Теорія йовір. та матем. статист. Вип. 87, 2012, стор. 89–104

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 87, 2012, pp. 89–104

СИНГУЛЯРНІСТЬ ТА ТОНКІ ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ НЕСКІНЧЕННИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ З СУТТЄВИМИ ПЕРЕКРИТТЯМИ

УДК 519.21

М. В. ЛЕБІДЬ І Г. М. ТОРБІН

Анотація. У роботі доведено сингулярність розподілів випадкових величин виду $\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k a_k$, де ξ_k — незалежні бернуліїївські випадкові величини, а збіжний знакододатний ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ має наступну властивість: $\forall k\in\mathbf{N}\ \exists s_k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$: $a_k=a_{k+1}=\cdots=a_{k+s_k}\geq r_{k+s_k}$, причому $s_k>0$ для нескінченної кількості індексів k. Показано, що при даних умовах відповідні розподіли належать до згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями (майже всі (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича) точки спектра мають континуальну кількість різних розкладів виду $\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k a_k$, де $\omega_k\in\{0,1\}$). Основний акцент у роботі робиться на вивченні фрактальних властивостей сингулярних ймовірнісних мір μ_ξ. Досліджено, зокрема, фрактальні властивості спектрів (мінімальних замкнених носіїв вказаних мір) та мінімальних (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича) розмірнісних носіїв вказаних розподілів.

Abstract. We prove the singularity for probability distributions of random variables $\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k a_k$, where ξ_k are independent Bernoulli random variables, and a convergent positive series $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ has the following property: $\forall k\in\mathbf{N}\ \exists s_k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$: $a_k=a_{k+1}=\cdots=a_{k+s_k}\geq r_{k+s_k}$, with $s_k>0$ for infinitely many indices k. It is shown that under these conditions the corresponding distributions are Bernoulli convolutions with essential intersections (almost all (in the sense of the Hausdorff–Besicovitch dimension) points from the spectrum have continuum many different expansions of the form $\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k a_k$, where $\omega_k\in\{0,1\}$). The main attention is paid to the studies of fractal properties of singularly continuous probability measures μ_ξ. In particular, fractal properties of spectra (minimal closed supports of the above measures) and minimal (in the sense of the Hausdorff–Besicovitch dimension) dimensional supports of such probability distributions are studied in details.

Аннотация. В работе доказано сингулярность распределений случайных величин вида $\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k a_k$, где ξ_k — независимые бернуллиевские случайные величины, а сходящийся знакоположительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ обладает следующим свойством: $\forall k\in\mathbf{N}\ \exists s_k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$: $a_k=a_{k+1}=\cdots=a_{k+s_k}\geq r_{k+s_k}$, причем $s_k>0$ для бесконечного количества индексов k. Показано, что при данных условиях соответствующие распределения принадлежат к сверткам Бернулли с существенными перекрытиями (почти все (в смысле размерности Хаусдорфа–Безиковича) точки спектра имеют континуальное количество разных разложений вида $\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k a_k$, где $\omega_k\in\{0,1\}$). Основной акцент в работе делается на изучении фрактальных свойств сингулярных вероятностных мер μ_ξ. Исследовано, в частности, фрактальные свойства спектров (минимальных замкнутых носителей указанных мер) и минимальных (в смысле размерности Хаусдорфа–Безиковича) размерностных носителей указанных распределений.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G30, 11K55, 28A80.

Ключові слова і фрази. Нескінченні згортки Бернуллі, фрактали, сингулярно неперервні ймовірнісні міри, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини, розмірність Хаусдорфа міри, довірчі системи покриттів.

Дослідження першого автора виконані за сприяння проектів DFG 436 113/97.

Дослідження другого автора виконані за сприяння проектів DFG 436 UKR 113/97, DFG KO 1989/6-1 та фонду Олександра фон Гумбольдта.

1. Вступ

Нехай $\mu_\xi = \mu$ — розподіл випадкової величин

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k, \tag{1}$$

де $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ є знакододатним збіжним рядом, а ξ_k є незалежними випадковими величинами, які набувають значень 0 та 1 з імовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно. Розподіл μ_ξ називається *нескінченою згорткою Бернуллі.* В роботі [1] показано, що при вивченні лебегівської структури та дослідженні фрактальних властивостей міри μ_ξ можна вважати (без порушення загальності міркувань), що матриця $\|p_{ik}\|$ не містить нулів (тобто $p_{0k} \in (0,1)$, $\forall k \in \mathbf{N}$); та що послідовність $\{a_k\}$ монотонна (тобто $a_k \geq a_{k+1}$, $\forall k \in \mathbf{N}$) з $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$.

З теореми Джессена–Вінтнера [12] випливає, що ξ має чистий розподіл (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний (відносно міри Лебега) або чисто сингулярно неперервний). Теорема П. Леві [13] дає необхідні і достатні умови дискретності: міра μ_ξ — дискретна тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0. \tag{2}$$

На сьогодні все ще невідомі критерії абсолютної неперервності (сингулярності) розподілу ξ навіть для випадку випадкових степневих рядів, хоча дана проблема вже більше 80 років є об'єктом досліджень багатьох поколінь математиків (див., напр. [3, 8, 10, 15, 16, 18]). Роботи [11, 14] містять огляд існуючих проблем та результатів досліджень таких розподілів. Застосування нескінченних згорток Бернуллі обговорювались в роботах [5, 14]. У випадку, коли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається "достатньо швидко", тобто коли $a_k \geq r_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_k$ для всіх достатньо великих k, лебегівська структура та фрактальні властивості згорток Бернуллі вивчені достатньо гарно (див. [1, 7, 17]. У той же час випадок, коли $a_k < r_k$ виконується для нескінченої кількості індексів k, є все ще мало дослідженим. Основна проблема, з якою зустрічаються дослідники на цьому шляху, є дослідження властивостей тих згорток Бернуллі, для яких "майже всі" (в смислі міри Лебега чи розмірності Хаусдорфа–Безиковича) точки спектра мають континуальну кількість різних розкладів виду $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a_k$, де $\omega_k \in \{0,1\}$. Ймовірнісні міри такого виду належать до так званих згорток Бернуллі з "суттєвими перекриттями" ([11]) і дослідженню мір саме такого виду присвячена дана робота, основною задачею якої є доведення сингулярності та дослідження тонких фрактальних властивостей розподілу випадкової величини ξ для випадку коли випадкові величини ξ_k однаково розподілені, а на $\{a_k\}$ накладено наступну умову:

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \exists s_k \in N_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}: \quad a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{k+s_k} \geq r_{k+s_k}, \tag{3}$$

причому $s_k > 0$ для нескінченної кількості індексів k.

2. Сингулярність розподілу ξ

Нехай $\Omega = \{0,1\}^{\infty}$. Для фіксованого ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ розглянемо відображення $\varphi\colon \Omega \to \mathbf{R}$, яке задане наступним чином

$$\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots) \in \Omega: \quad \varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a_k.$$

Множина $\Delta' := \varphi(\Omega) = \{x\colon \exists\omega \in \Omega \wedge \varphi(\omega) = x\}$ називається *множиною неповних сум* ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Оскільки $p_{ik} > 0$ для довільних $i \in \{0,1\}$, $k \in \mathbf{N}$, то Δ' є спектром (мінімальним замкненим носієм) розподілу випадкової величини ξ.

Слідуючи роботі [11], циліндром рангу m з основою $c_1 \dots c_m$, $c_i \in \{0,1\}$, називатимемо множину $\Delta'_{c_1\dots c_m}$, яка є φ-образом циліндру з основою $c_1 \dots c_m$ ($c_i \in \{0,1\}$) з Ω, тобто множину всіх дійсних чисел виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \omega_n a_n, \quad \text{де } \omega_n \in \{0,1\}.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1 \dots c_m$ називатимемо відрізок

$$\Delta_{c_1\dots c_m} = \left[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n, r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\right].$$

Зауважимо, що $\Delta'_{c_1\dots c_m} \subset \Delta_{c_1\dots c_m}$.

Введемо допоміжні позначення. Нехай $\{k_n\}$ буде послідовністю невід'ємних цілих чисел таких, що $i \in \{k_n\}$ тоді і тільки тоді коли $s_i = 0$, та $l_n = k_n - k_{n-1}$, $k_0 = 0$.

З означення циліндрів та циліндричних відрізків випливають наступні їх загальні властивості, тобто властивості, які правильні при довільному виборі послідовності $\{a_k\}$:

1) $\inf \Delta_{c_1\dots c_m} = \inf \Delta'_{c_1\dots c_m}$; $\sup \Delta_{c_1\dots c_m} = \sup \Delta'_{c_1\dots c_m}$;
2) $\Delta'_{c_1\dots c_m} = \Delta'_{c_1\dots c_m 0} \cup \Delta'_{c_1\dots c_m 1}$;
3) $\inf \Delta_{c_1\dots c_m} = \inf \Delta_{c_1\dots c_m 0}, \sup \Delta_{c_1\dots c_m} = \sup \Delta_{c_1\dots c_m 1}$;
4) $|\Delta_{c_1\dots c_m}| = r_m \to 0$, $m \to \infty$;
5) $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\dots c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1\dots c_m} \equiv \Delta_{c_1\dots c_m\dots} = x \in \Delta' \subset [0,1]$.

Наступна властивість є наслідком умови (3):

6) $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{k_1}\, c_{k_1+1}\dots c_{k_2}\,\dots\, c_{k_{n-1}+1}\,\dots\, c_{k_n}} = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_{k_1}\, d_{k_1+1}\,\dots\, d_{k_2}\,\dots\, d_{k_{n-1}+1}\,\dots\, d_{k_n}}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k_1} c_i = \sum_{i=1}^{k_1} d_i; \\ \sum_{i=k_1+1}^{k_2} c_i = \sum_{i=k_1+1}^{k_2} d_i; \\ \vdots \\ \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} c_i = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} d_i. \end{cases} \tag{4}$$

Опишемо множину точок спектра, які мають скінченну кількість зображень. Нехай

$$x = \Delta_{c_1(x)c_2(x)\dots c_{k_1}(x)\, c_{k_1+1}(x)\,\dots\, c_{k_2}(x)\,\dots\, c_{k_{n-1}+1}(x)\,\dots\, c_{k_n}(x)\dots} \tag{5}$$

— одне із зображень точки x. Якщо $\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} c_i(x) \notin \{0, l_n\}$ для нескінченної кількості індексів n, то точка x має континуальну кількість зображень у вигляді $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i$. Справді, з властивості 6) випливає, що при

$$\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} c_i(x) \notin \{0, l_n\}$$

рівняння

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{l_n} = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} c_i(x)$$

має щонайменше два різних розв'язки $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{l_n}^{(1)}\right)$ та $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{l_n}^{(2)}\right)$, де $x_i^{(j)} \in \{0,1\}$ для $i = 1, \dots, l_n$, $j = 1, 2$. Тому, застосувавши ці міркування до всіх n, для яких

$$\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} c_i(x) \in \{1, 2, \dots, l_n - 1\},$$

та, взявши до уваги, що $l_n > 1$ для нескінченної кількості індексів n, отримуємо бажаний висновок. У той же час зазначимо, що існують точки спектра, які мають єдине зображення у вигляді (5). Якщо $a_{k_n} > r_{k_n}$ для нескінченної кількості індексів n, то всі точки виду

$$\Delta_{c_1(x)c_2(x)\dots c_{k_1}(x)\ c_{k_1+1}(x)\ \dots\ c_{k_2}(x)\ \dots\ c_{k_{n-1}+1}(x)\ \dots\ c_{k_n}(x)\ \dots}, \tag{6}$$

де

$$c_{k_{n-1}+1}(x) + c_{k_{n-1}+2} + \dots + c_{k_n} \in \{0, l_n\}, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

мають єдине зображення у вигляді (5). Якщо $a_{k_n} = r_{k_n}$ для нескінченної кількості індексів n, то деякі точки (їх зчисленна кількість) виду (6) мають по два різних зображення: одне з них має “0” в періоді, а інше має “1” в періоді. Тому множина тих точок, які мають єдине зображення у вигляді (5), має потужність континуум. Зрозуміло, що якщо умова

$$c_{k_{n-1}+1}(x) + c_{k_{n-1}+2}(x) + \dots + c_{k_n}(x) \in \{0, l_n\},$$

виконується для всіх достатньо великих $n \in \mathbf{N}$, то x має скінченну кількість зображень у вигляді (5). У розділі 3 буде знайдена розмірність множини тих точок, для яких існує континуальна множина різних зображень та розмірність множини точок, що мають скінченну кількість зображень.

Покажемо, що розподіл досліджуваної випадкової величини ξ є ймовірнісною мірою з незалежними $\widetilde{Q}$-символами ([2]). Для цього визначимо послідовність $\{m_n\}$ рівністю:

$$m_n = \begin{cases} l_n + 1, & \text{якщо } a_{k_n} = r_{k_n}; \\ 2l_n + 1, & \text{якщо } a_{k_n} > r_{k_n}. \end{cases} \tag{7}$$

Для кожного n визначимо стохастичний вектор–стовпчик

$$\vec{q}_n = (q_{0n}, q_{1n}, \dots, q_{m_n-1,n})$$

наступним чином.

1) Якщо $m_n = l_n + 1$, то

$$q_{in} = \frac{1}{l_n + 1}, \qquad i \in \{0, 1, 2, \dots, m_n - 1\} = B_n.$$

2) Якщо $m_n = 2l_n + 1$, то

$$q_{in} = \frac{r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}, \qquad i \in \{0, 2, 4, \dots, m_n - 1\} = B_n;$$

$$q_{in} = \frac{a_{k_n} - r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}, \qquad i \in \{1, 3, 5, \dots, m_n - 2\}.$$

“Стохастична матриця” $\widetilde{Q} = \|q_{in}\|$, n-ий стовпчик якої співпадає зі стохастичним вектором $\vec{q}_n$, визначає $\widetilde{Q}$-зображення чисел відрізка [0,1] наступним чином. Нехай $A_n = \{0, 1, \dots, m_n - 1\}$, та $\gamma_n \in A_n$. Розглянемо відображення

$$f\colon A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \dots \mapsto [0,1],$$

яке задане наступним чином:

$$f(\{\gamma_n\}) = x = \beta_{\gamma_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{\gamma_n n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\gamma_i i},$$

де $\beta_{\gamma_n n} = \sum_{j=0}^{\gamma_n - 1} q_{jn}$. