубл. 07.07.89; Бюл. №25. – 3 с.
3. Устройство автоматического управления электротормозной машиной бурового агрегата: А.с. 1082927 СССР, Е21В 19/00/ Б.М.Парфенов, С.В.Колодезев, А.И.Коган, В.В.Жиликов, С.А.Чекалина (СССР). – №3414170/22; Заявлено 25.03.82; Опубл. 30.03.84; Бюл. №12. – 3 с.
4. Крижанівський Є.І. Мобільні установки для буріння, ремонту і обслуговування свердловин: Монографія / Є.І.Крижанівський, Ю.В.Міронов, Л.І.Романишин. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 209 с.: іл.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**, д.т.н., професором **Драганчук О.Т.**(м. Київ)*

## **NEW METHODS OF OPTIMIZATION OF PROCESSES OF FRICTION IN THE BRAKE MECHANISMS OF BORING OPTIONS**

**L. I. Kryshchtopa, S. I. Kryshchtopa, I. B. Prunko, I. M. Bogachuk**

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;*

*ph. +380 (03422) 4-24-64; e-mail: retes@mail.ru*

*The perspective direction of rise of efficiency of drill units is represented at the expense of automation of processes of braking of drilling hoists on the basis of wide implantation of electronic and computer technologies. The setting of the task is fulfilled and the principles of constructing of the optimized brake assemblies are formulated. A ground of the proposed approach is the complex application of electronic devices for optimization of the process of braking at execution of elevation.*

**Key words:** *automations of processes of braking, boring drilling hoist, electronic devices, computer technologies, implementation low-lifting operations.*

УДК 622.692.4

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЗОВНІШНІХ ЧИННИКІВ НА ТЕМПЕРАТУРНИЙ ТА ГІДРАВЛІЧНИЙ РЕЖИМИ НАФТОПРОВОДУ

**М. П. Возняк, Л. В. Возняк, Г. М. Кривенко,  
С. О. Кривенко, Ю. Я. Мойсюк**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (0342) 72 71 39; e-mail: [vozniak@tvnet.if.ua](mailto:vozniak@tvnet.if.ua)*

*Нафтопроводи можуть бути прокладені по місцевості, на якій ґрунти неоднорідні по довжині траси, а тому мають різні теплофізичні характеристики.*

*В роботі досліджено вплив зміни по довжині нафтопроводу теплопровідних властивостей ґрунту, який оточує трубопровід, на температурний і гідравлічний режими нафтопроводу. Аналіз результатів дослідження показав, що розрахунки режимів роботи неізотермічного нафтопроводу необхідно проводити по ділянках, в межах яких коефіцієнт теплопровідності ґрунту є сталою величиною.*

**Ключові слова:** *нафтопровід, температура, коефіцієнт теплопровідності.*

На температурні та гідравлічні процеси неізотермічного нафтопроводу впливає багато чинників, у тому числі і зовнішні. Так, трубопроводи можуть бути прокладені по місцевості, на якій ґрунти неоднорідні по довжині траси, а тому мають різні теплофізичні характеристики. Наприклад, неізотермічний нафтопровід Долина–Дрогобич, який прокладено у передгір'ї Карпат, на своєму шляху перетинає ряд гірських річок і має біля десяти ділянок довжиною від одного до десяти кілометрів, у межах яких теплопровідність ґрунту відрізняється майже у два рази. Відомо, що на загальний коефіцієнт теплопередачі від нафти у ґрунт суттєво впливає повний коефіцієнт тепловіддачі від зовнішньої поверхні ізоляції в оточуюче середовище  $\alpha_2$ , який, у свою чергу, залежить від теплофізичних властивостей ґрунту.

Як правило, при теплофізичних розрахунках нафтопроводів, які експлуатуються при стаціонарному режимі, повний коефіцієнт теплопередачі приймають постійним по довжині трубопроводу. У тих випадках, коли ґрунти по трасі неоднорідні, всю ділянку між тепловими станціями розбивають на ділянки, у межах яких теплопровідність ґрунту постійна. Після цього визначають середньозважене значення коефіцієнта теплопровідності ґрунту за формулою [1,2]



$$\lambda_{\text{н\ddot{o}}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n \lambda_{\text{а}i} \cdot l_i, \quad (1)$$

де  $L$  – довжина трубопроводу між тепловими станціями;

$\lambda_{\text{а}i}$  – коефіцієнт теплопровідності ґрунту на ділянці довжиною  $l_i$ .

Значення температур по довжині трубопроводу, які визначені із урахуванням формули (1), будуть відрізнятися від температур, знайдених по ділянках, але кінцева температура буде однаковою. Оскільки на гідравлічний режим (на розподіл тиску по довжині нафтопроводу) впливає температурний режим, то необхідно визначити ступінь впливу цього фактора на величину втрат напору у трубопроводі.

Дослідження впливу зміни коефіцієнта теплопровідності ґрунту по довжині на температурний та гідравлічний режими проведемо для нафтопроводу з такими параметрами: діаметр трубопроводу –  $273 \times 9$  мм, довжина – 60 км, глибина закладання осі трубопроводу  $h_0 = 1$  м, початкова температура нафти  $t_{II} = 70^\circ\text{C}$ , температура застигання нафти  $t_s = 18^\circ\text{C}$ , температура ґрунту в непорушеному тепловому стані  $t_0 = 2^\circ\text{C}$ , масова продуктивність – 200 т/год, по нафтопроводу перекачується нафта Долинського родовища.

Значення коефіцієнтів теплопровідності ґрунту вздовж траси трубопроводу, які закладені в проектну документацію для розрахунку теплогідравлічного режиму нафтопроводу Долина – Дрогобич, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів теплопровідності ґрунту

Довжина, км	0-4	4-6	6-11	11-12	12-22	22-27	27-43	43-55	55-60
Коефіцієнт теплопровідності ґрунту, $\lambda_{\text{сп}i}$ , Вт/(м К)	0,95	1,75	0,95	1,75	0,95	1,75	0,95	1,75	0,95

Дослідження проведемо для двох нафт, фізичні властивості однієї аналогічні властивостям нафти, що перекачується нафтопроводом Долина – Дрогобич, другої приймемо такі ж, які розглянуті в роботі [3]. Фізичні властивості нафти наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Фізико-технічні властивості нафти

Параметр нафти	Значення властивостей нафти	
	Долинського родовища	рекомендованої [3]
Густина за $20^\circ\text{C}$ , кг/м <sup>3</sup>	842,7	940
В'язкість за:		
$20^\circ\text{C}$ , мм <sup>2</sup> /с	28	13,5
$40^\circ\text{C}$ , мм <sup>2</sup> /с	6,1	2,5
$60^\circ\text{C}$ , мм <sup>2</sup> /с	5,4	1,7

Температуру на відстані  $x$  від початку нафтопроводу визначаємо за формулою Шухова

$$t_x = t_o + (t_n - t_o) \cdot e^{-\frac{K \cdot \pi \cdot D \cdot x}{M \cdot c_p}}, \quad (2)$$

де  $t_x$  – температура нафти на відстані  $x$  від початку ділянки;

$t_n$  – температура нафти на початку ділянки;

$K$  – повний коефіцієнт теплопередачі від нафти в оточуюче середовище;

$D$  – внутрішній діаметр нафтопроводу;

$M$  – масова продуктивність нафтопроводу;

$c_p$  – питома масова теплоємність нафти при сталому тиску.

Повний коефіцієнт теплопередачі  $K$  визначаємо за формулою

$$\frac{1}{K \cdot D} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot D} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{D_{306}}{D} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot D_{306}}, \quad (3)$$

де  $\alpha_1$  – внутрішній коефіцієнт тепловіддачі (від нафти до стінки труби);

$\alpha_2$  – зовнішній коефіцієнт тепловіддачі (від стінки труби до навколишнього середовища);

$\lambda_i$  – коефіцієнт теплопровідності металу труби і шарів теплової ізоляції;

$D_{306}$  – зовнішній діаметр трубопроводу.

Переважно значення  $\alpha_1$  набагато більше від  $\alpha_2$ , тому при практичних розрахунках можна вважати, що  $K = \alpha_2$ . Якщо виконується умова  $\frac{2 \cdot h_0}{D_{306}} > 2$ , то з точністю до 1% зовнішній коефіцієнт тепловіддачі визначається за формулою [1]

$$\alpha_2 = \frac{2 \cdot \lambda_{zp}}{D_{306} \cdot \ln \frac{4 \cdot h_0}{D_{306}}}, \quad (4)$$

де  $\lambda_{zp}$  – коефіцієнт теплопровідності ґрунту.

Оскільки для нафтопроводу виконується умова  $\frac{2 \cdot h_0}{D_{306}} = \frac{2 \cdot 1}{0,273} = 7,33 > 2$ ,

то приймаємо, що  $K = \alpha_2$  і

$$K_{cp} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \cdot l_i. \quad (5)$$

Підставивши у формулу (5) значення  $\alpha_2$  із (4), отримаємо

$$K_{cp} = \frac{1}{L} \cdot \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{zpi} \cdot l_i}{D_{306} \cdot \ln \frac{4 \cdot h_0}{D_{306}}}. \quad (6)$$

Підставивши значення з таблиці 1 у формулу (6), визначимо

$$K_{cp} = \frac{2 \cdot (0,95 \cdot 4 + 1,75 \cdot 2 + 0,95 \cdot 5 + 1,75 \cdot 1 + 0,95 \cdot 10 + 1,75 \cdot 5 + 0,95 \cdot 16 + 1,75 \cdot 12 + 0,95 \cdot 5)}{0,273 \cdot \ln \frac{4 \cdot 1}{0,273} \cdot (4 + 2 + 5 + 1 + 10 + 5 + 16 + 12 + 5)} =$$

$$= 3,32 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Питому масову теплоємність нафти визначимо за формулою

$$C_p = \frac{31,56}{\sqrt{\rho_n}} \cdot (762 + 3,39 \cdot T_{сеп}), \quad (7)$$

де  $\rho_n$  – густина нафти за температури 293 К;

$T_{сеп}$  – середня температура на ділянці нафтопроводу.

В'язкість нафти за середньої температури нафти на ділянці визначимо за формулою Фогеля – Фульчера – Таммана.

$$\nu = \nu_{\infty} \cdot e^{\frac{b}{t-\theta}}, \quad (8)$$

де  $\nu_{\infty}$ ,  $b$ ,  $\theta$  – коефіцієнти, що визначаються за відомими значеннями в'язкості  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  – за температур  $t_1, t_2, t_3$ .

Втрати напору на ділянці довжиною  $l_i$  визначаємо за формулою [1]

$$h_w = 1,02 \cdot \Delta r \cdot \beta \cdot \frac{Q_{сеп in}^{2-m} \cdot \nu_{сеп in}^m}{D^{5-m}} \cdot l_i, \quad (9)$$

де 1,02 – коефіцієнт, що враховує втрати напору в місцевих опорах;

$\beta$ ,  $m$  – коефіцієнти, які залежать від режиму течії рідини;

$\Delta r$  – поправка на неізотермічність потоку в радіальному напрямку;

$Q_{сеп in}$  – об'ємна продуктивність нафтопроводу за середньої температури нафти на ділянці;

$\nu_{сеп in}$  – середньоінтегральне значення в'язкості нафти.

Приймаємо, що  $\Delta r = 1,05$ .

Середньоінтегральне значення в'язкості нафти  $\nu_{сеп in}^m$  визначимо за формулою Сімпсона

$$\nu_{сеп in}^m = \frac{1}{3 \cdot n} \cdot \left[ \nu_n^m + 4 \cdot (\nu_1^m + \nu_3^m + \dots + \nu_{n-1}^m) + 2 \cdot (\nu_2^m + \nu_4^m + \dots + \nu_{n-2}^m) + \nu_k^m \right], \quad (10)$$

де  $n$  – кількість відрізків, на які розбито ділянку нафтопроводу (повинно бути парне число відрізків);

$\nu_n$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості нафти за температури на початку нафтопроводу;

$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості нафти в кінці кожного відрізка.

За формулою (2) визначимо температуру нафти в кінці кожного із  $n$  відрізків нафтопроводу для трьох варіантів розподілу коефіцієнта теплопровідності ґрунту і відповідно повного коефіцієнта теплопередачі:

1) варіант 1:

на 0-20 км  $\lambda_{сеп} = 1,75 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , на 20-60 км  $\lambda_{сеп} = 0,95 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;

2) варіант 2:

на 0-40 км  $\lambda_{cp} = 0,95 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  , на 40-60 км  $\lambda_{сер} = 1,75 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  ;

3) варіант 3:

на 0-60 км  $\lambda_{cp} = \lambda_{сер} = 1,217 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}) = \text{const}$  ,  $K_{cp} = 3,32 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  .

Результати визначення характеру розподілу температури нафти вздовж трубопроводу наведені на рисунках:

- 1 для нафти Долинського родовища;
- 2 для нафти, властивості якої подаються в [3].

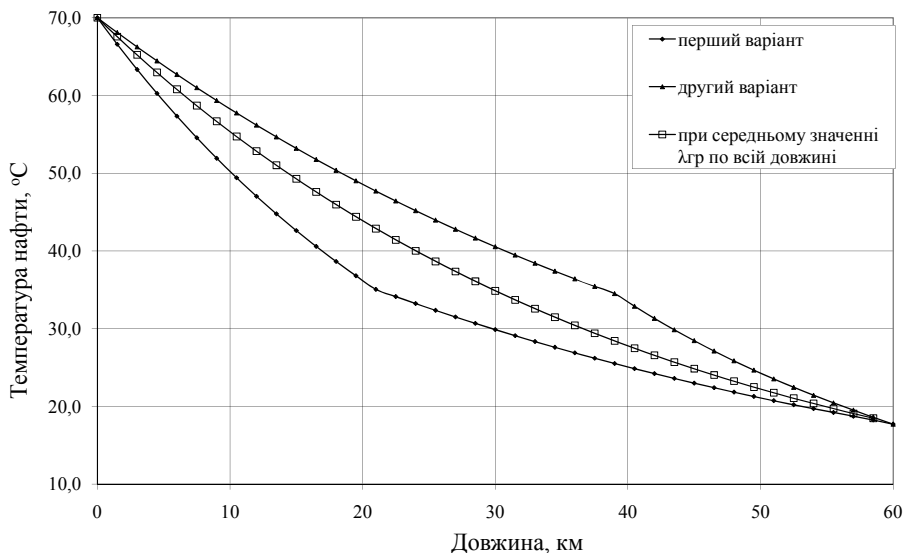


Рис.1. Зміна температури нафти по довжині трубопроводу при перекачуванні нафти Долинського родовища

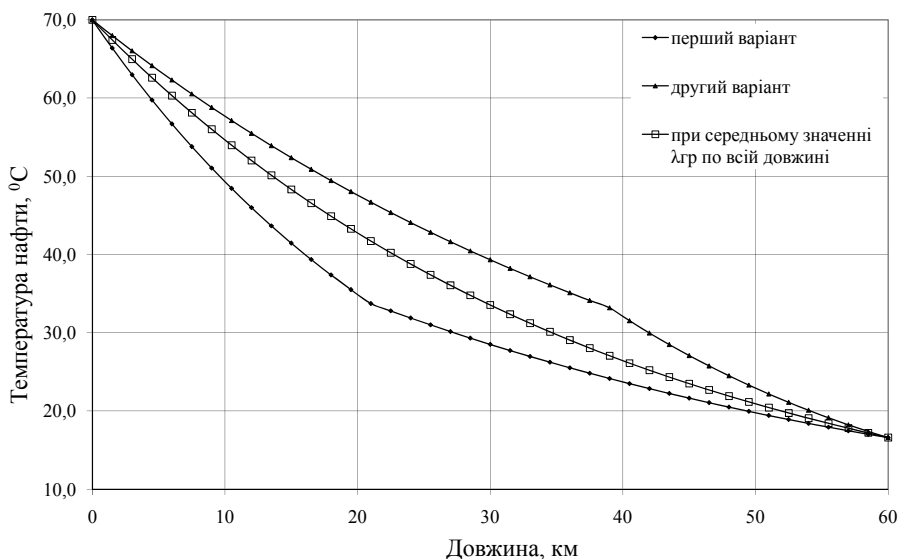


Рис.2. Зміна температури нафти по довжині трубопроводу при перекачуванні нафти, властивості якої наведено у роботі [3]

Також проводимо розрахунки втрат напору для трьох описаних вище варіантів. Результати розрахунку зводимо до таблиць 3 і 4.

Незважаючи на те, що розрахункове значення температури в кінці нафтопроводу при перекачуванні нафти українського родовища є більшою на  $1,1^{\circ}\text{C}$  (рис.1 і 2), втрати напору також є більшими.

Таблиця 3. Втрати напору при перекачуванні нафти Долинського родовища

Довжина, км	Втрати напору на тертя, м		
	перший варіант	другий варіант	третій варіант
6	48,2	48,4	48,3
12	96,9	96,9	96,9
18	146,3	145,8	145,9
24	196,7	194,9	195,4
30	248,0	244,5	245,6
36	300,6	294,6	296,7
42	355,2	345,4	349,4
48	413,1	398,3	404,9
54	478,2	455,7	466,1
60	537,7	507,5	521,2

Таблиця 4. Втрати напору при перекачуванні нафти, властивості якої наведено у роботі [3]

Довжина, км	Втрати напору на тертя, м		
	перший варіант	другий варіант	третій варіант
6	29,1	28,9	29,0
12	59,3	58,4	58,7
18	91,3	88,6	89,4
24	125,5	119,6	121,4
30	161,6	151,6	154,9
36	200,0	184,8	190,5
42	241,3	219,6	228,9
48	286,7	258,1	271,3
54	337,8	302,8	319,5
60	378,2	340,8	358,8

Теплогідравлічні розрахунки трубопроводу аналогічного нафтопроводу Долина–Дрогобич, які проведенні по ділянках, в межах яких коефіцієнт теплопровідності ґрунту є сталою величиною ( $\lambda_{ep i} = const$ ),

показали, що в залежності від в'язкості нафти втрати напору, визначені при середньозваженому значенні коефіцієнта теплопровідності ґрунту для варіантів, в яких:

– з 0 по 20 км  $\lambda_{zp} = 1,75 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  і з 20 по 60 км  $\lambda_{zp} = 0,95 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$

були на 3,2...5,4% нижчими;

– з 0 по 40 км  $\lambda_{zp} = 0,95 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  і з 40 по 60 км  $\lambda_{zp} = 1,75 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$

були на 2,6...5,0% вищими.

Як видно із рисунків і таблиць 3 та 4, за необхідності отримання високої точності визначення розподілу температури і тиску по довжині трубопроводу, теплогідравлічний розрахунок необхідно вести з урахуванням реального розподілу коефіцієнта теплопровідності ґрунту на кожній розрахунковій ділянці, у межах якої коефіцієнт теплопровідності ґрунту  $\lambda_{zp}$  є величиною сталою.

Величина втрат напору на тертя вздовж траси нафтопроводу, а отже і робочий тиск в трубопроводі, відрізняється від значення, визначеного згідно рекомендацій [1]. Якщо нафтопровід прокладено по місцевості із пересіченим профілем траси, то за рахунок різниці геодезичних позначок величини реального тиску в нафтопроводі можуть виходити за межі допустимого. А оскільки нафтотранспортна система України знаходиться в експлуатації в середньому від двадцяти до понад сорока років (залежно від терміну введення в дію її складових), то для їх техногенної безпеки необхідно коригувати тиски на певних ділянках, а тому для неізотермічних нафтопроводів при теплогідравлічних розрахунках необхідно враховувати розподіл теплофізичних властивостей ґрунту по довжині, а сам розрахунок проводити по ділянках, у межах яких теплопровідність ґрунту є сталою величиною.

