

ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ ДЕКІЛЬКОХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕПАРНОГО ПОРЯДКУ

А. М. Краснодембський

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

У статті встановлено умови збіжності послідовностей, що визначають розв'язки з періодичними компонентами деякої системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь непарного порядку.

Ключові слова: *система декількох нелінійних диференціальних рівнянь непарного порядку, умови збіжності, періодичність розв'язків.*

Раніше отримані результати ([3]) для системи двох нелінійних диференціальних другого порядку узагальнені для системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь непарного порядку.

Є система диференціальних рівнянь

$$Y_i^{(2k+1)} = f_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(2k)}, \dots; y_n, y_n', \dots, y_n^{(2k)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

в якій неперервні функції $f_i(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k-1}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k-1}^{(n)})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) задовольняють умови:

1. $f_i(x+T, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k}^{(n)}) \equiv f_i(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k}^{(n)})$
2. $f_i(\alpha - x, u_0^{(1)}, -u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, -u_3^{(1)}, \dots, u_{2k}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, -u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, -u_3^{(n)}, \dots, u_{2k}^{(n)}) \equiv -f_i(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k}^{(n)})$
3. $|f_i(x, u_{02}^{(1)}, u_{12}^{(1)}, \dots, u_{2k,2}^{(1)}; \dots; u_{02}^{(n)}, u_{12}^{(n)}, \dots, u_{2k,2}^{(n)}) - f_i(x, u_{01}^{(1)}, u_{11}^{(1)}, \dots, u_{2k,1}^{(1)}; \dots; u_{01}^{(n)}, u_{11}^{(n)}, \dots, u_{2k,1}^{(n)})| \leq K_0^{(1)}|u_{02}^{(1)} - u_{01}^{(1)}| + K_1^{(1)}|u_{12}^{(1)} - u_{11}^{(1)}| + \dots + K_{2k}^{(1)}|u_{2k,2}^{(1)} - u_{2k,1}^{(1)}| + \dots + K_0^{(n)}|u_{02}^{(n)} - u_{01}^{(n)}| + K_1^{(n)}|u_{12}^{(n)} - u_{11}^{(n)}| + \dots + K_{2k}^{(n)}|u_{2k,2}^{(n)} - u_{2k,1}^{(n)}|$

Згідно з попереднім ([1], [2]) диференціальне рівняння

$$y^{(m+1)} = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) \in C$; $\varphi(x+T) \equiv \varphi(x)$; $\int_0^T \varphi(x) dx = 0$ має неперервний, періодичний

(період T) розв'язок $y = \bar{y}(x)$ ($\bar{y}(0) = y_0$), котрий можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) = & \frac{1}{m!} \int_0^x (x-t)^m \varphi(t) dt + \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^T t \varphi(t) dt \right] x^m + \left[A_2^{(1)} \int_0^T t \varphi(t) dt + \right. \\ & \left. + \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^T t^2 \varphi(t) dt \right] x^{m-1} + \dots + \left[A_m^{(1)} T^{m-2} \int_0^T t \varphi(t) dt + A_m^{(2)} T^{m-3} \int_0^T t^2 \varphi(t) dt + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{A_m^{(m)}}{T} \int_0^T t^m \varphi(t) dt \right] x + y_0, \end{aligned}$$

в якому коефіцієнти $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_m^{(m)}$ є задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} A_i^{(i)} + A_{i+1}^{(i)} + \dots + A_n^{(i)} = (-1)^{i+1} \frac{C_m^i}{m!} \quad (i = 1, 2, \dots, m); \\ (n+1-i) A_i^{(i)} + (m-i) A_{i+1}^{(i)} + \dots + 2A_{m-1}^{(i)} = (-1)^{i+1} \frac{C_{m-1}^i}{(m-1)!} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1); \\ (m+1-i)(m-i) A_i^{(i)} + (m-i)(m-1-i) A_{i+1}^{(i)} + \dots + 3 \cdot 2 A_{m-2}^{(i)} = (-1)^{i+1} \frac{C_{m-2}^i}{(m-2)!} \\ (i = 1, 2, \dots, m-2); \end{cases}$$

$$m! A_1^{(1)} = 1.$$

Якщо, крім того, $\varphi(\alpha - x) = -\varphi(x)$, то $\bar{y}(\alpha - x) = \bar{y}(x)$.

З приведеної системи співвідношень послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} A_i^{(i)} &= (-1)^{i+1} \frac{1}{(m+1-i)!} \quad (i = 1, 2, \dots, m); \\ A_{i+1}^{(i)} &= \frac{1}{(m-1)!} \left[(-1)^{i+1} \frac{1}{i!} - \frac{(m+1-i)!}{2!} A_i^{(i)} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, m-1); \\ A_{i+2}^{(i)} &= \frac{1}{(m-1-i)!} \left[(-1)^{i+1} \frac{1}{i!2!} - \frac{(m+1-i)!}{3} A_i^{(i)} - \frac{(m-i)!}{2!} A_{i+1}^{(i)} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, m-2); \\ A_{m-1}^{(i)} &= \frac{1}{2!} \left[(-1)^{i+1} \frac{1}{i!(m-2)!} - \frac{(m+1-i)!}{(m-i)!} A_i^{(i)} - \frac{(m-i)!}{(m-1-i)!} A_{i+1}^{(i)} - \dots - \frac{3!}{2!} A_{m-2}^{(i)} \right] \quad (i = 1, 2); \\ A_n^{(1)} &= \frac{1}{(m-1)!} - A_1^{(1)} - A_2^{(1)} - \dots - A_{m-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Надалі, використані позначення ($m = 2k$):

$$\max_{0 \leq x \leq T} \int_0^T \left| \frac{A_1^{(1)}}{T} tx^{2k} + A_2^{(1)} tx^{2k-1} + \dots + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} t^{2k} x \right| dt + \frac{1}{(2k+1)!} T^{2k+1} = N_0;$$

$$\max_{0 \leq x \leq T} \int_0^T \left| 2k \frac{A_1^{(1)}}{T} t x^{2k-1} + (2k-1) A_2^{(1)} t x^{2k-2} + \dots + 2 \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} t^{2k} \right| dt + \frac{1}{(2k)!} T^{2k} = N_1;$$

.....

$$\max_{0 \leq x \leq T} \int_0^T \left| \frac{1}{T} t \right| dt + T = \frac{3}{2} T = N_{2k};$$

$$K_i^{(1)} + K_i^{(2)} + \dots + K_i^{(n)} = K_i \quad (i = 0, 1, \dots, 2k).$$

Теорема 1. Якщо $q = K_0 N_0 + K_1 N_1 + \dots + K_{2k} N_{2k} < 1$, то система (1) має n -параметричне сімейство розв'язків $y_i = \bar{y}_i(x) (\bar{y}_i(0) = y_{i0})$, що $\bar{y}_i(x) \in C$; $\bar{y}_i(x+T) = \bar{y}_i(x)$; $\bar{y}_i(\alpha-x) = -\bar{y}_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Доведення. Складаємо послідовності

$$y_{il}(x) = \frac{1}{(2k)!} \int_0^x (x-t)^{2k} \delta_{il-1}(t) dt + \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^T t \delta_{il-1}(t) dt \right] x^{2k} + (2x-1) \left[A_2^{(1)} \times \right. \\ \times \int_0^T t \delta_{il-1}(t) dt + \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^T t^2 \delta_{il-1}(t) dt \left. \right] x^{2k-1} + \dots + \left[A_{2k}^{(1)} T^{2k-2} \int_0^T t \delta_{il-1}(t) dt + A_{2k}^{(2)} T^{2k-3} \times \right. \\ \left. \times \int_0^T t^2 \delta_{il-1}(t) dt + \dots + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} \int_0^T t^{2k} \delta_{il-1}(t) dt \right] x + y_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots).$$

Тут $\delta_{il-1}(t) = f_i(t, y_{il-1}(t), y'_{il-1}(t), \dots, y_{il-1}^{(2k)}(t), \dots; y_{nl-1}(t), y'_{nl-1}(t), \dots, y_{nl-1}^{(2k)}(t))$ ($i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots$).

Як було вказано раніше $y_{il}(x) \in$ неперервні, періодичні (періоду T) функції, що $y_{il}(\alpha-x) \equiv y_{il}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots)$.

Маємо:

$$y'_{il}(x) = \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^x (x-t)^{2k-1} \delta_{il-1}(t) dt + 2k \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^T t \delta_{il-1}(t) dt \right] x^{2k-1} + \\ + (2k-1) \left[A_2^{(1)} \int_0^T t \delta_{il-1}(t) dt + \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^T t^2 \delta_{il-1}(t) dt \right] x^{2k-2} + \dots + \\ + 2 \left[A_{2k}^{(1)} T^{2k-2} \int_0^T t \delta_{il-1}(t) dt + A_{2k-1}^{(2)} T^{2k-3} \int_0^T t^2 \delta_{il-1}(t) dx + \dots + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} \int_0^T t^{2k} \delta_{il-1}(t) dt \right]; \\ y_{il}^{(2k)}(x) = \int_0^x \delta_{il-1}(t) dt + \int_0^T \frac{1}{T} \delta_{il-1}(t) dt; \quad (i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots)$$

Нехай:

$$\max_{0 \leq x \leq T} f_i(x, y_{i0}, 0, \dots, 0; \dots; y_{n0}, 0, \dots, 0) = M. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Приймаючи до уваги періодичність (періоду T) приведених послідовностей, дістанемо:

$$|y_{i2} - y_{i1}| \leq MN_0; |y'_{i1}| \leq MN_1; \dots; |y_{i2}^{(2k)}| \leq MN_{2k} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Далі, отримаємо:

$$\begin{aligned} |y_{i2} - y_{i1}| &\leq (K_0^{(1)}MN_0 + K_1^{(1)}MN_1 + \dots + K_{2k}^{(1)}MN_{2k} + \dots + \\ &+ K_0^{(2)}MN_0 + K_1^{(2)}MN_1 + \dots + K_{2k}^{(2)}MN_{2k} + \dots + K_0^{(n)}MN_0 + K_1^{(n)}MN_1 + \dots + \\ &+ K_{2k}^{(n)}MN_{2k})N_0 = (K_0N_0 + K_1N_1 + \dots + K_{2k}N_{2k})MN_0 = MN_0q; \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ |y'_{i2} - y'_{i1}| &\leq MN_1q; \dots; |y_{i2}^{(2k)} - y_{i1}^{(2k)}| \leq MN_{2k-2}q. \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Припустимо, що

$$|y_{il+1} - y_{il}| \leq MN_0q^l; |y'_{il+1} - y'_{il}| \leq MN_1q^l; \dots; |y_{il+1}^{(2k)} - y_{il}^{(2k)}| \leq MN_{2k}q^l. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Тоді

$$\begin{aligned} |y_{il+2} - y_{il+1}| &\leq (K_0^{(1)}MN_0q^l + K_1^{(1)}MN_1q^l + \dots + K_{2k}^{(1)}MN_{2k}q^l + K_0^{(2)} \times \\ &\times MN_0q^l + K_1^{(2)}MN_{2k}q^l + K_{2k}^{(2)}MN_{2k}q^l + \dots + K_0^{(n)}MN_0q^l + K_1^{(n)}MN_1q^l + \\ &+ \dots + K_{2k}^{(n)}MN_{2k}q^l)N_0 = MN_0q^{l+1}; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ |y'_{il+2} - y'_{il+1}| &\leq MN_1q^l; \dots; |y_{il+2}^{(2k)} - y_{il+1}^{(2k)}| \leq MN_{2k}q^{l+1}; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Згідно з методом математичної індукції ряди

$$|y_{i0}| + |y_{i1} - y_{i0}| + |y_{i2} - y_{i1}| + \dots + |y_{il+1} - y_{il}| + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

мажоруються геометричною прогресією з знаменником $q < 1$.

Отже, послідовності (2) збігаються рівномірно, тобто існують границі

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_{il}(x) = \bar{y}_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

де $\bar{y}_i(x)$ є неперервні, періодичні (періоду T) функції, що

$$\bar{y}_i(\alpha - x) = \bar{y}_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Переходячи в послідовностях (2) до границі при $l \rightarrow \infty$, дістанемо:

$$\begin{aligned} \bar{y}_i(x) &= \frac{1}{(2k)!} \int_0^x (x-t)^{2k} \delta_i(t) dt + \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^T t \delta_i(t) dt \right] x^{2k} + \left[\frac{A_2^{(1)}}{T} \int_0^T t \delta(t) dt + \right. \\ &+ \left. \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^T t^2 \delta_i(t) dt - \right] x^{2k-1} + \dots + \left[\frac{A_{2k}^{(1)}}{T} \int_0^T t \delta_i(t) dt + \frac{A_{2k}^{(2)}}{T} \int_0^T t^2 \delta_i(t) dt + \dots + \right. \\ &+ \left. \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} \int_0^T t^{2k} \delta_i(t) dt - \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

де $\delta_i(t) = f_i(t, \bar{y}_1(t), \bar{y}'_1(t), \dots, \bar{y}_1^{(2k)}(t); \dots; \bar{y}_n(t), \bar{y}'_n(t), \dots, \bar{y}_n^{(2k)}(t))$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Значить, $y_i = \bar{y}_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ є розв'язок системи (1).

Теорема доведена.

Теорема 2. Якщо $q = K_0 N_0 + K_1 N_1 + \dots + K_{2k-2} N_{2k-2} + K_{2k-1} N_{2k-1} < 1$ і $y_i = \bar{y}_i(x), z_i = \bar{z}_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$ є неперервні, періодичні (періоду T) розв'язки системи (1), що $\bar{y}_i(0) = \bar{z}_i(0) = y_{i0} (i = 1, 2, \dots, n)$, то $\bar{y}_i(x) \equiv \bar{z}_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$.

Доведення. Розв'язок $z_i = \bar{z}_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$ системи (1) можна запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{z}_i(x) = & \frac{1}{(2k)!} \int_0^x (x-t)^{2k} \Delta_i(t) dt + \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^T t \Delta_i(t) dt \right] x^{2k} + \\ & + \left[A_2^{(1)} \int_0^T t \Delta_i(t) dt + \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^T t^2 \Delta_i(t) dt \right] x^{2k-1} + \dots + \left[A_{2k}^{(1)} T^{2k-2} \int_0^T t \Delta_i(t) dt + \right. \\ & \left. + A_{2k}^{(2)} T^{2k-3} \int_0^T t^2 \Delta_i(t) dt + \dots + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} \int_0^T t^{2k} \Delta_i(t) dt \right] x + y_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

де $\Delta_i(t) = f_i(t, \bar{z}_1(t), \bar{z}'_1(t), \dots, \bar{z}_1^{(2k)}(t); \dots; \bar{z}_n(t), \bar{z}'_n(t), \dots, \bar{z}_n^{(2k)}(t)) (i = 1, 2, \dots, n)$.

Нехай

$$\max_{0 \leq x \leq T} \left| f_i \left(x, \bar{z}_1(x), \bar{z}'_1(x), \dots, \bar{z}_1^{(2k)}(x); \dots; \bar{z}_n(x), \bar{z}'_n(x), \dots, \bar{z}_n^{(2k)}(x) \right) \right| = L \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Приймаючи до уваги викладене вище, знаходимо:

$$|z'_i - y_{il}| \leq L N_0 q^l \quad (i = 1, 2, \dots, n; l = 0, 1, 2, \dots).$$

Оскільки $q < 1$, то звідси слідує:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_{il}(x) = \bar{z}_i(x); \bar{y}_i(x) \equiv \bar{z}_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Теорема доведена.

Література

1. Краснодембський А.М. ДАН УРСР / А.М.Краснодембский. – 1962. – 10.
2. Краснодембский А.М. Записки мех.-мат. ф-та ХГУ и Харьковского матем. Общества / А.М.Краснодембский. – 1964. – Т.ХХХ, сер.4.
3. Краснодембський А.М. Періодичність розв'язків деякої системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь непарного порядку / А.М.Краснодембський // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – Івано-Франківськ, 2013. – №1(21). – С. 45-50.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2015 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**
д.ф.-м.н., доцентом **Королем І.І.** (м. Ужгород)

**PERIODICITY OF DECISIONS OF SOME SYSTEM
A FEW NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS
OF ODD ORDER**

A. M. Krasnodembsky

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

The terms of convergence of sequences, which determine the upshots with the periodic components of some system of a few nonlinear differential equalizations of odd order are set in the article.

Key words: *system of a few nonlinear differential equalizations of odd order, terms of convergence, periodicity of decisions.*