### *Література*

1. Техника и технология транспорта и хранения нефти и газа: Учеб. пособие для вузов / Ф.Ф.Абузова, Р.А.Алиев, В.Ф.Новоселов и др.; Под ред. В.Ф.Новоселова. – М.: Недра, 1992. – 320 с.: ил.
2. Тугунов П.И. Нестационарные режимы перекачки нефтей и нефтепродуктов / П.И.Тугунов. – М.: Недра, 1984. – 224 с.: ил.
3. Фролов К.Д. Температурный режим “горячего” трубопровода с учетом тепла трения / К.Д.Фролов, М.П.Возняк // Разведка и разработка нефтяных и газовых месторождений – Изд-во Львов. ун-та, 1972. – № 9. – С. 161-165.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Грудзом В.Я., д.т.н., професором Говдяком Р.М.(м. Київ)*

---

**THE INVESTIGATION OF INFLUENCE OF EXTERNAL FACTORS  
ON THE THERMAL AND HYDRAULICAL PROCESSES  
OF OIL PIPELINE**

**M. P. Vozniak, L. V. Vozniak, G. M. Kryvenko,  
S. O. Kryvenko, Yu. Ya. Moisiuk**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivs'k, Ukraine, Carpatska st., 15;  
ph. +380 (0342) 72 71 39; e-mail: vozniak@tvnet.if.ua*

*Oil pipelines can be laid on locality on which soils heterogeneous on length routes, and that is why are different thermophysical characteristics.*

*In-process investigational influence of change on length of oil pipeline of head-conducting properties of soil which surrounds a pipeline, on the the thermal and hydraulic processes of oil pipeline.*

*The analysis of investigation shows that thermal and hydraulic processes of heat oil pipeline must calculate on the part of pipeline where the thermal coefficient is constant.*

**Key words:** *oil pipeline, temperature, thermal coefficient.*

УДК 622.691.4

## МІНІМАЛЬНІ ВИТРАТИ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ ЯК КРИТЕРІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ РОБОТИ МАГІСТРАЛЬНИХ НАФТОПРОВІДІВ

**Й. В. Якимів, В. М. Кацаба**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-21-66; e-mail: tzngkaf@rambler.ru*

*На роботу трубопровідної системи впливають необхідні обсяги перекачування нафти, та її фізико-хімічні властивості, характеристики насосів, та схема їх включення, а також інші чинники. Оптимальна схема включення насосів вибирається шляхом мінімізації питомих затрат потужності на перекачування нафти і потужності, що втрачається під час регулювання режиму роботи станцій.*

**Ключові слова:** *продуктивність, втрати напору, нафтоперекачувальна станція, потужність.*

Сучасні магістральні нафтопроводи мають дуже складну структуру. Вони обладнані системою регулювання витрати (тиску), великою кількістю основного і допоміжного обладнання, розосередженого на сотні кілометрів. Режими роботи нафтопроводу залежать від фізико-хімічних властивостей продукту, який перекачується, статичних і динамічних характеристик насосно-силового устаткування, температурного режиму перекачування, налагоджування параметрів системи регулювання і від безлічі інших явищ та чинників.

Введення нових прогресивних методів будівництва і експлуатації нафтопроводів, оптимізація режимів перекачування дозволили значно зменшити собівартість перекачування за рахунок зменшення капітальних вкладень і експлуатаційних витрат. Але пошук найбільш досконалих методів експлуатації нафтопроводів продовжується. Дослідники пропонують різні методи визначення оптимальних режимів перекачування нафти по магістральних трубопроводах з урахуванням останніх досягнень в обчислювальній техніці. Витрата електроенергії як критерій оптимальності досить точно відображає економічність роботи нафтопроводу, оскільки є однією з основних статей витрат, що впливають на собівартість перекачування. Тому більшість дослідників за цільову функцію вибирають енергетичні затрати.

Режим роботи магістрального нафтопроводу визначається його продуктивністю, напорами на виході станцій і підпорами на їх вході, енергетичними витратами на перекачування нафти.



На роботу системи нафтоперекачувальні станції – трубопровід безперервно або періодично впливають неритмічність подачі нафти з промислів або інших постачальників, коливання фізико-хімічних властивостей нафти, зміна характеристик насосів і їх переключення, аварійні ситуації та інші чинники. У зв'язку з цим виникає необхідність розрахунку режимів роботи нафтопроводу при різних ступенях його завантаження або визначенні раціональної комбінації включення насосів на перекачувальних станціях. Остання може бути визначена шляхом мінімізації затрат потужності на перекачування нафти і потужності, що втрачається при регулюванні режиму роботи станцій.

Принцип оптимізації полягає в тому, що часто ставлять завдання, в якому той чи інший обсяг нафти необхідно перекачати за той чи інший період часу. Тоді треба орієнтовно вибрати, з якою продуктивністю потрібно проводити перекачування та які насоси слід включати на станціях. При цьому всьому питомі витрати електроенергії на транспортування нафти повинні бути якомога меншими. Виконання цієї умови забезпечить ефективне використання основного обладнання та суттєву економію електроенергії.

Як початкові дані для виконання оптимізаційних розрахунків режимів роботи нафтопроводу використовують такі параметри [1,2]:

- фізичні властивості нафти;
- температура перекачування нафти;
- продуктивність перекачування;
- геометричні характеристики трубопровідної системи;
- напірні та енергетичні характеристики підпірних і основних насосів, встановлених на нафтоперекачувальних станціях;
- величини максимально допустимих тисків на виході нафтоперекачувальних станцій із умови міцності трубопроводу та мінімально допустимих тисків на вході станцій із умови безкавітаційної роботи насосів.

Оптимізація режимів перекачування нафти по магістральних нафтопроводах включає такі блоки розрахунків:

1) визначають фізичні властивості нафти (густина і в'язкість) за температури перекачування;

2) розраховують значення максимально допустимих напорів на виході із станцій і мінімально допустимих підпорів на вході у кожную станцію;

3) виконують гідравлічний розрахунок нафтопроводу, в результаті якого визначають загальні втрати напору для кожного перегону між нафтоперекачувальними станціями, за формулою

$$h_i = K \lambda_i \frac{l_i}{D_i^5} Q^2 + \Delta z_i, \quad (1)$$

де  $K$  – сталий комплекс величин,

$$K = 1,02 \frac{8}{\pi^2 g}; \quad (2)$$

1,02 – коефіцієнт, що враховує 2% на втрати напору в місцевих опорах від втрат напору на тертя;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\lambda_i$  – коефіцієнт гідравлічного опору для  $i$ -го перегону, що визначається за відомими формулами гідродинаміки;  $l_i$  і  $D_i$  – довжина та внутрішній діаметр  $i$ -го перегону між станціями;  $Q$  – витрата нафти;  $\Delta z_i$  – різниця геодезичних позначок кінця і початку  $i$ -го перегону;

4) знаходять напори, створювані підпірними та основними насосами при розрахунковій продуктивності за формулами

$$h_n = a_n - b_n Q^2; \quad (3)$$

$$h_{ji} = a_{ji} - b_{ji} Q^2; \quad (4)$$

де  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $a_{ji}$ ,  $b_{ji}$  – коефіцієнти математичних моделей напірної характеристики підпірного насоса та  $j$ -го основного магістрального насоса на  $i$ -ій станції;  $j$  – номер основного насоса на станції;

5) визначають потужність, яку споживає підпірний насос,

$$N_n = \frac{\rho g Q h_n}{1000 \eta_n \eta_{en}}, \text{ кВт}, \quad (5)$$

де  $\rho$  – густина нафти;  $\eta_{en}$  – ККД електродвигуна, що є приводом підпірного насоса,

$$\eta_n = \eta_{\max_n} \left[ 2 \frac{3600 Q}{Q_{nn}} - \left( \frac{3600 Q}{Q_{nn}} \right)^2 \right], \quad (6)$$

де  $\eta_{\max_n}$  – максимальний ККД підпірного насоса;  $Q_{nn}$  – номінальна подача підпірного насоса, м<sup>3</sup>/год;

6) обчислюють потужність, яку споживають основні насоси на кожній станції,

$$N_{cm_i} = \frac{\rho g Q (H_{cm_i} - h_{n(i-1)})}{1000 \eta_i \eta_e}, \text{ кВт}, \quad (7)$$

де  $H_{cm_i}$  – напір на виході насосів  $i$ -ої станції;  $\eta_i$  – ККД основних насосів  $i$ -ої станції;  $\eta_e$  – ККД електродвигуна, що є приводом основного насоса;

7) якщо підпір на вході в  $i$ -ту станцію більший від суми загальних втрат напору на наступному перегоні і мінімально допустимого підпору на вході в наступну станцію, тобто

$$h_{n(i-1)} > h_i + h_{\min_i}, \quad (8)$$

то відпадає потреба у включенні в роботу насосів на станції, що знаходиться на початку перегону. У такому випадку

$$H_{cm_i} = h_{n(i-1)} \quad (9)$$

і потужність, яку споживають насоси на цій станції, дорівнює нулю, тобто  $N_{cm_i} = 0$ .

При  $h_{n(i-1)} < h_i + h_{\min_i}$  на станції повинні включатись в роботу основні насоси і напір, створюваний станцією, визначається за формулою

$$H_{cm_i} = h_{n(i-1)} + h_{1_u} + h_{2_u} + h_{3_u} + h_{4_u}. \quad (10)$$

У роботу на станції можуть одночасно включатись не більше трьох насосів;

8) ККД кожної нафтоперекачувальної станції залежно від кількості насосів, які повинні включатись в роботу, розраховують за формулою

$$\eta_i = \frac{\sum_{j=1}^n h_{ji}}{\sum_{j=1}^n \frac{h_{ji}}{\eta_{ji}}}, \quad (11)$$

де  $\eta_{ji}$  – ККД  $j$ -го насоса на  $i$ -ій станції,

$$\eta_{ji} = \eta_{\max_{ji}} \left[ 2 \frac{3600Q}{Q_{H_{ji}}} - \left( \frac{3600Q}{Q_{H_{ji}}} \right)^2 \right], \quad (12)$$

де  $\eta_{\max_{ji}}$  – максимальний ККД основного насоса;  $Q_{H_{ji}}$  – номінальна подача основного насоса, м<sup>3</sup>/год;

9) розраховують затрати потужності на перекачування нафти в системі трубопроводу

$$N_1 = N_n + \sum_{i=1}^n N_{cm_i}, \quad (13)$$

де  $n$  – кількість перегонів між станціями;

10) знаходять питомі затрати потужності на перекачування нафти

$$\Delta N = \frac{N_1}{\rho \cdot 10^{-3} Q_{\text{год}} L}, \quad (14)$$

де  $Q_{\text{год}}$  – годинна продуктивність нафтопроводу;  $L$  – загальна довжина трубопроводу, км.

За запропонованим алгоритмом розроблено програмне забезпечення, яке дозволяє проводити оптимізаційні розрахунки режимів роботи магістральних нафтопроводів при різних ступенях їх завантаження.

З використанням програмного забезпечення проведено багатоваріантні оптимізаційні розрахунки режимів роботи ділянки магістрального нафтопроводу «Дружба» при перекачуванні суміші російських нафт. Враховуючи міцнісні характеристики труб, на перекачувальних станціях можливе включення не більше двох насосів. Нафтоперекачувальні станції ділянки нафтопроводу оснащені насосами НМ 3600-230 з базовим ротором та ротором 0,7 на подачу 2500 м<sup>3</sup>/год. У таблиці 1 наведено можливі включення насосів на станції та відповідний номер режиму роботи станції.

Проведено розрахунки та визначено оптимальні режими роботи обладнання на нафтоперекачувальних станціях при перекачуванні нафти за найнижчої та найвищої температури ґрунту на глибині укладання трубопроводу при різних значеннях продуктивності. Результати розрахунків зведено до таблиць 2 та 3.

Таблиця 1. Режими роботи станції

№ режиму роботи станції	Комбінація працюючих насосів НМ 3600-230
1	0 з ротором 0,7 + 0 з базовим ротором
2	1 з ротором 0,7 + 0 з базовим ротором
3	0 з ротором 0,7 + 1 з базовим ротором
4	2 з ротором 0,7 + 0 з базовим ротором
5	1 з ротором 0,7 + 1 з базовим ротором
6	0 з ротором 0,7 + 2 з базовим ротором
7	2 з ротором 0,7 + 1 з базовим ротором
8	1 з ротором 0,7 + 2 з базовим ротором

Таблиця 2. Оптимальні режими роботи ділянки нафтопроводу при різних продуктивностях за найнижчої температури

Продуктивність трубопроводу, м <sup>3</sup> /год	Схема роботи нафтопроводу	Питомі витрати електроенергії на перекачування нафти, $\frac{\text{кВт} \cdot \text{год}}{1000 \text{ м} \cdot \text{км}}$
1300	213, 231, 312, 321	14,46
1400	313, 331	15,37
1500	214, 222, 412	16,73
1600	222, 412	16,20
1700	222, 412	15,72
1800	222, 412	15,28
1900	223, 232, 322, 413	15,99
2000	233, 323, 332	16,62
2100	333	17,18
2200	333	16,71
2300	224, 242, 414, 422	17,58
2400	234, 243, 252, 324, 342, 423, 432	18,09
2500	253, 334, 343, 433, 523	18,55
2600	424	20,43
2700	424	20,09
2800	345, 354, 426, 435, 525, 534, 624	21,18
2900	436, 526, 535	21,48

Загальна кількість всіх імовірних режимів роботи, при яких може проводитись технологічний процес перекачування нафти, становить 446. При цьому продуктивності, які наведені в таблиці 2, можуть забезпечувати 439 схем роботи. При решта семи схемах забезпечується малий об'єм максимального годинного перекачування.

Таблиця 3. Оптимальні режими роботи ділянки нафтопроводу при різних продуктивностях за найвищої температури

Продуктивність трубопроводу, м <sup>3</sup> /год	Схема роботи нафтопроводу	Питомі витрати електроенергії на перекачування нафти,
		$\frac{\text{кВт} \cdot \text{год}}{1000 \text{ м} \cdot \text{км}}$
1500	213, 231, 312, 321	13,31
1600	313, 331	14,16
1700	214, 241, 222, 412, 421	15,72
1800	214, 222, 412	15,28
1900	222, 412	14,87
2000	222, 412	14,50
2100	223, 232, 322, 413, 512	15,17
2200	223, 232, 322, 413	14,80
2300	233, 323, 332	15,36
2400	333	15,86
2500	224, 242, 414, 422	16,91
2600	224, 242, 414, 422	16,61
2700	234, 243, 252, 324, 342, 423, 432, 514, 522	17,07
2800	253, 334, 343, 433, 523	17,48
2900	335, 353, 533	17,84
3000	344, 425, 434, 524	19,83
3100	345, 354, 426, 435, 525, 534, 624	20,14
3200	436, 526, 535, 625, 634	20,40
3300	536, 626, 635	20,61
3400	636	20,78

Аналізуючи дані таблиць 2 і 3, можна зробити висновок, що існують схеми роботи станцій, при яких маємо найменші питомі витрати електроенергії на транспортування нафти для широкого діапазону зміни годинної продуктивності нафтопроводу: схеми включення насосів 222 і 412 найбільш економічні при годинній продуктивності від 1500 до 1800 м<sup>3</sup>/год за найнижчої температури і від 1700 до 2000 м<sup>3</sup>/год за найвищої температури, отже при продуктивностях від 1700 до 1800 м<sup>3</sup>/год вони мають найменші питомі витрати електроенергії на транспортування протягом цілого року. Якщо оптимальна схема роботи має питомі

витрати електроенергії на транспортування нафти менші при більшій витраті, то вона буде оптимальною і при менших подачах.

Перекачування за найвищої температури характеризується меншою в'язкістю нафти та відповідно меншими втратами напору на тертя, тому пропускна здатність системи буде більшою і відбуватиметься так зване "зсування схем", тобто ті схеми, які за найнижчої температури були найкращими для менших продуктивностей, за найвищої температури будуть оптимальними для більших продуктивностей. Схеми, які забезпечували за найнижчої температури продуктивність від 1300 до 1900 м<sup>3</sup>/год та від 2200 до 2300 м<sup>3</sup>/год, за найвищої температури забезпечують подачу на 200 м<sup>3</sup>/год більшу, а ті, які були найкращими для 2400 м<sup>3</sup>/год, тепер будуть оптимальними для подачі на 300 м<sup>3</sup>/год більшої, тобто 2700 м<sup>3</sup>/год. Для більших подач така закономірність не спостерігається, тобто можна зробити висновок, що при "зсуванні схем" втрати напору на тертя більше спричинені в'язкістю нафти, а при більших витратах в трубопроводній системі – продуктивністю нафтопроводу.

### *Література*

1. Середюк М.Д. Трубопроводний транспорт нафти і нафтопродуктів : [підруч. для студ. вищ.навч.закл.] / М.Д.Середюк, Й.В.Якимів, В.П.Лісафін. – Івано-Франківськ: Кременчук, 2001. – 517 с.
2. Якимів Й.В. Типові технологічні розрахунки трубопроводного транспорту нафти і нафтопродуктів: [навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.] / Й.В.Якимів – Івано-Франківськ: Факел, 2006. – 366 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Середюк М.Д., д.т.н., професором Говдяком Р.М.(м. Київ)*

## **MINIMUM POWER CONSUMPTION AS A CRITERION OF OIL-TRUNK PIPELINES OPERATING CONDITIONS OPTIMIZATION**

**J. Yakymiv, V. Katsaba**

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivsk, Karpatska st., 15;  
ph. +380 (3422) 4-21-66; e-mail: tzngkaf@rambler.ru*

*The necessary amount of oil pumping, its physical and chemical properties, pumps characteristics, their inclusion in the scheme and other factors influence the pipeline system operating conditions. The optimum scheme of pumps inclusion is chosen by minimizing the power intensity for oil pumping and the power that is lost during stations operating conditions.*

**Key words:** *productivity, loss of pressure, oil pumping station, power.*

## ГЕОЕКОЛОГІЧНА ОЦІНКА ВПЛИВУ МАГІСТРАЛЬНИХ ГАЗОПРОВІДІВ НА ДОЛИННІ ЕКОСИСТЕМИ ПЕРЕДКАРПАТТЯ

**О. М. Адаменко, Я. О. Адаменко, Л. Є. Шкіца,  
О. М. Мандрик, Л. В. Міщенко, Д. О. Зорін, А. В. Міщенко**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
кафедра екології; 76019, м. Івано-Франківськ. Карпатська, 15;  
тел. +380 (342) 50-59-42; e-mail: nvlppif@nung.edu.ua*

*Визначено вплив магістральних газопроводів на долинні екосистеми шляхом еколого-геохімічних досліджень у ґрунтах, поверхневих і ґрунтових водах, атмосферному повітрі та рослинності. Виділені зони різного екологічного стану. Виконано оцінку екологічної ситуації Богородчанського району*

***Ключові слова:** екологічна безпека, нафтогазові об'єкти, атмосферне забруднення, еколого-техногеохімічні карти*

**Постановка проблеми.** Конструктивно-географічні засади збалансованого природокористування, особливо в зонах впливу небезпечних техногенних об'єктів, вимагають геоекологічних оцінок такого впливу та розроблення відповідних заходів для його оптимізації і зниження. Такими небезпечними техногенними об'єктами на території Передкарпаття є магістральні газопроводи та інші елементи промислової інфраструктури Богородчанського газотранспортного вузла, розташованого в долині р. Бистриця Солотвинська у Богородчанському районі Івано-Франківської області. Богородчанський газотранспортний вузол – це система трансконтинентальних магістральних газопроводів «Союз», «Уренгой-Ужгород» та інших, що транспортують газ з півночі Західного Сибіру (Росія) територією України до країн Східної, Центральної та Західної Європи. До вузла входять також Богородчанська компресорна станція та Богородчанське підземне сховище газу. Під час будівництва та експлуатації цих потужних, екологічно небезпечних об'єктів були порушені природні геоекосистеми та їх основні компоненти – геологічне середовище, ґрунти, поверхневі та ґрунтові води, атмосферне повітря, рослинні біогеоценози і ландшафти загалом. Проте до цього часу не оцінена ступінь техногенного втручання в природу у зоні впливу магістральних газопроводів, компресорної станції та підземного газосховища.

**Із історії попередніх досліджень.** Геоекологічні дослідження на вказаній території розпочались нещодавно. Я.С. Кравчук [3] при геоморфологічному районуванні виявив деякі геоекологічні зміни рельєфу

Передкарпаття під впливом небезпечних екзогеодинамічних процесів – зсувів, ерозії, карсту, суфозії та ін. Розповсюдження забруднюючих речовин у ґрунтах, поверхневих і ґрунтових водах, атмосферному повітрі та рослинності на території Івано-Франківської області, в тому числі і у Богородчанському районі, вивчали О.М. Адаменко [1], Я.О. Адаменко [2], Л.В. Міщенко [7], М.М. Приходько [8] та ін. Л.Д. Потравич [2] виконала детальні ландшафтно-геохімічні дослідження в зоні Богородчанської газокompресорної станції, підземного сховища газу і вздовж лінійної частини газопроводів «Союз» і «Уренгой-Ужгород». Я.О. Адаменко виявив кілька аномалій у розповсюдженні важких металів Pb, Cu, Zn та ін. Усі ці дослідження враховані нами при вивченні екологічної ситуації у Богородчанському районі. Також, з метою вивчення теоретичних і практичних засад впливу небезпечних техногенних об'єктів на території Передкарпаття інженерно-екологічним факультетом і кафедрою екології на чолі з деканом О.М. Мандриком був проведений навчальний україно-румунський модуль, який входив до проекту “Румунія – Україна – Регіональний центр для вивчення та охорони, менеджменту і моніторингу середовища” (Північний Університет Румунія, область Марамуреш) [3]. Проект включав теоретичні та практичні основи для навчання керівників природоохоронних організацій та управління НПС, викладачів всіх кафедр екології м. Івано-Франківська, студентів-екологів. Слухачам було представлено такі теми цього навчання: з румунської сторони (менеджер проекту Тісан Василь, Орос Василь, Дискилиску Анамарія) – загальні законодавчі установи по захисту природи; менеджмент проектів; інтегровані системи екології; з української сторони (завідувач кафедри екології, професор Я.О. Адаменко, професор О.М. Адаменко, професор Л.Є. Шкіца, доцент М.М. Орфанова, доцент Л.В. Міщенко, асистент Д.О. Зорін) – оцінка впливів на середовище; керування промислових і муніципальних відходів; екологічний аудит, моніторинг та менеджмент середовища [4]. Слухачам були видані сертифікати Європейського зразка.

Було проведено декілька Міжнародних науково-практичних конференцій (2000-2011), одна із яких була присвячена дослідженню всевітньо відомих знахідок і відкриттів викопної фауни в селі Старуні Богородчанського району, та 7 наукових україно-польських експедицій (2004-2007). У них брали участь дві кафедри: геології та екології разом з польськими колегами-вченими з м. Краків (Гірничо-металургійна академія) [4].

**Викладення основного матеріалу і результати дослідження.** На площі 840 км<sup>2</sup> (рис.1) були виконані геоекологічні дослідження для створення комп'ютеризованої системи екологічної безпеки Богородчанського району. Роботи виконувались під науковим керівництвом О.М. Адаменка, відповідальний виконавець Л.В. Міщенко при участі Д.О. Зоріна, Н.О. Зоріной, Я.Д. Гладуна, Л.Д. Потравич та ін. на замовлення фонду охорони навколишнього природного середовища Івано-



Франківської обласної ради та Богородчанської районної державної адміністрації [1,2,4,7]. На досліджуваній території була створена система із 12 профілів і 111 точок спостережень, в яких відібрано: 111 проб ґрунтів, 61 – поверхневих вод, 61 – донних відкладів, 111 – ґрунтових вод, 111 – атмосферного повітря, 111 – снігу, 111 – рослинності – всього 677 проб. Всі проби були проаналізовані на атомно-адсорбційних, рентгенофлуоресцентних приладах та хроматографах, а результати аналізів представлені у вигляді баз даних [1,2,7].

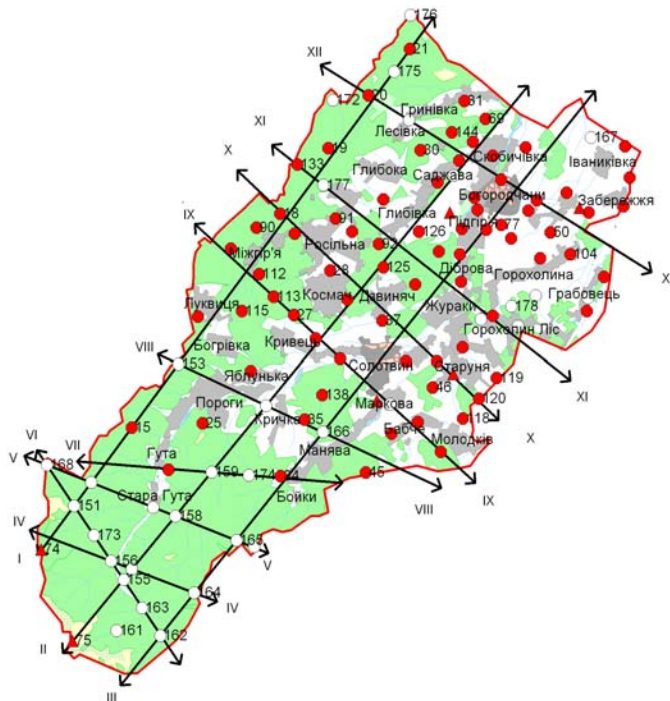


Рис.1. Карта-схема розташування геополігонів на території (Богородчанський район Івано-Франківська області)

*Екологічний стан геологічного середовища, геофізичних полів та геоморфосфери* визначався за даними попередніх дослідників: П.Н. Царненка, О.І. Шаблія, Я.Є. Іваха, М.С. Демедюка, О.Р. Стельмаха, Я.С. Кравчука, Ю.В. Зінька [5] та ін. Територія Богородчанського району знаходиться в межах трьох структурно-тектонічних зон: Східно-Європейської платформи (крайня північно-східна частина), Передкарпатського прогину (центральна частина) і Складчастих Карпат (південно-західна частина).

Платформова частина з поверхні (без четвертинного покриву) представлена міоценовими відкладами неогенової системи: вапняками, пісковиками, солями, гіпсами і ангідритами загальною потужністю до 100 м. Нижче залягають вапняки, мергелі, рідко пісковики верхньої крейди потужністю 600 м; під ними – аргіліти, алевроліти, вапняки, піс-

ковики, доломіти, мергелі палеозою (від кембрію до девону) загальною потужністю близько 2500 м.

Стратиграфічний розріз Передкарпатського прогину і Складчастих Карпат досить різноманітний. Міоценові моласи у прогині свідчать про початок гороутворювальних процесів у Карпатах: з поверхні вони представлені верхніми моласами – глинами, гіпсами, пісковиками, ангідритами, солями, алевролітами (350-2500 м); під ними залягає нижня мола-са – конгломерати, пісковики, глини, солі, аргіліти (3000-4000 м). Нижче за розрізом свердловинами у прогині і у відслоненнях Скибових Карпат широко розповсюджені породи флішової формації: нижньо-, середньо-, верхньопалеогенові (1500-3000 м) та нижньо- і верхньокрейдові (600-2000 м) ритмічно різношарові чергування пісковиків, алевролітів і аргілітів, рідше – вапняків і сидеритів з окремими горизонтами червоних аргілітів та чорних кременів. Під флішем залягають протерозойсько-нижньопалеозойські сланці, кварцити, гнейси, туфкоїди, порфіроїди, амфіболіти потужністю понад 2500 м.

Четвертинні відклади розповсюджені майже суцільним покривом потужністю до 10-15 м. В гірській частині району – це верхньочетвертинно-сучасні нерозчленовані делювіально-пролювіальні змішані глинисто-піщані-грубоуламкові відклади. В долинах рік Бистриці Солотвинської і Лукви передгірської і рівнинної зон виділяється заплава і I – III надзаплавні тераси: піски, супіски, суглинки з гравієм, гальками і валунами, перекритими з поверхні покровними лесовидними суглинками. Вік порід – від середнього плейстоцену до голоцену. Потужність 5-10 м. Міждолинні простори зайняті алювієм давніх (еоплейстоцено-нижньоплейстоценових) терас, які вже втратили зв'язок з конкретними долинами і відносяться до IV–V–VI–VII надзаплавних терас Дністра. Це – галька, валуни, піски, гравій, супіски, суглинки, глини, іноді характерного ржаво-бурого і червоного кольору. Потужність їх – іноді до 20 м.

*Мінерально-сировинна база* Івано-Франківської області на 22,4% складається з корисних копалин паливно-енергетичного напрямку (нафта, газ, конденсат, буре вугілля, торф) та ін. *Геологічне середовище* порушено природними ерозійними, зсувними, суфозійними процесами, а також антропогенним втручанням – кар'єрами, свердловинами, магістральними нафтогазопроводами та ін. Обліковується 321 родовищ і 79 об'єктів обліку (з урахуванням комплексності) різноманітних корисних копалин, з яких 165 родовищ і 17 об'єктів обліку експлуатуються [6].

*Геофізичні поля* – гравітаційне і магнітне – виявляють ряд глибинних розломів, що перетинають Богородчанський район з північного заходу на південний схід. Найважливіші з них – Зовнішня межа Передкарпатського прогину, що відділяє його від Східно-Європейської платформи, проходить у 3 км північно-східніше смт. Богородчани і в сучасному рельєфі ніяк не проявляється. В 2 км південно-західніше смт. Богородчани можна спостерігати чіткий уступ висотою до 200 м: підйом авто-

магістралі Івано-Франківськ – Надвірна перед с. Старуня. Це – передодвий насув внутрішньої зони Передкарпатського прогину на зовнішню. За даними буріння цей насув в районі м. Долина має горизонтальну амплітуду до 10-15 км. Під насувом “схована” більша частина Зовнішньої зони. Хоча в рельєфі цей насув чіткий, в геофізичних полях він проявляється значно слабше, ніж Зовнішня межа Зовнішньої зони. З вказаним насувом пов’язана геопатогенна зона, що спричиняє велику кількість автомобільних аварій, відмічених пам’ятниками вздовж автомагістралі [7].

Така ж складна система насувів, що фіксують межу між Внутрішньою зоною прогину і Складчастими Карпатами, спостерігається на південний захід від с. Старуні, де знаходяться Старунське нафтове і озокеритове родовища, геодинамічний полігон, грязьовий вулкан і знамениті на весь світ місцезнаходження решток волохатих носорогів.

Численні іноземні компанії в XIX-XX ст. бурили тут свердловини, намагаючись добути нафту. Пам’ятка визначається унікальним поєднанням різних стратиграфічних, археологічних, палеонтологічних, мінералого-петрографічних, гідрогеологічних і неотектонічних особливостей [4]. Вона має площу близько 60 га і розташована на пологому західному березі річки, де подекуди збереглися дві тераси, що підносяться над заплавою на 1 і 2,5 м.

Під ґрунтом (потужність 10-15 см) залягають жовтуваті-сіруваті суглинки (0,5 м), в яких видно один-два прошарки старого бітуму, лінзи викопного ґрунту і гравійно-галечного руслового алювію. На південно-західній околиці ділянки в четвертинному делювії і орному шарі відкриті залишки поселення людей палеоліту і мезоліту. В центральній частині ділянки в грабені глибиною до 27 м серед четвертинних торф’яно-болотяних відкладів у 1907 і 1929 рр. були знайдені залишки мамонта, трьох носорогів, коня, оленя, птахів, плазунів та інших тварин пізнього плейстоцену – раннього голоцену. Вони добре збереглися у зв’язку з консервацією в породах, просякнених нафтою і озокеритом. Під четвертинними породами залягають неогенові соленосні глини і аргіліти воротищенської світи з прошарками алевролітів, пісковиків і одиничними лінзами слобідських конгломератів. Поблизу тектонічних зон через численні мікрократери, розташовані за 2-5 м один від одного, на поверхню виходять гази, мінеральні води і вуглеводневі флюїди. Порооди (четвертинні, неогенові, палеогенові та верхньокрейдяні) утворюють тектонічно складний перегин, на вершині якого знаходиться «працюючий» грязьовий вулкан. Він з’явився в 1977 р. після землетрусу в Румунії і тоді мав чотири жерла діаметром 0,1-0,5 м. Висота його конуса приблизно 3 м, довжина глинистих потоків 10-50-60 м.

Зараз налічується вісім кратерів і 10-20 непостійних мікрократерів, що виділяють газ, воду, глинисту пульпу, іноді нафту або її диференціати. В 60 м на захід від цього вулкана після землетрусів 1979 р. в Італії

з'явився другий невеликий грязьовий вулкан, а за 400 м на південь від них в 1981р., після землетрусів в Ірані, утворився третій, відтак – ще три.

У глині грязьових викидів головного вулкана зустрічаються кристали сфалериту, піротину, піриту, арсенопіриту, стронціобариту, бариту, гіпсу, сірки з кальцитом, флюориту, сульфідів міді, в сольових кірках - галіт, силвін та ін. [4].

На ділянці виходить більше 300 постійних і тимчасових джерел прісної і мінералізованої води, пов'язаної з розривними порушеннями. Для цієї території характерна сучасна тектонічна активність і висока сейсмочутливість. Вона виявляється в нерівномірному здійсненні (більше 1 м за 7 років, 1977-1984рр.), появи тріщин, проваль, зростанні порогів і невеликих водоспадів, грязьовому вулканізмі, активній динаміці газовиділення і геохімічній динаміці флюїдів. У зв'язку з деякими віддаленими землетрусами в ґрунті виникають порожнисті тріщини шириною 0,5-3 см, які закриваються через 3-5-10 діб. По тріщинах з невеликих грифонів і мікрократерів постійно або періодично з різною інтенсивністю викидаються гази, нафта, бензин, гас, вода різної мінералізації. Біля одних джерел формуються лінзи залізняку, а біля інших - самородної сірки, яка легко окислюється на поверхні. Інтенсивність усіх виділень, їх хімічний і мінеральний склад залежать від дальності землетрусів. За даними Н.Х.Білоус, ділянка Старуня реагує на землетруси, що відбуваються в радіусі 3-6тис. км, тобто в Румунії, Італії, ФРН, Ірані, на Кавказі і навіть у Середній Азії [1, 4]. Старунський комплекс має величезне наукове значення для встановлення особливостей динаміки Землі, закономірностей формування корисних копалин, прогнозу землетрусів. Це унікальне місце цікаве не тільки для фахівців, але і для школярів, студентів, любителів природи, туристів. Особливу увагу до Старуні виявляють іноземні туристи. Тому після будівництва дороги і створення тут певної інфраструктури можна організувати міжнародний еколого-туристичний центр своєрідний ПАРК ЛЬОДОВИКОВОГО ПЕРІОДУ [1,4].

Дослідження геології, геоморфології, четвертинних відкладів, неотектоніки дали змогу дійти висновку про сучасну високу ендеодинамічну активність цієї ділянки, що сприяє розвитку небезпечних екзогенних процесів. Ця ділянка може бути виділена як геодинамічний полігон для усього Карпатського регіону. Археологи Івано-Франківська та Львова знайшли в околицях с. Старуні 12 стоянок давньої людини. А польські палеонтологи вказали на наявність на черепках носорогів отворів від списів древніх мисливців. Не виключено, що при детальних обстеженнях, бурінні свердловин і розкопках буде оконтурене давнє озокеритове озеро-болото, в якому можуть бути виявлені унікальні забальзамовані рештки древніх тварин і наших предків – мисливців епохи палеоліту та мезоліту. Згідно з поданням вчених ІФНТУНГ Старуня визнана геологічним пам'ятником природи і

охороняється місцевою владою. Враховуючи велику цінність, полігон Старуні може стати пам'ятником природи світового значення та об'єктом міжнародного туризму.

З геоморфологічної точки зору, на території Богородчанського району виділяють кілька висотних рівнів, що відображають геологічну будову і тектоніку. З північного сходу на південний захід прослідковуються спочатку ступінчасті (терасовані) денудаційно-аккумулятивні височини Передкарпаття: Прилуквинська і Міжбистрицька (300-400 м). Потім абсолютні відмітки рельєфу зростають до 500-800 м і ми піднімаємось на структурно-ерозійні низькогір'я Передкарпаття: Майданське і Надвірнянське. Ще далі на південний захід на висотах 600-800 м розташовані Берегові Горгани: складчасто-покровні низькогір'я з вузькогребневими хребтами. І на крайньому південному заході спостерігаються складчасто-покровні і складчасті середньогір'я Зовнішніх Горган з висотами 1200-1800 м (гора Сивуля).

*Геоморфосфера*, як і підстилаюча її літосфера, порушена природними ерозійними, аккумулятивними, гравітаційними, зсувними та іншими ектогеодинамічними процесами, кількісна оцінка яких поки що не виконувалась.

*Екологічний стан ґрунтового покриву* оцінювався нами на основі зібраної екологічної інформації – баз даних: відібраних проб ґрунтів, їх аналізу атомно-адсорбційними методами [1, 2, 3, 7]. Більшу частину рівнинної та передгірської зони району займають буроземно-підзолисті, іноді оглеєні ґрунти. В долинах рік вони змінюються на болотні та торфувато-болотні, а в гірській зоні – на бурі гірсько-лісові, переважно щаблюваті ґрунти, що розвинуті на елювії-делювії корінних порід.

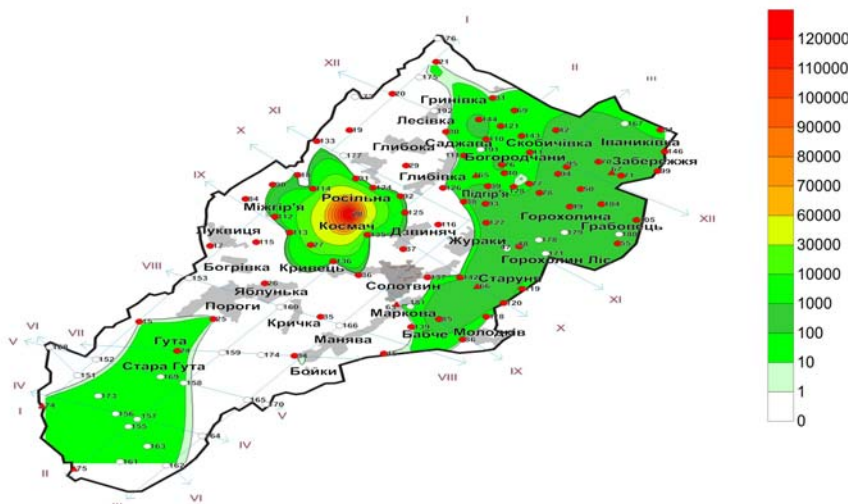


Рис.2. Сумарний показник забруднення атмосферного повітря території Богородчанського району

Вміст важких металів Hg, Cd, Pb, Cu, Zn, Ni, а також нафтопродуктів і пестицидів ДДТ в основному відповідає фоновому і нижче фону значенням. Аномалії та підвищення до ГДК виявлено лише для Pb, Cu, Zn, Ni на окремих не значних по площі ділянках: сс. Міжгір'я і Росільна, де проходять траси магістральних газопроводів і велись розробки нафти. Біля с. Міжгір'я є витоки нафти на поверхню в руслах потоків. Ряд аномальних ділянок важких металів виявлено вздовж магістральних газопроводів та в районі підземного сховища газу та компресорної станції. На наш погляд, це – залишкове забруднення ґрунтів, походження якого ми пов'язуємо з будівництвом, а не з експлуатацією цих об'єктів. З нафтовидобутком пов'язані аномалії важких металів у ґрунтах біля с. Солотвино. Підвищені вмісти Pb, Cu, Zn (вище за ГДК) на Старунському геодинамічному полігоні ми пов'язуємо з дією грязьового вулкану, в викидах якого зустрічаються сульфідні мінерали (пірит, халькопірит, сфалерит та ін.).

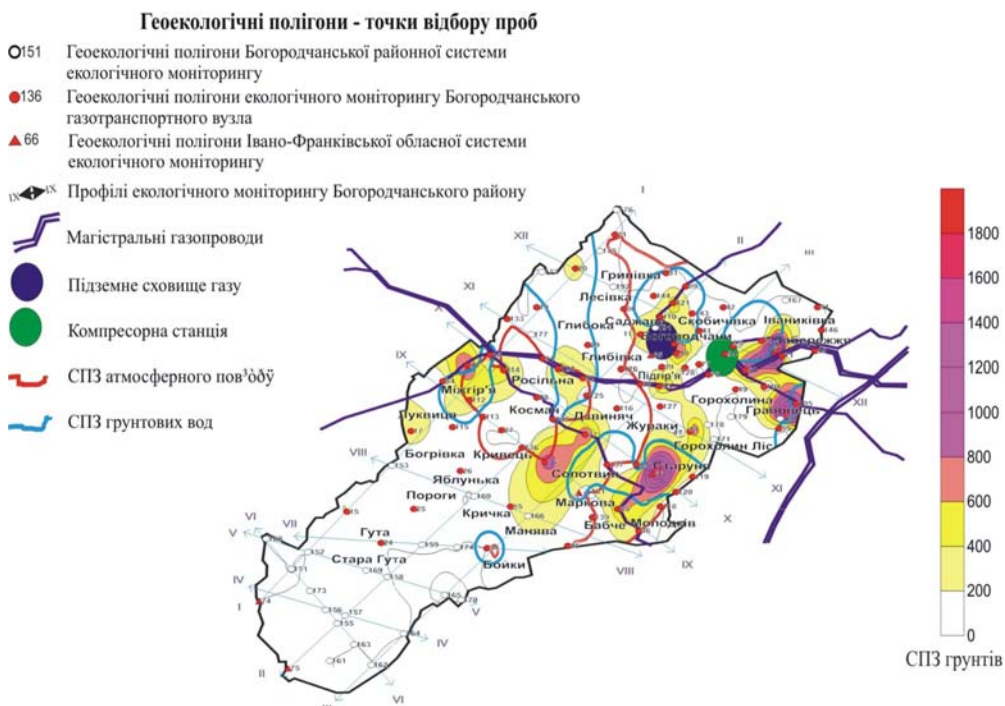


Рис.3. Покомпонентний сумарний показник забруднення (СПЗ) та зв'язок забруднення території Богородчанського району з трасами магістральних газопроводів, компресорною станцією та підземним сховищем газу Богородчанського газотранспортного вузла

*Поверхневі води та донні відклади значних перевищень фону не показали. Був порахований покомпонентний сумарний показник забруднення (рис.2, 3). У ґрунтових водах та атмосферному повітрі виявлено ряд аномальних вмістів, в тому числі із перевищенням ГДК (рис.2, 3) в*

районі сіл: Росільна, Космач, Старуня, Жураки. Високі вмісти кисню (більше 21,88 об'ємних %) виявлені в долині р. Бистриці Солотвинської від с. Яблунька і до гори Сивулі. Це свідчить про високі оздоровчі властивості Гутинської рекреаційної зони, де вже існують санаторні заклади "Синьогора", "Гута".

Ми вважаємо, що для остаточних висновків про вплив техногенних об'єктів на навколишнє середовище потрібні комплексні дослідження підсистем техносфери.

**Висновки.** Екологічні проблеми, що виникли в Івано-Франківській області внаслідок експлуатації родовищ корисних копалин, пов'язані, в основному, з розробкою родовищ нафти і газу, калійної солі та з веденням видобувних робіт кар'єрним способом. Сумісний аналіз усіх побудованих нами покомпонентних еколого-техногеохімічних карт дозволив скласти карту накладання сумарних показників забруднення ґрунтів, ґрунтових вод і атмосферного повітря (рис.3), яка показує розповсюдження забруднень на території Богородчанського району. Вони пов'язані з трасами магістральних газопроводів, компресорною станцією, підземним сховищем газу та геодинамічним полігоном Старуня і не виявляють якогось зв'язку з ландшафтними одиницями. Потенційним джерелом екологічної безпеки є розгалужена система магістральних та інших трубопроводів. Щорічно виникає до 1,5 тис. аварійних ситуацій які супроводжуються аварійними викидами нафти, нафтопродуктів, інших небезпечних для довкілля речовин.

Ми вважаємо, що для остаточних висновків про вплив техногенних об'єктів на навколишнє середовище потрібні комплексні дослідження підсистем техносфери. Розроблений нами моніторинг та комп'ютерна система екологічної безпеки критичних ланок техносфери може попередити негативні сценарії – катастрофи, зменшення впливу на довкілля та здоров'я населення.

### *Література*

1. Адаменко О.М. Наш майбутній дім / О.М.Адаменко // Екоєвропа. – Івано-Франківськ: Симфонія форте, 2007. – 460 с., 215 іл.
2. ГІС – технології оцінки екологічної ситуації для управління екологічною безпекою / О.М.Адаменко, Я.О.Адаменко, З.М.Лободіна, А.С.Луценко, Л.В.Міщенко, О.М.Журавель, О.В.Пендерезький, Д.О.Зорін, Н.О.Зоріна, Л.В.Плаксій, М.М.Приходько, І.А.Абушева, Л.Д.Потравич, В.С.Скрипник, Н.В.Фоменко, О.В.Побігун, Л.М.Кудряк // Вісник Кременчуцького держ.політехн. ун-ту. – Вип.5(28). – 2004. – С. 149-152.
3. Manuel de instruire în protecția, managementul și monitoringul mediului / Я.О.Адаменко, О.М.Мандрик, Васіле Орос, Васіле Тісан, Л.Є.Шкіца, Л.В.Міщенко та ін. // Підручник навчання в захисті менеджмента і моніторинга середовища. – Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României. – Cluj-Napoca: Risoprint, 2008. – 212 с.

4. A concept of an internation "Ice-Age Geopark" as an ecology-tourist center in Starunia former ozokerite mine, fore-Carpatian region, Ukraine / O.M.Adamenko, Y.I.Kryzhanivsky, V.I.Vekeryk, O.R.Stelmakh, L.V.Mishchenko, N.O.Zorina, D.O.Zorin, M.V.Ambrozyak // Polish and Ukrainian geological studies (2004-2005) at Starunia – the area of discoveries of wooly rhinoceroses. – Warszawa, Krakow. – 2005. – P. 205-209.
5. Кравчук Я.С. Геоморфологія Передкарпаття / Я.С.Кравчук. – Львів: Меркатор, 1999. – 188 с.
6. Міщенко А.В. Геоєкологічний моніторинг за вивченням надр Прикарпаття / А.В.Міщенко // Збірник наукових праць. «Сучасні проблеми збалансованого природокористування». – Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський – 2011. – №4 (22). – 189-193 с.
7. Міщенко Л.В. Геоєкологічне районування. Наукова монографія за редакцією О.М.Адаменка / Л.В.Міщенко. – Івано-Франківськ : Симфонія форте, 2011. – 408 с., іл.
8. Приходько М.М. Управління природними ресурсами та природоохороною діяльністю / М.М. Приходько, М.М. Приходько (мол.). – Івано-Франківськ: Фоліант, 2004. – 847 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,  
д.т.н., професором **Світлицьким В.М.**(м. Київ)*

## THE GEOECOLOGICAL IMPACT ASSESSMENT OF GAS MAINS ON THE VALLEY IN PRECARPATHIAN REGION

**O. M. Adamenko, Y. O. Adamenko, L. E. Shkitsa,  
O. M. Mandruk, L. V. Mishchenko, D. O. Zorin, A. V. Mishchenko**  
*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;  
ph. +380 (3422) 4-53-69; e-mail: lshkitsa@nung.edu.ua*

*The article deals with the problem of gas mains' influence on valley through ecological and geochemical studies of soils, surface and groundwater, air and vegetation. It has been defined areas of different ecological condition. It is made the estimation of ecological situation of the Bogorodchany district.*

**Key words:** *environmental security, oil and gas facilities, atmosphere pollution, ecological-techno-geochemical maps.*



## ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ СТРУМИННИХ НАСОСІВ У ПРОЦЕСІ БУРІННЯ

**О. П. Мельников**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-00-98; e-mail: gidro@nung.edu.ua*

*В статті розглянуто основне призначення струминних насосів у процесі спорудження нафтогазових свердловин, а саме, підвищення механічної швидкості буріння. Відзначено, що основний недолік існуючих ежекційних систем пов'язаний зі значними гідравлічними втратами в робочій насадці струминного насоса. На базі проведеного аналізу запропоновано конструкцію пристрою для буріння свердловин, яка дозволяє зменшити навантаження на бурові насоси при його використанні, а також передбачає можливість спільної роботи з гідромоніторними долотами.*

**Ключові слова:** струминний насос, ежектор, відносний напір, коефіцієнт інжекції.

Висока ефективність ежекційних технологій зумовлює широку географію їх застосування. В Україні роботи з розробки та поширення ежекційних технологій на сьогоднішній день зосереджені в Івано-Франківському національному університеті нафти і газу та ВАТ «Геотест» (м. Івано-Франківськ). Ежекційні технології широко використовуються в Росії, Венесуелі, Канаді, Сполучених Штатах Америки, Французьким інститутом нафти.

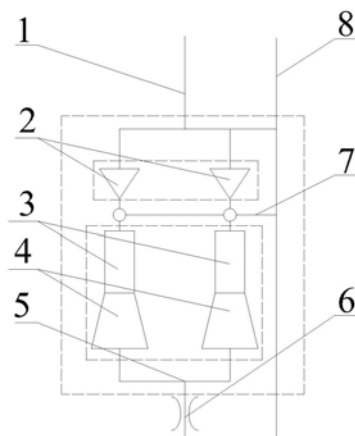
Поширеність застосування ежекційних технологій свідчить про їх світове значення.

Відомі наукові праці присвячені ежекційним технологіям таких авторів, як Сазонов Ю.А. [1], Онацко Р.Г. [2], Каменева П.Н. [3], Кіріловського Ю.Л. [4], Соколова Е.А. [5] та інших.

Відомі схеми з використанням струминних насосів, які зменшують диференціальний тиск на вибої свердловини, що робить їх незамінними при бурінні в зонах поглинання бурового розчину. Дана обставина поряд з можливістю струминного насоса інтенсифікувати процес промивання свердловини призвело до використання ежекційних систем в похило орієнтованому і, зокрема, горизонтальному бурінні.

До недоліків відомих конструкцій [6] відноситься значний додатковий гідравлічний опір, який створює робоча насадка струминного насоса, у зв'язку з чим, виникають труднощі при експлуатації гідромоніторних доліт внаслідок перевантаження бурових насосів.

Метою даних досліджень є вдосконалення конструкції ежекційної системи, яка реалізує пряме промивання привибійної зони в процесі буріння. На кафедрі нафтогазової гідромеханіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу було сформульовано завдання задача забезпечення можливості ефективного використання струминних насосів у компоновці з гідромоніторними долотами шляхом зниження гідравлічних втрат в гідравлічній системі аналогічного за своїм призначенням пристрою. Поставлену задачу вдалося вирішити використанням паралельного з'єднання струминних насосів. Гідравлічна схема розробленого пристрою зображена на рисунку 1.



1 – канал бурильних труб; 2 – робочі насадки; 3 – камера змішування; 4 – дифузори;  
5 – напірна камера; 6 – долото; 7 – канал інжекції; 8 – кільцевий канал свердловини

Рис.1. Гідравлічна схема наддолотного пристрою для буріння свердловин

Пристрій, гідравлічна схема якого зображена на рисунку 1, працює наступним чином. Промивальна рідина через бурильну колону 1, робочі насадки 2, камери змішування 3 та дифузори 4 до напірної камери 5, далі до гідромоніторного долота 6 на вибій свердловини. Робочий потік з робочих насадок 2 створює розрідження, яке інжектує рідину з кільцевого каналу свердловини 8 через радіальні канали, за рахунок чого інтенсифікується промивання вибою свердловини.

Для аналізу ефективності методу зниження величини гідравлічних втрат внаслідок використання струминних насосів у процесі буріння нафтогазових свердловин, необхідно визначити необхідні вихідні дані. Для порівняння приймаємо дві свердловини однакової конструкції, котрі споруджуються методом роторного буріння. Для одного з етапів буріння використовується гідромоніторне долото діаметром  $D$ . Діаметр насадок гідромоніторного долота  $d_H$  в кількості  $n$  штук. Обидві свердловини споруджуються з використанням струминних насосів, діаметр робочої насадки котрих –  $d_{PH}$ , основне геометричне співвідношення

струминних насосів –  $K_{CH}$ . На першій свердловині використовується пристрій, конструкція якого описана в роботі Султанова Б.З. [6], а на другій свердловині – гідравлічна схема зображена на рисунку 1.

Для порівняльного аналізу різних схем компоновок свердловинних струминних насосів раціонально використовувати графоаналітичний метод. Характеристика циркуляційної системи бурової установки в компоновці з свердловинним струминним насосом можна отримати, скориставшись рівнянням:

$$h = \frac{P_3 - P_1}{P_p - P_1}, \quad (1)$$

де  $P_p$  - тиск робочого потоку рідини, який подається буровим насосом на робочу насадку струминного насоса;

$P_3$  - тиск змішаного потоку рідини на виході з дифузора струминного насоса;

$P_1$  - тиск потоку рідини, інжектваного свердловинним насосом із затрубного простору бурильної колони.

Тиск робочого потоку рідини, який подається буровим насосом на робочу насадку струминного насоса:

$$P_p = \rho g L + \Delta p_{кп} + \Delta p_d + \Delta p_{рн}, \quad (2)$$

де  $\rho$  - густина промивальної рідини;

$L$  – кінцева глибина фази буріння;

$g$  - прискорення вільного падіння;

$\Delta p_{кп}$  - гідравлічні втрати в затрубному просторі бурильної колони;

$\Delta p_d$  - гідравлічні втрати на вибої свердловини;

$\Delta p_{рн}$  - гідравлічні втрати на робочій насадці струминного насоса.

Тиск змішаного потоку рідини на виході з дифузора струминного насоса:

$$P_3 = \rho g L + \Delta p_{кп} + \Delta p_d. \quad (3)$$

Тиск потоку рідини, інжектваного свердловинним насосом із затрубного простору бурильної колони:

$$P_1 = \rho g L + \Delta p_{кп}. \quad (4)$$

Рівняння (4) не враховує гідравлічних втрат у всмоктувальній лінії, оскільки для прийнятої конструкції струминного насоса вони є незначними.

З метою спрощення отриманих рівнянь введемо позначення:

$$K_{рн} = \frac{\rho}{2\mu_n^2 \cdot f_{рн}^2}, \quad (5)$$

$$K_d = \frac{\rho}{2\mu_n^2 \cdot n \cdot f_n^2}, \quad (6)$$

$$K_3 = \frac{8\lambda_3 \cdot \rho \cdot L}{\pi^2 (D - d_{к3})^3 \cdot (D + d_{к3})^2}, \quad (7)$$

де  $\mu_H = 0,95$  - коефіцієнт втрати робочої насадки;

$f_{PH}$  - площа поперечного перерізу робочої насадки струминного насоса;

$f_H$  - площа поперечного перерізу робочої насадки гідромоніторного долота;

$d_{к3}$  - зовнішній діаметр бурильної колони.

Коефіцієнт опору робочої насадки  $K_{PH}$  та робочих насадок гідромоніторного долота  $K_D$  отримано за формулою Бордо, а опору каналу затрубного простору  $K_3$  – за формулою Дарсі-Вейсбаха.

З урахуванням прийнятих позначень, а також формули для визначення гідростатичного тиску систему рівнянь (2)-(4) перепишемо у вигляді

$$P_P = K_{PH} \cdot Q_{PH}^2 + K_D \cdot Q_3^2 + K_3 \cdot Q_H^2 + \rho g L; \quad (8)$$

$$P_3 = K_D \cdot Q_3^2 + K_3 \cdot Q_H^2 + \rho g L; \quad (9)$$

$$P_i = K_3 \cdot Q_H^2 + \rho g L. \quad (10)$$

де  $Q_{PH} = Q_H$  - витрата рідини на робочій насадці струминного насоса для гідравлічної схеми, описаної в роботі Султанова Б.З. [6];

$Q_{PH} = \frac{1}{2} Q_H$  - витрата рідини на робочій насадці струминного насоса для гідравлічної схеми, зображеної на рисунку 1.

$Q_3 = Q_H(1+i)$  - витрата рідини змішаного потоку рідини, де  $i$  – коефіцієнт інжекції.

Врахувавши вище згадані співвідношення, та підставивши рівняння (8)-(10) в рівняння (1), отримаємо:

- для гідравлічної схеми, описаної в роботі Султанова Б.З. [6]:

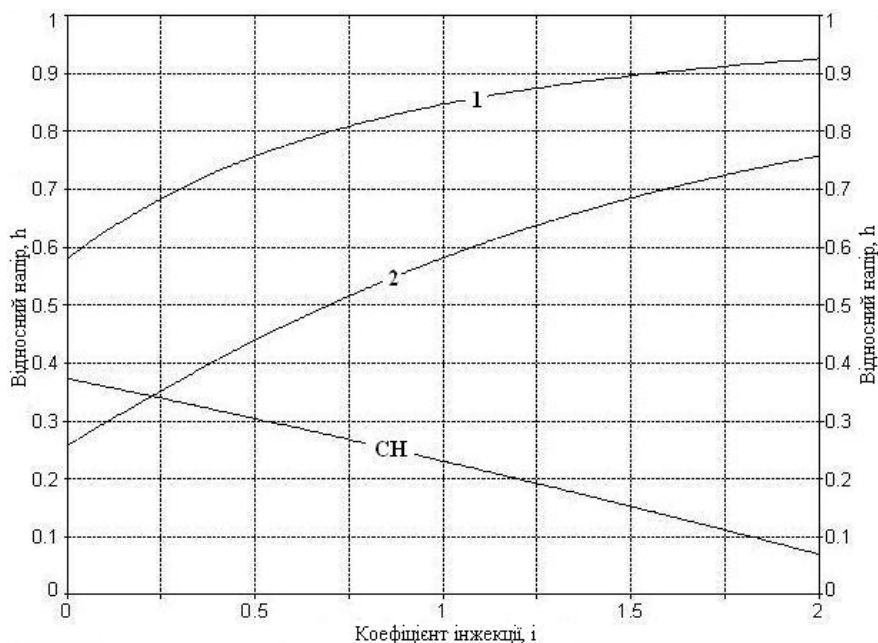
$$h = \left( 1 + \frac{K_{PH}}{K_D} \cdot (1+i)^{-2} \right)^{-1}; \quad (11)$$

- для гідравлічної схеми, зображеної на рисунку 1:

$$h = \left( 1 + 4 \frac{K_{PH}}{K_D} \cdot (1+i)^{-2} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Для графічної інтерпретації записаних математичних виразів, задамо вихідні дані:  $K_{CH}=4$ ;  $d_{PH}=21$ мм,  $d_H=10,3$ мм,  $n=3$ . Підставивши відомі в рівняння (11) та (12) з урахуванням (5) та (6), а також рівняння характеристики струминного насоса [5], отримаємо суміщену характеристику струминного насоса та гідравлічних систем з послідовним та паралельним з'єднанням струминних насосів, які зображено на рисунку 2.

Як видно з рисунку 2, характеристика струминного насоса не перетинається з характеристикою гідравлічної системи для схеми, описаної в роботі Султанова Б.З. [6] в діапазоні позитивних значень коефіцієнта інжекції, це означає, що струминний насос за таких умов не може виконувати свої функції, і його використання не допустиме. Але при використанні паралельного з'єднання струминних насосів даний недолік усувається, що є очевидним з рисунку 2, так як характеристика струминного насоса перетинається з характеристикою гідравлічної системи з паралельним з'єднанням двох струминних насосів (див.рис.2) в діапазоні додатних значень коефіцієнта інжекції, вказуючи робочу точку даної системи. З сказаного вище можна зробити висновок, що використання паралельного з'єднання двох струминних насосів призводить до зниження гідравлічних втрат в системі, а саме затрат енергії на її роботу, навантаження на бурові насоси, і, як наслідок, підвищення коефіцієнта корисної дії.



*СН – характеристика струминного насоса; 1 – для гідравлічної схеми, описаної в роботі Султанова Б.З. [6]; 2 – характеристика гідравлічної системи з паралельним з'єднанням струминних насосів*

Рис.2. Суміщені характеристики струминного насоса та гідравлічних систем з послідовним та паралельним з'єднанням струминних насосів

Розроблена гідравлічна схема пристрою для буріння свердловин буде вельми корисна, оскільки дозволяє спільне використання з гідромоніторинними долотами, чого не можна було сказати про більшість відомих аналогів. Крім того, використання паралельного з'єднання струминних насосів призводить до зниження гідравлічних втрат на робочих

насадках, що пов'язано з поділом робочого потоку рідини на потоки, число яких рівне кількості паралельно з'єднаних струминних насосів в розробленій гідравлічній системі.

Слід зазначити, що кількість паралельно з'єднаних струминних насосів обмежується лише поперечними габаритами пристрою (діаметром свердловини) та мінімальною величиною витрати робочої рідини на виході робочої насадки для забезпечення інжекції рідини з кільцевого каналу свердловини. Питання оптимально кількості паралельних струминних насосів в пристрої поряд з розробкою конструкції його прототипу буде розглянуто в подальших дослідженнях.

### *Література*

1. Сазонов Ю.А. Разработка устройства, снижающего дифференциальное давление на забое скважины и повышающего скорость бурения: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Ю.А.Сазонов. - Москва, МИНГ им. И.М. Губкина, 1989. - 176с.
2. Онацко Р.Г. Обґрунтування раціональних режимів роботи свердловинних струминних насосів: дис.канд.техн.наук: 05.05.12. / Р.Г.Онацко. - Івано-Франківськ. - 172с.
3. Каменев П.Н. Гидроэлеваторы в строительстве / П.Н.Каменев. - М., Стройиздат, 1970. - 416с.
4. Кириловский Ю.Л. Рабочий процесс и основы расчета струйных насосов / Ю.Л.Кириловский, Л.Г.Подвидз // Труды ВИГМ. – М., 1960. – С. 96-135.
5. Соколов Е.Я. Струйные аппараты / Е.Я.Соколов, Н.М.Зингер. - М., Энергия, 1970. - 288 с.
6. Султанов Б.З. Управление устойчивостью и динамикой бурильной колонны / Б.З.Султанов. – М.: Недра, 1991. – 208 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Копєсєм Б.В.**,  
д.т.н., професором **Яремійчуком Р.С.**(м. Сімферополь)*

## INCREASING THE EFFICIENCY OF JET PUMPS DRILLING

**A. P. Melnikov**

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivsk, Carpatska str., 15;  
ph. +380 (3422) 4-00-98, e-mail: [gidro@nung.edu.ua](mailto:gidro@nung.edu.ua)*

*The article considers the main purpose of jet pumps in the construction of oil and gas wells, namely, the increase in ROP. It is noted that the main drawback of the existing ejection systems associated with significant hydraulic losses in the working nozzle jet pump. On the basis of the analysis proposed device is designed for drilling wells, which reduces the load on the mud pumps in use, and also provides an opportunity to work with jetting bits.*

**Key words:** jet pump, ejector, head ratio, flow ratio.

## АНАЛІЗ ВІДМОВ МОРСЬКОГО ПРОТИВИКИДНОГО ОБЛАДНАННЯ

**Р. В. Іванків**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, Івано-Франківськ, Карпатська 15; тел. 4-92-58,  
e-mail: [no@nung.edu.ua](mailto:no@nung.edu.ua)*

*В статті було проаналізовано дані, зібрані з 83 свердловини, що бурилися в акваторія морів глибиною від 400 до 2100 м.*

*Опрацювання даної інформації дозволяє судити про найбільш не-надійні елементи морського протівикидного обладнання, про вплив глибини акваторії на надійність морського ПВО та фінансові і матеріальні втрати, що мають місце при відмовах даного обладнання.*

**Ключові слова:** буріння в морі, морське протівикидне обладнання, превентори, відмови.

Основними напрямками розвитку паливно-енергетичного комплексу України визначаються головні завдання галузі: підвищення темпів і ефективності розвитку економіки на базі прискорення науково-технічного прогресу, технічне переозброєння й реконструкція виробництва, інтенсивне використання виробничого потенціалу, удосконалювання системи керування. При цьому передбачене забезпечення видобутку достатньої кількості нафти, газу й газового конденсату за рахунок розвитку галузі шляхом введення в розробку великого числа нових нафтогазових родовищ. З часом родовища на суходолі майже вичерпалися, тому актуальним стало питання розробки нафтогазових родовищ на континентальному шельфі.

Важливу роль у комплексі обладнання морських бурових установок відіграє протівикидне обладнання. Воно повинно відповідати всім вимогам, які обумовлені техніко-технологічними і гірничо-геологічними умовами роботи у процесі спорудження свердловини, а також відповідати всім експлуатаційним показникам та володіти високою надійністю.

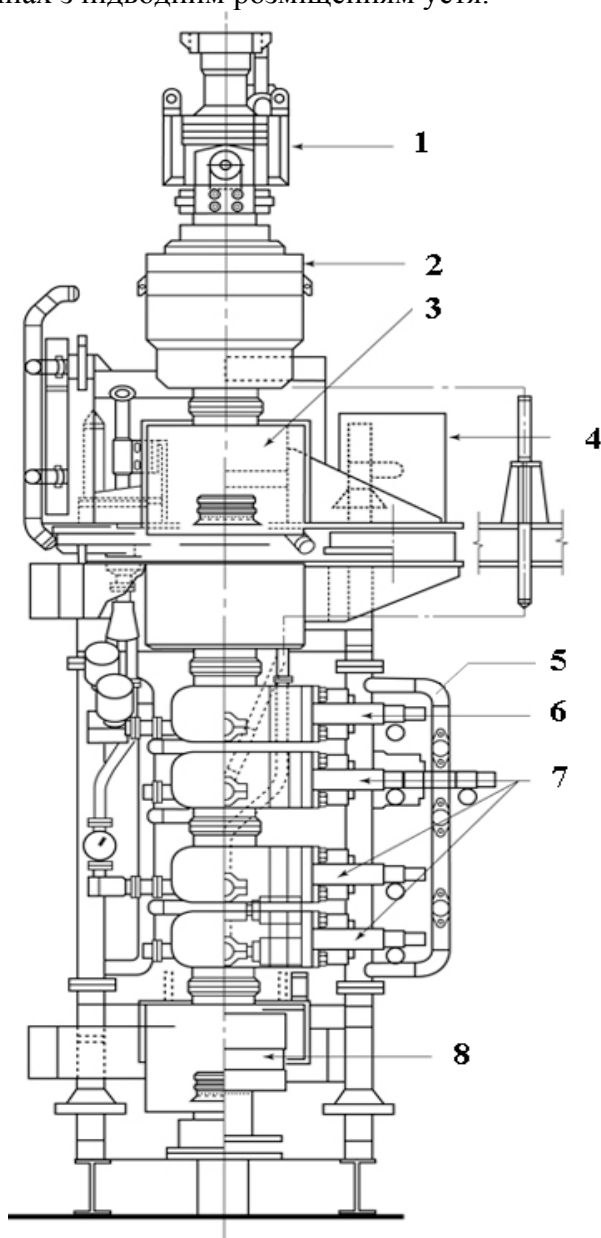
Дослідженню процесу герметизації устя свердловини присвячені роботи І.В. Костриби, У.К. Гоїнса, Р. Шеффілда, С.Г. Бабаєва, А.А. Даниеляна, В.А. Калєнтьєва, О.А. Блохіна, Д.В. Римчука, В.Г. Шульги [5], Г.М. Гульянца [2], В.Д. Шевцова та ін.

Аналіз опублікованих праць у даному напрямі досліджень та недавні аварії на морських родовищах світу показав, що існують певні проблеми під час експлуатації протівикидного обладнання, що використовується при бурінні свердловин на морі. Тому проблема підвищення на-

дійності противикидного обладнання є актуальною і потребує подальшого розвитку.

Метою досліджень є підвищення надійності морського противикидного обладнання.

На рис.1 наведено типову превенторну збірку, що використовується на свердловинах з підводним розміщенням устя.



1 – гнучка муфта; 2 – універсальний превентор; 3 – з'єднувач; 4 – система керування превенторами; 5 – гідравлічні лінії керування; 6 – плашковий зрізаючий превентор; 7 – плашковий превентор; 8 – перевідник колонної головки

Рис.1. Типова превенторна збірка



Під час експлуатації обладнання з ладу можуть виходити такі елементи противикидного обладнання:

- головна система керування,
- лінії глушіння та дроселювання,
- клапани ліній глушіння та дроселювання,
- плашкові превентори,
- універсальний превентор,
- гнучкі муфти,
- з'єднувачі.

На рисунку 2 зображено залежність кількості відмов різних елементів морського ПВО від глибини акваторії, де проводиться буріння.

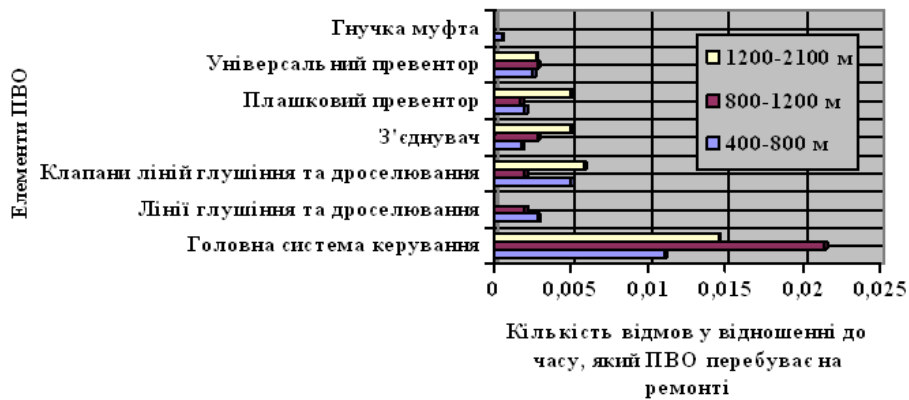


Рис.2. Діаграма залежності виникнення відмов елементів ПВО від глибини акваторії

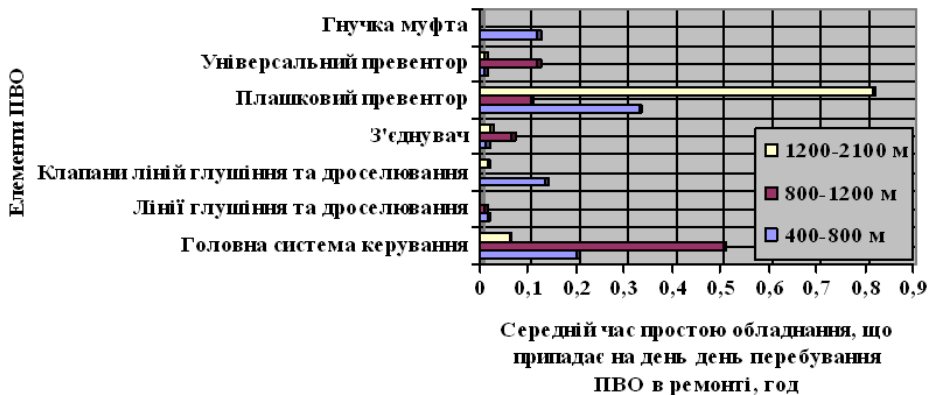


Рис.3. Діаграма залежності часу простою елементів ПВО від глибини акваторії

З огляду на статистичні дані можемо сказати, що найчастіше відмовляє система керування. Це зумовлено складними умовами її роботи, такими як корозійне середовище морської води, хвильові навантаження,

гідростатичний тиск товщі води, низька температура навколишнього середовища.

На рисунку 3 показано залежність часу простою, тобто часу, який витрачається на ремонт, монтаж та обслуговування різних елементів морського ПВО від глибини акваторії, де проводиться буріння.

Також виявлено, залежність часу, що витрачається на усунення відмов від глибини акваторії, де проводиться буріння. Звідси бачимо, що чим більша глибина акваторії, тим більше часу витрачається на ремонт, монтаж та обслуговування обладнання.

Також побудовано графік залежності часу простою всього комплексу бурового обладнання від глибини акваторії, де проводиться буріння (рис.4).

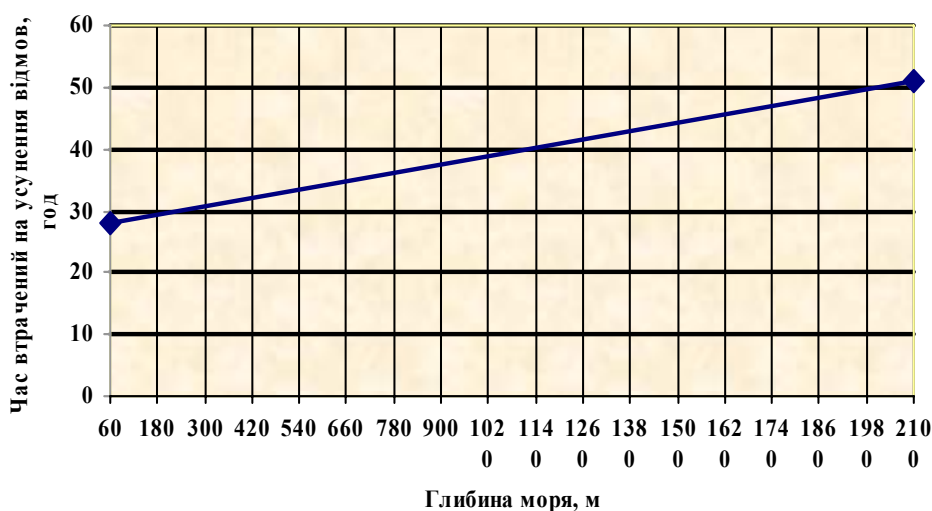


Рис.4. Графік залежності втраченого часу, який йде на усунення відмов противикидного обладнання, від глибини акваторії, де проводиться буріння

Аналіз відмов морського ПВО дає можливість судити про найбільш вірогідні відмови, що можуть мати місце при експлуатації противикидного обладнання в морі, та оцінити втрати часу та грошей, що будуть витрачені на усунення неполадок, що, в свою чергу, дасть змогу більш ефективно експлуатувати, ремонтувати та обслуговувати даний вид обладнання.

### *Література*

1. Буровое оборудование: Справочник в 2-х томах. Т.1 / В.Ф.Абубакиров, В.А.Архангельский, Ю.Г.Буримов, И.Б.Малкин. – 2000.
2. Гульянц М.Г. Справочное пособие по противовыбросовому оборудованию скважин / М.Г.Гульянц. – М.: Недра, 1983.
3. ДНАОП 1.1.21-20-03 Правила безпеки у нафтогазовидобувній промисловості України. – К.: 2004

4. Иогансен К.В. Спутник буровика: Справочник / К.В.Иогансен. – М.: Недра, 1990. – 294 с.
5. Шульга В.Г. Устьевое оборудование нефтяных и газовых скважин: Справочная книга / В.Г.Шульга, Е.И.Бухаленко. – М.: Недра, 1978. – 235 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Векериком В.І.**,  
д.т.н., професором **Яремійчуком Р.С.**(м. Сімферополь)*

## ANALYSIS OF FAILURES MARINE BOP

**R. V. Ivankiv**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;  
ph. +380 (3422) 4-92-58; e-mail: no@nung.edu.ua*

*The article analyzed data collected from 83 wells that drilled in the waters of the seas of 400 to 2100 m depth. Working up this information allows to judge about the most unreliable elements of the sea BOP, the impact of deep waters on the reliability of blowout equipment and financial and material costs that occur in the case failure of the equipment.*

**Key words:** *drilling in the sea, marine BOP, preventer, failure.*

# *Інформаційні технології*

---

---

УДК 681.3.07

## **ОРГАНІЗАЦІЯ АПАРАТНО-ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ РЕЗЕРВУАРНИМИ ПАРКАМИ РІДКИХ ВУГЛЕВОДНІВ**

**Л. М. Заміховський, М. Я. Николайчук, Ю. Я. Мойсюк**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-80-00; e-mail: LeoZam@ukr.net*

*На основі результатів аналізу технологічних процесів управління резервуарними парками визначено технологічні параметри для розрахунку об'єму і маси рідких вуглеводнів. Запропоновано функціональні, алгоритмічні і програмні рішення для реалізації системи управління резервуарними парками на базі апаратно-програмних засобів Simatic S7.*

*Особливістю реалізації запропонованої системи є новітня елементна і програмна база (PLC Simatic S7-1200, SCADA WinCC), а також можливість дистанційного моніторингу і управління територіально розподіленими об'єктами через WEB-інтерфейс.*

***Ключові слова:** технологічні параметри, система управління, апаратно-програмні засоби Simatic S7, PLC, SCADA.*

Резервуарні парки вуглеводнів є складними розподіленими технологічними об'єктами. При вирішенні задач автоматизації таких об'єктів, окрім стандартних підходів і процедур необхідно вирішувати ряд додаткових задач, що пов'язано з територіальною розподіленістю об'єктів управління, наявністю вибухонебезпечних зон різного рівня, а також високих вимог до метрології вимірювальних каналів, надійності і тривалого терміну експлуатації промислового обладнання.

Досвід експлуатації резервуарних парків вуглеводнів свідчить про необхідність застосування при побудові систем управління такими об'єктами сучасних серійних з високими техніко-економічними показниками апаратно-програмних засобів з тривалим циклом експлуатації і підтримкою виробника. Крім того, такі системи управління повинні відповідати міжнародним сертифікатам з якості і безпеки, забезпечувати

комунікацію через сучасні промислові шини (PROFIBUS, Industrial Ethernet, Foundation Fieldbus, IWLAL, інш.), а також передбачати можливість розширення шляхом модернізації та застосування нових компонентів.

Проведений аналіз та досвід проектно-конструкторських робіт показав, що одними з найбільш оптимальних за вищеперерахованими критеріями є апаратно-програмні засоби Simatic S7 концерну «Siemens».

На кафедрі «Комп'ютерних технологій в системах управління та автоматизації» Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу тривалий час функціонує лабораторія «Промислових контролерів Simatic S7 концерну «Siemens»», що є основою для виконання проектів систем управління, проведення довготривалих випробувань і досліджень архітектур, компонентів, вимірювальних каналів та інтелектуальних первинних перетворювачів фізичних величин [1].

Нижче наведено результати проектних та дослідних робіт з організації апаратно-програмних засобів автоматизованих систем управління резервуарними парками рідких вуглеводнів, що виконані для ВАТ «Нафтохімік Прикарпаття» [2,3].

#### **Призначення системи і технічні характеристики**

Система призначена для вимірювання рівня, температури, витрати, об'єму та маси рідких вуглеводнів в резервуарах, управління виконавчими механізмами (клапани, насоси та ін.), а також підтримує електронну реєстрацію технологічних параметрів, аварійну сигналізацію та документообіг товарних операцій.

#### **Технічні характеристики:**

- апаратно-програмні засоби концерну Simatic S7 «Siemens»;
- технологічні вимірювання (рівень до 20 м, температура, витрата, об'єм, маса);
- комунікації (PROFIBUS, Industrial Ethernet, GSM, HART, WEB-інтерфейс).
- кількість точок контролю та управління (до 256000);
- можливість розгортання складних клієнт-серверних конфігурацій.

#### **Склад системи:**

- давачі технологічних параметрів;
- програмований логічний контролер PLC (Simatic S7-300, Simatic S7-1200);
- верхній рівень на базі SCADA WinCC «Siemens».

#### **Верхній рівень на базі SCADA WinCC містить:**

- стартове вікно;
- функціональну схему резервуарного парку;
- рівень групи резервуарів;
- рівень окремого об'єкту моніторингу та управління.

Стартове вікно (рис.1) включає заставку системи з можливістю переходу на наступний рівень.



Рис.1. Стартове вікно проекту в SCADA WinCC



Рис.2. Функціональна схема резервуарного парку

Функціональна схема резервуарного парку №1 рідких вуглеводнів ВАТ «Нафтохімік Прикарпаття» (рис.2) включає схему розташування груп резервуарів з їх номерами, позначених відповідним кольором в залежності від виду нафтопродукту.

Деталізована функціональна схема окремої групи резервуарів (рис.3) уможливує моніторинг технологічних параметрів (температура, висота, маса продукту) окремих об'єктів управління.

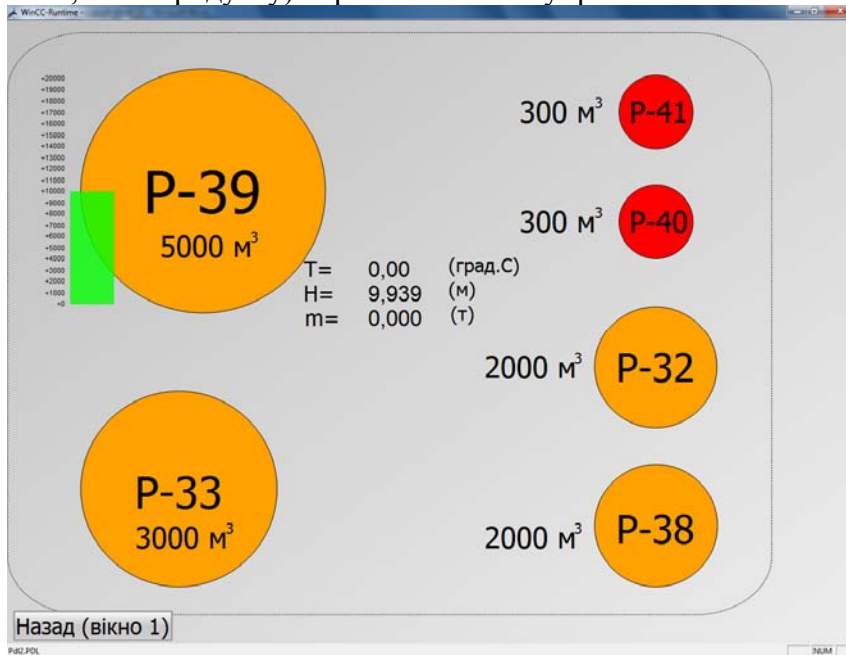


Рис.3. Мнемосхема групи резервуарів з можливістю моніторингу основних технологічних параметрів

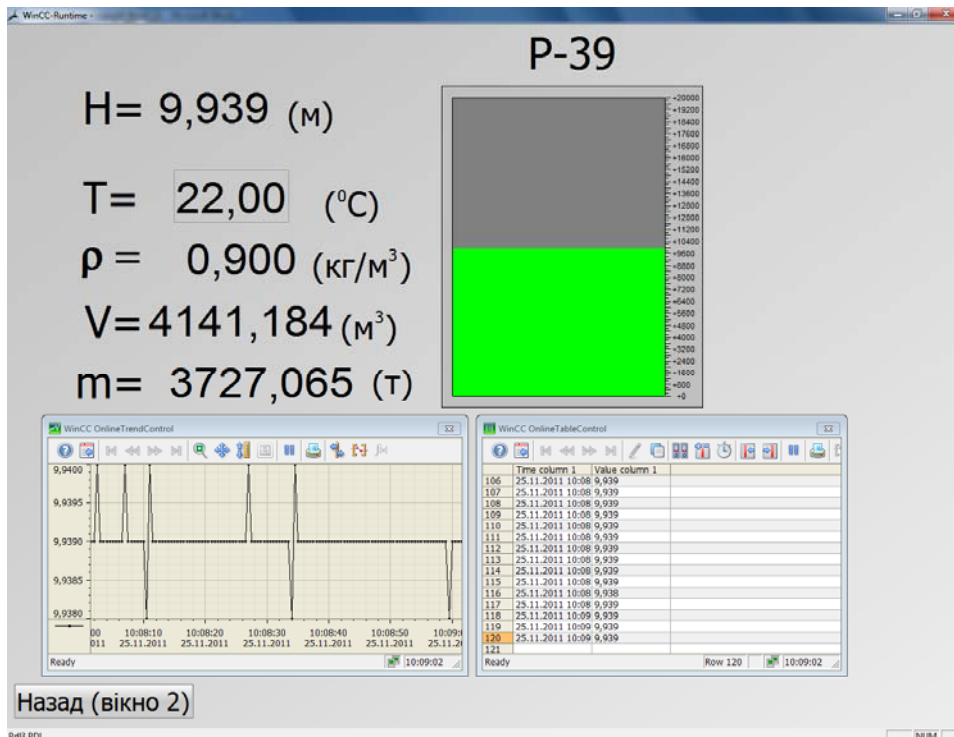


Рис.4. Рівень окремого об'єкту моніторингу та управління

Рівень окремого об'єкта моніторингу та управління (рис.4) включає відображення основних технологічних показників (температури, рівня, об'єму, маси), а також інструменти для архівування технологічних параметрів і виведення аварійних повідомлень.

Система може застосовуватись в режимі інформаційно-вимірювальної, або бути розширеною до інформаційно-управляючої системи на підприємствах нафтогазовидобувної і-переробної галузей, підприємствах з транспортування і зберігання нафти та нафтопродуктів, автозаправних станціях, харчовій промисловості.

Особливістю системи є можливість дистанційного моніторингу і управління територіально розподіленими об'єктами через WEB-інтерфейс.

### *Література*

1. Заміховський Л.М. Дистанційна параметризація та калібрування інтелектуальних первинних перетворювачів фізичних величин / Л.М.Заміховський, М.Я.Николайчук // Вісник Хмельницького національного університету. – 2007. – №2 (Т.1, техн.науки). – С. 24-29.
2. Заміховський Л.М. Апаратно-програмний комплекс для вимірювання рівня нафтопродуктів на основі ультразвукових первинних перетворювачів і обладнання Simatic S7-300 / Л.М.Заміховський, М.Я.Николайчук // Методи та прилади контролю якості. – 2008. – №21. – С. 103-106.
3. Заміховський Л.М. Сучасні апаратно-програмні засоби для організації автоматизованих систем управління товарно-сировинними парками / Л.М.Заміховський, М.Я.Николайчук // Проблеми і перспективи транспортування нафти і газу: Матеріали міжнародної наук.-техн. конф. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 153-155.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Горбійчуком М.І.,  
д.т.н., професором Адасовським Б.І. (м. Київ)*

## **ORGANIZATION HARDWARE AND SOFTWARE AUTOMATED SYSTEMS OF TANK PARKS LIQUID HYDROCARBONS**

**L. Zamikhovsky, N. Nykolajchuk, Yu. Ya. Moisiuk**

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivsk, Karpatska str., 15;*

*ph. +380 (3422) 4-80-00; e-mail: LeoZam@ukr.net*

*Through the analysis of processes of reservoir parks defined process parameters to calculate the volume and mass of liquid hydrocarbons. A func-*



*tional, algorithmic and software solutions for implementing the system of tank parks based on hardware and software Simatic S7.*

*The peculiarity of the proposed system is the newest element and software base (PLC Simatic S7-1200, SCADA WinCC), and the possibility of remote monitoring and management of geographically distributed objects via WEB-interface.*

**Key words:** *technological parameters, control system, hardware and software Simatic S7, PLC, SCADA.*

УДК 004.4

**ОСОБЛИВОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ СУЧАСНИХ  
КОМП'ЮТЕРНИХ ТРЕНАЖЕРНИХ КОМПЛЕКСІВ****Р. М. Матвієнко, Л. О. Сав'юк**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-80-00; e-mail: romanager@rambler.ru*

*Наведено особливості функціональної структури сучасних комп'ютеризованих тренажерних комплексів, обґрунтовано важливість їх розробки і впровадження у навчальний процес студентів технічних спеціальностей*

**Ключові слова:** *тренажер, модель, оператор, інтерфейс, технологія, об'єкт управління*

Сучасний стан розвитку освіти і науки характеризується масштабним використанням Інтернет-технологій, електронних бібліотек, навчально-методичних мультимедійних матеріалів, віртуальних навчальних лабораторій та спеціалізованих промислових тренажерних комплексів

Можливість імітувати складні технологічні комплекси для підготовки і підвищення кваліфікації фахівців у різних галузях господарської діяльності з'явилася завдяки стрімкому розвитку комп'ютерних технологій [1].

Більш повне і точне визначення поняття тренажер наводиться в [2]. Хоча дане визначення стосується до тренажерів електричних станцій та мереж, його можна подати в більш загальному вигляді: тренажер – це високоорганізований імітаційний технічний засіб професійної підготовки персоналу, що є спеціалізованим дидактичним комплексом технічних і програмних засобів, який із заданою точністю реалізує інтерфейсні та математичні моделі технічної та фізичної сутності ергатичної системи «технічний об'єкт – середовище – оператор», а також всі необхідні інформаційно-ергономічні взаємозв'язки у цій системі, і призначений для формування та вдосконалення в операторів професійних навичок та вмій, необхідних їм для управління об'єктом в штатних, нештатних та аварійних ситуаціях шляхом багаторазового виконання операторами дій, властивих управлінню реальним об'єктом.

Одночасно існують визначення спеціалізованого та комп'ютерного тренажерів: “спеціалізований (локальний) тренажер – це тренажер, в якому реалізовані інтерфейсні та математичні моделі певного агрегату чи певної ділянки технологічного процесу; призначений для формування та вдосконалення в операторів навичок і вмій управління конкретними об'єктами” [2], “комп'ютерний тренажер – тренажер, в складі яко-

го як модель об'єкта управління, так і робочі місця операторів та інструктора реалізуються на базі комп'ютерних засобів" [3].

Повноцінний комп'ютерний тренажерний комплекс повинен складатися з таких основних структурних елементів:

- робоче місце оператора;
- робоче місце інструктора;
- система навчання;
- модель об'єкта управління;
- модель АСУ технологічним процесом;
- система тестування та перевірки знань та навичок операторів;
- блок інформаційної підтримки оператора.

Робочі місця оператора та інструктора включають в себе комп'ютер (чи мережу комп'ютерів) з відповідними програмами-тренажерами, а також принтер для роздрукування відповідних протоколів та результатів роботи операторів з комп'ютерним тренажером.

Система навчання повинна складатися з набору анімаційних, звукових файлів та навчально-методичних посібників для вивчення режимів роботи та будови об'єкта управління.

Модель об'єкта управління (ОУ) – імітаційна модель ОУ, яка з деяким ступенем наближення описує технологічний процес чи об'єкт управління.

Модель АСУТП – по суті, адекватна інформаційна модель прототипу об'єкта управління, що включає в себе штатний інтерфейс, засоби управління та базу даних.

Система тестування та оцінювання знань та навичок операторів – це набори тестів для перевірки знань та поточного фізичного та психічного стану операторів, а також засоби протоколювання дій операторів та їх автоматичної оцінки. Сюди також входять засоби контролю, які дозволяють інструкторові стежити за процесом навчання, аналізувати причини помилок оператора і давати відповідні вказівки та рекомендації. Засоби контролю включають:

- систему протоколювання дій оператора, його помилок і повідомлень аварійної і попереджувальної сигналізації; систему стеження за змінами параметрів об'єкта з можливістю подання цих змін у вигляді графіків залежностей параметрів від часу;
- програму автоматичної оцінки дій оператора;
- пульт інструктора для спостереження за ходом тренування і введення збурень для імітації аварійних ситуацій.

Блок інформаційної підтримки оператора повинен містити інтерактивну контекстну довідку, систему підказок та діагностичних повідомлень.

Тренажерні комплекси можна порівнювати за багатьма ознаками, але найбільш вагомими є наступні:

- об'єктивність: відповідність міжнародним вимогам;

- унікальність: відсутність аналогічних комплексів;
- універсальність: можливість використання комплексу як для навчання студентів, так і для підвищення кваліфікації, перепідготовки і перевірки компетентності і атестації фахівців;
- достовірність: глибина і правильність моделювання, наочність і реалістичність відтворення всіх функцій і вимірів контрольованих параметрів, імітація типових несправностей і аварійної роботи;
- варіативність: можливість роботи з ручним і автоматичним управлінням;
- гнучкість: можливість налаштування для використання в групових, так і індивідуальних заняттях;
- наявність зв'язку з реальним об'єктом: можливість отримання технологічних даних безпосередньо з робочого агрегату чи об'єкта;
- масштабованість: можливість нарощення бази нових навчально-тренувальних та контрольних завдань.

Розробка систем подібного класу є складною багатоетапною задачею. Вирішення поставленої задачі дозволить впровадити тренажери у навчальний процес підготовки майбутніх інженерів.

### *Література*

1. Семенова И.И. Компьютерные тренажеры в нефтегазовой отрасли: обзор [Электронный ресурс] / Режим доступа к ресурсу: <http://semenova-ii.narod.ru/index.html>.
2. Информационные технологии как основа подготовки персонала электрических станций и сетей ГПА-Ц1-16С / С.А.Магид, И.Ш.Загретдинов, Л.П.Музыка, Е.Н.Архипова // Материалы V Всероссийской конференции руководителей образовательных учреждений электроэнергетики и подразделений по подготовке персонала ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России». – Омск, 2005. – 168 с. – С. 108-122.– Львів, 2003. – 62 с.
3. Проблемы современного энергетического тренажеростроения через призму терминологии / С.И.Магид, И.Ш.Загретдинов, С.В.Мищеряков, Е.Н.Архипова, Л.П.Музыка // Энергосбережение и водоподготовка. – Москва, 2007. – №1(45). – С. 43-50.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Заміховським Л.М., д.т.н., професором Телеником С.Ф. (м. Київ)*

## **THE FEATURES OF OPERATION OF MODERN COMPUTER SIMULATORS**

**R. M. Matviyenko, L. O. Savyuk**

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;*

*ph. +380 (342) 4-80-00; e-mail: romanager@rambler.ru*

*Resulted features of functional structure of the modern computerized trainer complexes, made importance of their development and introduction in the educational process of students of technical specialties*

**Key words:** *trainer, model, operator, interface, technology, management object.*

**АВТОМАТИЗОВАНІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ В ІНДУСТРІЇ  
ГОТЕЛЬНОГО БІЗНЕСУ ТА ТУРИЗМУ НА УКРАЇНІ****О. Л. Заміховська**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-80-00; e-mail: ktsu@nung.if.ua*

*Наводиться аналіз сучасного стану інформаційних технологій і систем в індустрії туризму та готельного бізнесу на прикладі системи Fidelio Front Office компанії «Micros - Fidelio», глобальних дистрибуторських систем резервування Amadeus, Galileo, Sabre і Worldspan і ін., а також програм бронювання і управління різними службами готельного господарства для визначення перспективних напрямків їх застосування в Україні та розробки рекомендацій менеджменту туризму на основі використання інформаційних технологій і систем.*

**Ключові слова:** *інформаційні технології, туризм, готельний бізнес, управління, бронювання.*

Вступ. Туризм є однією з найбільш високоприбуткових і найбільш динамічних галузей світової економіки і здійснює вплив на такі ключові сектори економіки, як транспорт і зв'язок, торгівля, будівництво, сільське господарство, виробництво товарів народного споживання і ін.

Останнє десятиліття ознаменувалося стійкою тенденцією до розвитку інформатизації процесів управління підприємствами туристичної галузі. Глобалізація є перспективним напрямом в індустрії міжнародного туризму, оскільки забезпечує туристичним суб'єктам швидку обробку та передачу інформації, дає повну і точну довідку стосовно готелів, залізниць, авіакомпаній цілого світу. Глобальні системи бронювання (Global Distribution System – GDS) відіграють першо-чергову роль в автоматизації цих процесів. В зв'язку з цим, процес впровадження GDS в діяльність туристичних підприємств України є важливим завданням держави на сучасному етапі розвитку.

Мета статті – на основі аналізу сучасного стану глобальних комп'ютерних систем резервування визначити переваги найбільш розповсюджених системи для ринку України.

Успішний розвиток туризму завдячує значним досягненням технічного прогресу в галузі інформаційних технологій, які з кінця ХХ століття завоювали свої позиції, докорінно змінивши в індустрії туризму процедуру формування, просування та реалізації туристичних послуг.

Про зростання рівня застосування інформаційних технологій говорить той факт, що туризм входить до п'ятірки (а за деякими даними вже до трійки) галузей з найбільшою часткою реалізації товарів і послуг через Інтернет [1].

Системи інформаційних технологій, що використовуються в туризмі, складаються, як правило, з комп'ютерної системи бронювання, системи проведення телеконференцій, відеосистем, комп'ютерів, інформаційних систем управління, електронних інформаційних систем авіаліній, електронної пересилки грошей, телефонних мереж і ін. При цьому необхідно відзначити, що такі системи розгортаються не окремими туристичними агентствами, готелями чи авіакомпаніями, а всіма ними. Таке використання кожним сегментом туризму інформаційних систем та технологій має велике значення для всіх решти її складових.

Широке застосування електронної техніки та автоматизації процесів надання послуг призвело до створення національних і міжнародних систем бронювання, мультимедійних каталогів туристичних подорожей з різних напрямів, електронних баз даних з нормативно-правових актів, систем взаєморозрахунків і інших сучасних досягнень в галузі інформаційних технологій, що дозволило помітно покращити якість наданих туристичних послуг, знизити їх собівартість, скоротити витрати туристів на самостійний пошук і придбання необхідного пакету послуг.

Таким чином, можна констатувати, що туризм сьогодні – це глобальний комп'ютеризований бізнес, в якому беруть участь найбільші авіакомпанії, готельні мережі і туристичні корпорації всього світу. Він стає гнучким, індивідуальним і більш привабливим та доступним для споживача.

Створення розвиненої індустрії туризму має важливе значення для економіки України і є одним з ефективних напрямів її структурної перебудови. Стихийний український ринок туристичних послуг, що склався останніми роками, через відсутність координуючого органу знаходиться в кризовому стані, а українські об'єкти, не дивлячись на величезний рекреаційний потенціал країни, до цих пір не включені в постійні міжнародні туристичні маршрути. Одна з причин подібного протиріччя криється у відсутності надійної і достовірної інформації про стан ринку і звичного для західного клієнта сервісу, який базується на широких можливостях, що забезпечуються сучасними засобами зв'язку. Особливості реалізації туристичного продукту не дозволяють говорити про повноцінний ринок без відповідного інформаційного забезпечення.

Українські туристичні фірми і органи з управління туризмом, вступаючи на міжнародний ринок, стикаються в своїй діяльності з проблемами освоєння нових інформаційних технологій, які є необхідною умовою міжнародної інтеграції і сучасної концепції туристичного бізнесу як інформаційно-насиченої сфери. Плануванню розвитку туризму в

регіонах України перешкоджає відсутність статистики та інформації про основні туристичні ресурси.

У зв'язку з цим проведення аналізу сучасного стану інформаційних технологій і систем в туризмі для визначення перспективних напрямків їх застосування та розробки рекомендацій менеджменту туризму на основі використання інформаційних технологій і систем є актуальною задачею і визначає мету даної статті.

Сьогодні більшість українських туристичних компаній вже має доступ практично до всіх перерахованих вище можливостей, що надаються як вітчизняними, так і зарубіжними розробниками інформаційних систем в туризмі. В той же час, різноманітність програмних продуктів та інформаційних систем, що з'явилися останнім часом на українському туристичному ринку, неоднозначність або відсутність повної інформації про їх функціональні можливості та характеристики, а також брак коштів для фінансування проектів з впровадження в туристичних компаніях інформаційних систем з автоматизації туристичних послуг та інші об'єктивні причини, призводять до того, що у керівництва туристичних фірм нерідко виникають проблеми, пов'язані з пошуком, оцінкою та відбором необхідної інформації з інформаційних технологій і систем, запланованим до впровадження, а також пошуком та проведенням переговорів з їх постачальниками.

Індустрія готельного бізнесу є невід'ємною складовою туризму і зараз вже важко собі уявити, як могли функціонувати готелі, санаторії, мотелі, туристичні фірми і інші компанії без систем комп'ютерного забезпечення. Сьогодні ці системи поширені і добре скоординовані та мають високу економічну ефективність використання. Комп'ютерні системи централізованого управління готельним комплексом дозволяють координувати роботу навіть великого готелю без особливих витрат часу і ресурсів. Незважаючи на значну кількість та різноманітність комплексних систем автоматизації готельних господарств, основні принципи побудови подібних систем досить схожі – усі системи є інтегрованими пакетами програм, що автоматизують діяльність основних служб готелю: управління номерним фондом, адміністративною, комерційною, інженерною службами та службою громадського харчування [2].

Нині існує декілька професійних розробок, які заслуговують на увагу при виборі автоматизованої системи управління готелем.

Проаналізуємо основні комп'ютерні системи забезпечення готельних мереж, які використовуються в найбільших готельних мережах світу і України.

Найбільш поширеним універсальним продуктом є комплекс найбільшої у світі компанії «Micros-Fidelio», що спеціалізується на створенні систем управління для готелів і ресторанів упродовж 20 років. Така система встановлена на підприємствах більше 100 найбільших готельних мереж (Sheraton, Hilton, Marriott, Kempinsky, Hyatt та ін.) [3].



Система Fidelio Front Office (FFO) допомагає автоматизувати основні етапи роботи готелю: від комп'ютерного бронювання номерів, реєстрації, розміщення і виписки гостей до управління номерним фондом, ведення бухгалтерії і фінансів. До переваг FFO слід віднести: легкість в експлуатації, обумовлену досить простою логікою побудови системи і зручністю інтерфейсу, високий рівень безпеки, забезпечений строгим розмежуванням доступу користувачів, гнучкість налаштування. Система FFO може успішно використовуватися як в готелях, що належать до готельних мереж, так і в незалежних готелях і пансіонатах з абсолютно різною технологією роботи [2].

Серед комп'ютерних технологій у всьому світі значного поширення отримали комп'ютерні системи бронювання готельних послуг. Вперше поняття «Комп'ютерна Система Бронювання» (КСБ) з'явилося в Європі і США в 60-х роках ХХ століття, а перші КСБ були створені окремими авіакомпаніями і призначалися виключно для обслуговування потреб власних туристичних агентів. Оскільки авіакомпанії з часом перестали справлятися з обслуговуванням зростаючого потоку пасажирів, останнє призвело до необхідності автоматизації подібного роду діяльності. В подальшому авіакомпанії об'єднали свої зусилля щодо розробки і просування КСБ на ринку. Результатом цієї інтеграції стало виникнення чотирьох, так званих, глобальних систем резервування (Global Distribution System – GDS). GDS є інформаційною системою, яка пропонує розподільні мережі для усієї туристичної торгівлі [3].

Оскільки КСБ створені для задоволення потреб туристичних фірм, їх основні задачі полягають в тому, щоб:

- пропонувати постачальникам (провайдерам) туристичних послуг (авіап перевезення, прокат автомобілів, готелі, туристичні оператори, залізниця та ін.) надійну і ефективну загальносвітову мережу збуту, яка надає їм доступ до найбільшої у світі бази клієнтури, що належить туристичним агентствам і комерційним бюро авіакомпаній;

- пропонувати абонентам (туристичним агентствам) потужний інструмент управління і маркетингу, що дозволяє їм бути конкурентоспроможними і прибутковими, мати доступ як до місцевих, так і міжнародних провайдерів, забезпечувати управління діяльністю і вести фінансовий облік роботи фірми;

- пропонувати авіакомпаніям можливість використання системи в їх комерційних бюро таким чином, що і авіакомпанії і туристичні агентства можуть працювати через одну і ту ж систему;

- забезпечувати глобальне обслуговування за допомогою технічних зв'язків і союзів з іншими системами.

Сьогодні існує безліч комп'ютерних програм, що дозволяють поширювати туристичні послуги з використанням КСБ [4].

КСБ постачають туристичним агентствам спеціальні пакети, включаючи ці програми і, звичайно ж, спеціальне устаткування для здійснення діяльності. Зрозуміло, що всі операції з резервування здійснюються туристичними агентствами за допомогою зв'язку з певними структурами, зайнятими в цій сфері. Набір устаткування і засобів зв'язку залежить від вибраного туристичним агентством типу підключення до системи:

- підключення виділеним каналом зв'язку (прямий дріт або не комутований канал зв'язку) – пряме підключення;
- підключення з набором телефонного номера (комутований канал зв'язку) – телефонне підключення;
- підключення через мережу Internet.

Функції агентства при самостійному бронюванні клієнтами через Internet полягають в перевірці коректності виконаних бронювань, оптимізації вибраних маршрутів, виписці і доставці авіаквитків.

Отже, кожна КСБ створює свої власні комп'ютерні програми, які виконують наступні функції:

- дозволяють проводити пошук оптимальних цінових варіантів туристичних послуг;
- дозволяють працювати за різними тарифами, у тому числі, за конфіденційними;
- дозволяють туристичному агентству автоматично роздруковувати на принтері квитки, призначені для ручної виписки, використовуючи дані про бронювання;
- дозволяють туристичним агентствам використовувати програму автоматичного складання звітів;
- дозволяють вести різні види статистики;
- надають доступ до великої довідкової системи оперативної інформації;
- дозволяють контролювати усі операції за взаєморозрахунками з клієнтами і постачальниками;
- дозволяють створювати на Web-сайті туристичного агентства систему бронювання туристичних послуг для корпоративних і приватних клієнтів. Таким чином, відвідувач Web-сайту отримує можливість самостійного вибору авіарейсів і готелів і їх подальшого бронювання.

Найбільшими комп'ютерними системами бронювання на міжнародному ринку туризму є системи Amadeus, Galileo, Sabre і Worldspan. Разом ці системи налічують близько 500 тис. терміналів, встановлених в готелях по всьому світу, що складає 90% ринку, не випадково їх називають “золотою четвіркою”. 10% займають регіональні системи бронювання і системи, які знаходяться на стадії злиття з однією з вищевказаних систем [4].

Кожна GDS, хоча і є глобальною, має свою сферу поширення. Для Amadeus – це, передусім, Європа. Система Galileo використовується в 116 країнах світу, більш ніж 45 тисячами агентств, через які можливий доступ до інформації про ресурси. Вона має поширення в США і таких європейських країнах, як Великобританія, Італія, Греція, країни Бенілюкса, Швейцарія, Португалія. Загалом доля цієї системи на ринку Європи складає 29,8% (друге місце). Менше охоплення мають системи Sabre і Worldspan [5].

Для таких готелів, що входять в готельні мережі, як Inter-Continental, Radisson і інші, робота з GDS виконується централізовано і є невід’ємною частиною маркетингової стратегії готельної мережі в цілому.

Представлення готелю у будь-якій GDS обов’язково повинно включати наступні позиції: загальний опис, опис номерного фонду, опис тарифів, ціни, інформацію про наявність місць.

З розглянутих систем бронювання лишень глобальна система Amadeus активно виходить на український ринок туристичних послуг, але використовується невеликою кількістю туристичних фірм України. Вона складається з програмних продуктів, призначених для “авіа”, “авто”, “готелю”, “сервісу” [6].

Основними перевагами глобальної системи Amadeus виступають: заощадження часу завдяки можливості отримання усієї туристичної, клієнтської і агентської інформації; нова інформація поступає кожен годину в режимі on-line; зростаюча продуктивність дозволяє робити інформацію доступною; економія витрат за рахунок стабільної роботи і негайних підтверджень; контроль інтегрованої системи задовольняє усі потреби агентства; підвищення прибутків завдяки широкому діапазону можливостей, які забезпечують задоволення усього спектру замовлень клієнта.

Незважаючи на велику кількість переваг системи Amadeus, використання інших систем в Україні в майбутньому мало б такі позитивні результати:

- застосування системи Sabre в туристичних фірмах України дозволило б впровадити систему з доступом до широкого спектру туристичних послуг, здійснювати продаж туристичних продуктів, дистрибуцію і розробку технологічних рішень для туристичної сфери України;
- система Worldspan не вимагала б виконання чітко вказаних об’ємів бронювання, оскільки це досить демократична система;
- система Galileo забезпечила б туристичні підприємства Windows-версією системи бронювання, а програма Premier дозволила б агентствам повністю автоматизувати роботу з обслуговування клієнтів [7].

В той же час широке запровадження комп’ютерних систем бронювання в Україні стримується наступними чинниками:

- недостатністю фінансових ресурсів для плати за підключення до GDS і установку необхідного програмного забезпечення;
- низьким рівнем підготовки менеджерів з інформаційних технологій;
- відсутністю інформування туристичних фірм відносно необхідності впровадження глобальних комп'ютерних систем бронювання;
- інформаційною небезпекою при широкому використанні Internet-технологій: комерційною (шахрайство і несанкціонований доступ); технічною (комп'ютерні віруси і атаки «хакерів»). Незважаючи на застосування спеціальних програмних і апаратних засобів захисту, обмеження інформації, що передається з публічних каналів зв'язку, використання різних методів адміністративного контролю, проблема інформаційної безпеки залишається і повинна вирішуватися в масштабах усієї країни. Потрібні закони, органи контролю і пряма державна підтримка вітчизняних виробників засобами забезпечення безпеки;
- відсутністю єдиних стандартів із застосування Internet і інших інформаційних технологій.

Таким чином, провідним постачальником новітніх рішень в галузі бронювання для світової індустрії туризму виступає GDS «Amadeus». Поширення системи Amadeus і впровадження систем Galileo, Sabre, Worldspan в туристичну галузь України дозволить підприємствам істотно скоротити час на обслуговування клієнтів, забезпечити бронювання в режимі on-line, знизити собівартість послуг, оптимізувати формування маршруту туристів і підвищити якість туристичних послуг.

Зупинимось більш детально на функціях постачальника послуг – Провайдерах в GDS.

Провайдерами готельних послуг в GDS зазвичай виступають штаб-квартири великих готельних мереж (Radisson, Marriott, Inter – Continental та ін.), а також фірми, що спеціалізуються на такій діяльності.

Окремі готелі не займаються представленням себе в GDS самостійно через високу вартість необхідного технічного оснащення. Таким чином, існує два шляхи представити свій готель в GDS – вступ в готельну мережу (з усіма наслідками, що випливають з цього, пов'язаними зі змінами в принципах управління або навіть формі власності) або укладення контракту із спеціалізованою компанією-провайдером [5].

Щоб виправити ситуацію, яка склалася, потрібна спільна робота готелів і провайдерів, оскільки можливості для маневру останніх обмежені рамками договору з готелем. Загально світова тенденція розвитку провайдерів – надання готелям пакету послуг, пов'язаних з просуванням на різних ринках продажів (прямі продажі, маркетингові акції, через каталоги, через Internet, через регіональні КСБ і ін.) з акцентом на дистрибуцію за допомогою глобальних КСБ.

Безперечним лідером у сфері комп'ютерного бронювання є мережа Internet. Саме тому готелі створюють власні Internet-сервери, через які і здійснюється доступ до інформації і бронювання в GDS. Це дозволяє потенційним клієнтам з різних країн світу: діловим туристам, відпочиваючим, іноземним гостям – усім, хто має можливість виходу в Internet, використовувати свої персональні комп'ютери, щоб заздалегідь уявляти, куди він їде, чим він зможе розраховуватися в цьому готелі. Оскільки це стає все більш і більш популярним, готелі роблять свої Web-сайти все більш і більш дружніми з інтуїтивно-зрозумілим для користувача інтерфейсом. Іноді такі готелі припускаються серйозної помилки, забуваючи про те, що Web-сайт – візитна картка готелю в Internet – і не приділять належної уваги його дизайну та підтримці Web-сайту в робочому стані цілодобово, що впливає на імідж готелю.

При бронюванні номерів у готелях відвідувачеві Web-сайту – потенційному клієнтові надається загальна інформація про готель, фотографії номерів різних категорій, опис додаткових послуг (харчування, конференц-зал, сауна, спортивно-оздоровчий комплекс), а також список розташованих у безпосередній близькості від готелю місць культури і відпочинку.

Для цього використовуються спеціальні програми бронювання. Так, одна із найбільш успішних програм – програма Horse – 21 (аббревіатура назви Hotel Reservation Service, що належить голландській компанії Hors BV) має базу даних, яка містить інформацію про більш ніж 240 тисяч готелів. Вона має наступні переваги серед інших аналогічних програм: реальний on-line (підтвердження броні впродовж декількох секунд); централізована система отримання комісійних; унікальна база цих готелів; можлива робота без абонентської плати, сегментних норм, депозитів; простота використання – не вимагає навчання, спеціального програмного забезпечення, устаткування.

Окрім систем комп'ютерного бронювання послуг в готельному бізнесі, широко використовуються програми для забезпечення управління різними службами готелю.

Так, система Lodging Touch американської компанії MAI Hospitality, однієї з лідерів в розробці програм для готельної індустрії, є інтегрованим пакетом програм, що автоматизує різні відділи готелю: порт'є, ресторанної служби, відділу продаж, організацій банкетів. Вона може бути об'єднана з такими периферійними системами, як бухгалтерські програми, системи оптимізації прибутку готелю, платне телебачення, системи телефонії, контролю доступу в номери та ін.

Програма Lodging Touch – Порт'є виконує функції бронювання номерів, заселення і виписку гостей, нарахування платежів і процедуру нічного аудиту. Тут можна проглянути звіт за станом готелю, отримати різну довідкову інформацію (гостьові картки, паспортні дані).

До інших програмних модулів системи належить блок управління тарифами, блок управління номерним фондом (для складання графіку прибирання номерів і роботи покоївок). Варто відмітити наявність в системі Lodging Touch програмного блоку роботи з туристичними агентствами, що дозволяє виконувати оформлення заявок від агентств, розрахунок комісійних, визначення знижок і спеціальних пропозицій, перегляд статистики [10].

Система Nimeta порівняно новий продукт, призначений для малих і середніх готелів. Робота системи Nimeta надає можливість оренди і використання системи управління за допомогою Internet-технологій. Ця технологія полягає в тому, що дані про готель і, власне сама програма системи управління готелем, знаходяться поза готелем на спеціально відведеному сервері. Такий сервер знаходиться в обладнаному сервіс-центрі Internet-провайдера. Таким чином, для підключення і використання системи Nimeta досить просто мати комп'ютер і вихід в Internet.

Комплекс програмних продуктів epitome Enterprise розроблений корпорацією HIS (США), – одним зі світових лідерів в області інформаційних технологій для готельної індустрії. Інформаційні рішення HIS забезпечують функціонування багатьох всесвітньо відомих готелів і готельних мереж. Клієнтами компанії є понад 4000 готелів різного рівня в 83 країнах світу.

Використання вказаних систем дозволяє обмінюватися управлінською і фінансовою інформацією, автоматизувати процес виконання щоденним завданням персоналу і керівництва готелю. При цьому досягається взаємозв'язок між різними службами готелю, що значною мірою підвищує ефективність і дає змогу позбутися помилок. Разом з цим, керівництво готелю отримує потужний інструмент контролю за станом готелю і фінансовими потоками, а можливості зловживань персоналом готелю скорочуються до мінімуму.

Розглянуті можливості Internet для готелів не обмежуються лише роботою з GDS. Основними перевагами для готелю є широке охоплення аудиторії (більше 100 млн. чоловік у світі) і невисокі накладні витрати, в порівнянні з GDS. Отже, Internet – реальний конкурент КСБ, оскільки робота через Internet може виконуватися на будь-яких серверах, будь-яку кількістю разів, будь-якою приватною особою, що прагне заощадити на готелі, тоді як з GDS працюють тільки професіонали. А перевага GDS полягає в тому, що будь-який готель, завантаживши інформацію про себе, може бути упевнений, що цю інформацію побачить кожен туристичний агент, а для розміщення даних про готель в Internet потрібна клопітка робота з занесення їх в різні пошукові системи, довідники і каталоги.

У нас в країні впровадження комп'ютерних систем управління готелями (Property Management System/PMS) на основі західних технологій почалося з появою висококласних готелів, багато з яких працюють

відповідно до корпоративних правил, що диктують «відданість» тій або іншій системі.

Найбільш поширена система обслуговування в нашій країні – система Fidelio, вона повністю русифікована і адаптована для російського та українського ринків. Як правило, вона встановлюється готелями спільно з популярним розрахунково-касовим комплексом Micros. Додатково можуть встановлюватися програма автоматизації фінансово-господарської діяльності, програма організації відділу продажів і маркетингу, програма головного інженера. Усі програми працюють як єдина інтегрована система в операційному середовищі DOS.

Окрім очевидних переваг, які дає використання інформаційних технологій, в готельному бізнесі України виникає безліч проблем, обумовлених вимогами, що висуваються до умов експлуатації і грамотного їх застосування, а також слабким розвитком українського ринку інформаційних технологій.

Основною проблемою при установці програмного забезпечення, окрім технічних питань, є комп'ютерна неграмотність і недостатня кваліфікованість персоналу. Переважна кількість працівників готелів має гуманітарну освіту, що викликає певні труднощі при роботі з комп'ютером і Internet. Перенавчання співробітників або найманих працівників вимагають додаткових фінансових коштів. Далеко не усі готельні підприємства можуть дозволити собі утримувати в штаті IT – спеціалістів. Часто буває так, що програмне забезпечення зарубіжних виробників не адаптоване для Українського ринку.

Перешкодою до розвитку систем on-line продаж є незначна кількість користувачів Internet, низький рівень життя населення, низький ступінь розвитку платіжних систем, механізмів оплати за банківськими чеками і кредитними картками. І, попри те, що інструменти безготівкової оплати для приватних осіб активно розвиваються, туристичні Internet-компанії не поспішають впроваджувати платіжні технології тому, що доки ще існує певна частка ризику понести невиправдано високі витрати: зокрема, кредитні картки має в розпорядженні досі невеликий відсоток українських туристів. Крім того, українські туристи вважають за краще заплатити “живому” менеджеру, а не віртуальній машині, і при цьому переконатися в тому, що їх ніхто не обманює.

**Висновки.** Проведений аналіз сучасного стану використання інформаційних систем і технологій в індустрії туризму та готельного господарства показав, що:

- в Україні відсутні вітчизняні розробки інформаційних систем управління готелями та комп'ютерних систем бронювання, що обумовлюється слабким розвитком українського ринку інформаційних технологій;

- найбільш поширеною системою обслуговування в нашій країні є система Fidelio, яка повністю русифікована і адаптована для російського та українського ринків і використовується у висококласних готелях, кількість яких є незначною;
- вихід на український ринок туристичних послуг глобальної системи Amadeus, послугами якої сьогодні користується невелика кількість туристичних фірм України, не вирішує проблеми розвитку індустрії туризму і вимагає використання також послуг таких відомих систем, як Sabre та Worldspan;
- перспективним для готельних мереж, а також незалежних готелів і пансіонатів, які задіяні в сфері зеленого туризму, є створення власних Internet-серверів, через які здійснюється доступ до інформації і бронювання в GDS, і своїх web-сайтів та використання однієї із розглянутих вище програми для бронювання місць і забезпечення управління різними службами готелю;
- широке впровадження відмічених вище систем на базі західних технологій та програмних продуктів вимагає комп'ютерної підготовки і відповідної кваліфікації обслуговуючого їх персоналу, а також адаптації окремих програмних продуктів до українського ринку послуг.

### *Література*

1. Мальська М.П. Основы туристического бизнеса: Учебное пособие / М.П.Мальська, В.В.Худо, В.И.Цибух. – Киев: Центр образовательной литературы, 2004. – 272 с.
2. Филипповский Е.Е. Экономика і організація готельного господарства / Е.Е. Филипповский, Л.В.Шмарова. – М., 2003. – С. 134.
3. Гуляев В.Г. Нові інформаційні технології в туризмі: Навч. посібник / В.Г.Гуляев. – М., 1998. – С. 62-63.
4. Захарова К.В. Использование современных информационных технологий в туристической отрасли Крыма / К.В.Захарова // Экономика Крыма. – 2009. – №27.
5. Чигирь Л. Гостиничный бизнес: как организовать бронирование мест по Интернету / Л.Чигирь // Бизнес. – 2003. – № 24 (543). – С. 110-113.
6. Сайт глобальной системы бронирования Amadeus [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.amadeus.ru>.
7. Виноградська А.М. Технологія комерційного підприємництва: навч. посібник / А.М.Виноградська. – До.: Центр навчальної літератури, 2006. – 780 с.
8. Сайт глобальної системи бронювання Amadeus [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.amadeus.ru>
9. Виноградська А.М. Технологія комерційного підприємництва: навч. посібник / А.М.Виноградська. – До.: Центр навчальної літератури, 2006. – 780 с..



10. Ильина Е.Н. Туроперейтинг: организация деятельности: Учебник / Е.Н.Ильина. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 256 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Заміховським Л.М.,  
д.т.н., професором Адасовським Б.І.(м. Київ)*

## **AUTOMATED INFORMATION SYSTEMS IN HOTEL BUSINESS AND TOURISM IN UKRAINE**

**O. L. Zamikhovska**

*Ivano-Frankivsk National Technical University of oil and gas;*

*76019, Ivano-Frankivsk, Karpatska St., 15;*

*ph. +380 (3422) 4-80-00; e-mail: ktsu@nung.if.ua*

*The tourism and hotel business industry informational technologies and systems current state analysis has been presented in article by the example of «Micros-Fidelio» Company Fidelio Front Office system, the global reservation systems Amadeus, Galileo, Sabre i Worldspan and others both with the armoring and hotel service different duties management programs to define the perspective directions of their application in Ukraine and tourism management recommendations design based on the informational technologies and systems using.*

**Key words:** *informational technologies, tourism, hotel business, armoring, management.*

УДК 681.3

**КОНЦЕПЦІЯ СТВОРЕННЯ ВІРТУАЛЬНИХ ЛАБОРАТОРНИХ ПРАКТИКУМІВ З ВИКОРИСТАННЯМ WEB-ТЕХНОЛОГІЙ****Л. О. Сав'юк, А. О. Рогач**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-80-00; e-mail: lorasavuk@rambler.ru*

*Розглянуті переваги впровадження у навчальний процес студентів технічних спеціальностей віртуальних лабораторних практикумів на основі сучасних апаратно-програмних засобів фірми National Instruments.*

**Ключові слова:** *дистанційне навчання, віртуальний лабораторний практикум, стенд, WEB-технологія.*

На даний момент в українських вищих навчальних закладах (ВНЗ) на вистачає лабораторної бази та апаратно-програмних засобів для якісної підготовки та отримання професійних знань майбутніх інженерних кадрів. Системи дистанційного навчання (СДН) дозволяють вирішити важливі завдання забезпечення розподіленого доступу до лабораторних робіт в режимі On-Line.

Пакет LabVIEW фірми National Instruments (Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench) являє собою універсальне середовище (інструмент) програмування з розширеними бібліотеками програм, орієнтоване на вирішення завдань управління інструментальними засобами вимірювання, збору, обробки і представлення експериментальних даних. У більш загальному визначенні LabVIEW можна розглядати як інтегроване середовище розробки, налагодження та виконання програм для вимірювальних, тестуючих і керуючих систем, апаратно-програмних комплексів збору, обробки і представлення вимірювальної інформації. LabVIEW – це високоінтерактивна система, призначена для найбільш ефективної взаємодії розробника програмної системи і середовища розробки. Вона містить розвинену систему меню, проблемно-орієнтовані бібліотеки стандартних модулів і процедур для задач проектування систем збору і обробки даних, традиційні засоби розробки і налагодження програмних продуктів [1].

Окрім того, програмні та апаратні засоби National Instruments широко використовуються для створення віртуальних приладів, які можуть ефективно замінити реальні засоби вимірювання та реєстрації дослідних даних.

Введення сучасних елементів комп'ютерних технологій збору даних в процесі експерименту, спостереження та дослідження є обов'язко-

вою умовою, тож комп'ютер, оснащений багатофункціональною платою (або модулем вводу/виводу сигналів) і засобами програмної підтримки – основа кожної учбової та наукової лабораторії.

Віртуальна лабораторія, яка заснована на сучасних WEB-технологіях, дає можливість організувати:

- реєстрацію, візуалізацію і обробку сигналів в режимі реального часу;

- редагування, математичну обробку та аналіз отриманих даних;

- зберігання, імпорт та експорт даних для подальшої обробки.

Використання віртуальних лабораторій принципово змінюють технологію навчання, і їхня практична спрямованість об'єднує учбову програму з реальним світом, тим самим допомагаючи студентам відображати (візуалізувати) теоретичні поняття і фізичні об'єкти та реалізувати їх в практичні проекти, а викладачеві – вдосконалювати учбовий процес, роблячи його більш зрозумілим та наглядним.

Одним з найважливіших напрямків є розробка та впровадження в лабораторний практикум віртуальних лабораторій з використанням реальних фізичних пристроїв для можливості організації дистанційного навчання (ДН) загальнотехнічним та спеціальним дисциплінам. Так, в Івано-Франківському національному технічному університеті нафти і газу (ІФНТУНГ) на кафедрі комп'ютерних технологій в системах управління та автоматики (КТіСУ) розроблено комплекс апаратно-програмних засобів у структурі лабораторії моделювання та імітації мехатронних систем. Даний комплекс включає такі лабораторні стенди, як камера нагрівання для вивчення особливостей функціонування промислових об'єктів з розподіленими параметрами, двохкоординатний графопобудовувач, системи сполучених резервуарів, верстат з числовим програмним управлінням (ЧПУ) [2]. Вони можуть використовуватися в складі автоматизованих лабораторних стендів дисциплін відповідного напрямку, для вивчення систем управління зі зворотнім зв'язком, програмування ПД-регулятора, розпізнавання та ідентифікації динамічних об'єктів та вирішення інших інженерних завдань.

Істотною особливістю пропонованого підходу є можливість відпрацьовувати навички експериментальної роботи на реалістичних моделях динамічних об'єктів при точному відтворенні фізичних законів та унікально високій інтерактивності проведення досліджень.

Створення і впровадження віртуальних лабораторій є основою для підвищення ефективності проведення практичних занять та лабораторних занять технічного спрямування. Також можна спрогнозувати підвищення інтересу до процесу навчання в групах студентів за рахунок конструктивістського інноваційного підходу до методики викладання дисциплін інженерного рівня.

*Література*

1. Конструктор віртуального лабораторного практикуму [Електронний ресурс] / Режим доступу до ресурсу: <http://www.distance-learning.ru/db/el/7EFF2A94B3053B45C3256C5B00587011/doc.html>
2. Сав'юк Л.О. Проектування віртуальних лабораторних практикумів в структурі систем дистанційного навчання / Л.О.Сав'юк, А.О.Рогач // Мат-ли першої міжн. науково-практичної конференції "Сучасні інформаційні системи і технології", Суми, 2012. – Суми, 2012. – С. 120-121.  
*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Заміховським Л.М.,  
д.т.н., професором Адасовським Б.І.(м. Київ)*

**THE CONCEPTION OF CREATING VIRTUAL LABORATORY WORKSHOPS USING WEB - TECHNOLOGY****L. O. Sav'yuk, A. O. Rogach**

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivsk, Karpatska str., 15;  
tel. +380 (03422) 4-80-00; e-mail: lorasavuk@rambler.ru*

*Advantages of introduction in the educational process of students of technical specialties of virtual laboratory practical works on the basis of modern vehicle-programmatic facilities of firm National Instruments are considered.*

**Key words:** *controlled from distance study, virtual laboratory practical work, stand, WEB-technology.*

**ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ**

**Адаменко Олег Максимович** – доктор геолого-мінералогічних наук, професор кафедри екології Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Адаменко Ярослав Олегович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри екології Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Бандура Андрій Іванович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Богатчук Іван Михайлович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри нафтогазового технологічного транспорту і теплотехніки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Возняк Лідія Володимирівна** – кандидат технічних наук, доцент кафедри нафтогазової гідромеханіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Возняк Мирослав Петрович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри транспортування та зберігання нафти і газу Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Гаврилків Володимир Михайлович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Грицишин Василь Іванович** – кандидат гірничо-мінералогічних наук, доцент, консультант-геофізик ВАТ “Карпатське управління геофізичних робіт”.

**Гургула Степан Іванович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Дзумедзей Роман Олексійович** – аспірант кафедри фізики і хімії твердого тіла ДНВЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника».

**Загороднюк Андрій Васильович** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу, проректор з наукової роботи Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Заміховська Олена Леонідівна** – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп’ютерних технологій в системах управління та автоматизації Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Заміховський Леонід Михайлович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп’ютерних технологій в системах управ-

ління та автоматики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Зорін Денис Олександрович** – кандидат геологічних наук, доцент кафедри екології Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Іванків Ростислав Віталійович** – аспірант кафедри нафтогазового обладнання Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Кацаба Василь Михайлович** – майстер аварійно-відновної бригади нафтопроводу «Дружба» студент факультету нафтогазопроводів Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Кіндрачук Мирослав Васильович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри матеріалознавства Національного авіаційного університету.

**Кривенко Галина Мирославівна** – кандидат технічних наук, доцент кафедри безпеки життєдіяльності Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Кривенко Сергій Олександрович** – студент газонафтопромислового факультету Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Криницький Олександр Степанович** – аспірант кафедри загальної та прикладної фізики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Криштопа Людмила Іванівна** – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Криштопа Святослав Ігорович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри нафтогазового технологічного транспорту і теплотехніки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Кузьо Ігор Володимирович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри механіки та автоматизації машинобудування Інституту інженерної механіки та транспорту Національного університету “Львівська політехніка”.

**Кучер Степан Федорович** – головний геолог ВАТ “Карпатське управління геофізичних робіт”.

**Кушнір Роман Михайлович** – член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, директор Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача НАН України.

**Левчук Катерина Григорівна** – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки факультету авіаційних і космічних систем Національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”.

**Малашкевич Георгій Юхимович** – доктор фізико-математичних наук, завідувач лабораторіями Інституту фізики НАН Білорусії.

**Мандрик Олег Михайлович** – кандидат технічних наук, доцент, декан інженерно-екологічного факультету Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Марцінків Марія Володимирівна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Матвієнко Роман Михайлович** – асистент кафедри комп'ютерних технологій в системах управління та автоматики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Матківський Остап Миколайович** – аспірант кафедри фізики і хімії твердого тіла Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Мельник Любомир Васильович** – аспірант кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Мельник Петро Іванович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівництва Івано-Франківського університету права імені Короля Данила Галицького.

**Мельников Олександр Павлович** – асистент кафедри нафтогазової гідромеханіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Микицей Оксана Ярославівна** – асистент кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Міщенко Анастасія Вячеславівна** – аспірант кафедри безпеки життєдіяльності і промислової екології Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Міщенко Лариса Володимирівна** – кандидат географічних наук, доцент кафедри екології Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Можирівська Зоряна Гориславівна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічного прогнозування та ризику Львівської комерційної академії.

**Мойсюк Юрій Ярославович** – студент газонафтопромислового факультету Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Никифорчин Олег Ростиславович** – доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Николайчук Микола Ярославович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних технологій в системах управління та авто-

матики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Николишин Мирон Михайлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

**Новосядлий Степан Петрович** – доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Осипчук Михайло Михайлович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри статистики і вищої математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Патра Марія Іванівна** – магістрант кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Пономаренко Олександр Миколайович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та інженерної механіки Львівського національного аграрного університету.

**Прунько Ігор Богданович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри нафтогазового технологічного транспорту і теплотехніки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Пукач Петро Ярославович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри обчислювальної математики та програмування Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету “Львівська політехніка”.

**Рогач Артур Олегович** – аспірант кафедри комп'ютерних технологій в системах управління та автоматики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Ростун Микола Йосифович** – кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

**Савчук Ярослав Іванович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Сав'юк Лариса Олександрівна** – кандидат технічних наук, доцент, директор центру дистанційного навчання Галицької академії (м. Івано-Франківськ).

**Собкович Роман Іванович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Токовий Юрій Владиславович** – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу механіки деформівного твердого тіла Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.



**Федак Іван Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Фреїк Дмитро Михайлович** – доктор хімічних наук, професор, директор фізико-хімічного інституту, завідувач кафедри фізики і хімії твердого тіла Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Цідило Іван Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної механіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Шарин Сергій Володимирович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Шкіца Леся Євстахіївна** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інженерної та комп'ютерної графіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Яворський Ярослав Святославович** – аспірант кафедри фізики і хімії твердого тіла Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Якимів Йосип Васильович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри транспорту і зберігання нафти і газу Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

**Ясінський Анатолій Васильович** – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

При підготовці рукописів статей, які подаються в редакцію “Прикарпатського вісника НТШ” слід дотримуватись таких правил:

1. Стаття повинна містити короткий вступ, формулювання завдань (проблем) та виклад отриманих автором (співавторами) нових результатів. Не допускається переказ відомих фактів, наведення посилань на неопубліковані роботи.

2. В редакцію подаються:

- два примірники рукопису статті (включаючи ілюстрації і таблиці), надруковані на білому папері формату А4;
- рецензію на статтю;
- електронний варіант статті, підготовлений на комп’ютері, у вигляді не архівованого або не архівованого (ZIP, RAR) файлу – CDR/RW.

3. Мова статті повинна бути українською або англійською. Обсяг не повинен перевищувати 20 сторінок.

4. Статтю слід оформити так: УДК, назва роботи; прізвище та ініціали автора (співавторів), місце праці (назва організації, повна поштова адреса, контактний телефон, електронна пошта), текст анотації, ключові слова, текст статті, список літератури.

Якщо мова статті українська (англійська), то після статті усі перераховані елементи від назви роботи до ключових слів включно подаються англійською (українською) мовою.

5. Формули, які нумеруються, обов’язково слід подавати окремим рядком. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.

6. Використана література подається загальним списком (за алфавітом або у порядку посилань на джерела в тексті статті) та оформляється згідно з вимогами ВАК України (бюлетень №3, 2008 р.). Іноземна література пишеться мовою оригіналу. Посилання на відповідні джерела подаються в тексті у квадратних дужках, наприклад [4]. Зразки бібліографічного опису книги, статті, тез доповідей конференцій:

1. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

2. Кондрат Р.М. Підвищення газонафтоконденсатовіддачі родовищ / Р.М.Кондрат // Нафтова і газова промисловість. – 1992. – №2. – С. 35-38.

3. Бойко В.С. Проводка горизонтальних і похилих свердловин як метод ефективного освоєння і розробки покладу / В.С.Бойко, Р.В.Бойко // Стан, проблеми і перспективи розвитку нафтогазового комплексу Західного регіону України: Тези доповідей і повідомлень наук.-практ. конф. (Львів, 28-30 березня 1995 р.). – Львів, 1995. – С. 150.

7. Рукопис підписується автором (співавторами).

8. На окремому аркуші слід вказати прізвище, ім’я та по-батькові автора (співавторів), науковий ступінь, вчене звання, займану посаду (у кінці кожного випуску журналу формуємо відомості про авторів).

**Електронний варіант статті  
повинен задовольняти таким вимогам:**

1. Стаття набирається у редакторі Microsoft WORD 95/7.0-97 на аркуші формату B5 182x257 мм, поля (мм): верхнє – 20, нижнє – 10, внутрішнє – 30, зовнішнє – 20.
2. **Основний текст** набирається таким чином:
  - 2.1. Стиль "обычный", гарнітура Times New Roman (Cyr), кегль 12, абзацний відступ – 0,75 мм, міжстроковий інтервал – "одинарний".
  - 2.2. Порядок набору:

УДК (Times New Roman (Cyr), кегль 12, без абзацного відступу, вирівнювання – зліва).

Назва **статті** (Times New Roman (Cyr), кегль 12, bold, прописом, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру, відбивки зверху і знизу – 9 пт).

**Ініціали, прізвище автора (співавторів)** (Arial (Cyr), кегль 12, bold, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру).

**Назва організації, її повна поштова адреса, адреса електронної пошти** (Times New Roman (Cyr), кегль 12, italic, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру, відбивка знизу – 9 пт).
  - 2.3. Відбивки по тексту не використовуються за винятком підрозділів статті (підрозділи, підпункти і т. п. відділяються відбивками "перед" – 9, "після" – 6).
3. Для набирання **формул** використовується вбудований у Microsoft Office редактор формул Equation v. 3.0. **Стили:** **Text** - Times New Roman (Cyr), **Function** – Times New Roman (Cyr), italic, **Variable** – Times New Roman (Cyr), italic, **L.C.Greek** – Symbol, italic, **Symbol** – Symbol, italic, **Matrix/Vector** – Times New Roman (Cyr), **Number** – Times New Roman (Cyr). **Розміри:** **Full** – 12, **Subscript/Superscript** – 9, **Sub-Subscript/Superscript** – 5, **Symbol** – 14, **Sub-Symbol** – 9.

Для наочності рекомендується формули відділяти відбивками зверху і знизу – 6 пт.
4. **Таблиці** повинні бути складені лаконічно, зрозуміло і містити мінімальні відомості, необхідні для ілюстрування тексту статті  
**Назва таблиці:** Times New Roman (Cyr), кегль 12, bold, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру, відбивка зверху – 6 пт.
5. **Ілюстрації** до статей (схеми, графіки, діаграми) повинні бути виконані у растровому (векторному) форматах (BMP, TIF, PCX, JPG, GIF; CDR) і додаватися окремим файлом. Забороняється використовувати **графічний редактор MS WORD!!!** Ілюстрації типу фотографій повинні бути відскановані з роздільною здатністю не менше 400 dpi і/або додаватися в оригіналі.

**Ілюстрації, перескановані з періодики, не приймаються!**  
**Підписи до ілюстрацій:** Times New Roman (Cyr), кегль 11-12, bold, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру.  
**Написи на ілюстраціях** виконуються гарнітурою Arial.

**Прикарпатський вісник  
Наукового товариства ім. Шевченка**

**Число  
2012. – № 1(17)  
331 с.**

Відповідальний за випуск	<i>Василь МОЙСИШИН</i>
Літературна редакція	<i>Василя МОЙСИШИНА, Оксани РОСПОПИ</i>
Набір та макетування	<i>Любомири ДЯКІВ</i>
Комп'ютерна правка	<i>Любомири ДЯКІВ</i>
Коректура	<i>Оксани РОСПОПИ</i>

Підп. до друку 1.07.2013 р.  
Формат 60x84/8. Папір офсет. Гарнітура "Times New Roman".  
Друк на різнографі. Ум.-друк. арк. 19,2.  
Наклад 300 пр. Зам. №

Видавець  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника  
76025, м. Івано-Франківськ,  
вул. С. Бандери, 1; тел. 71-56-22  
E-mail: [vdvcit@pu.if.ua](mailto:vdvcit@pu.if.ua)

*Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2718 від 12.12.2006*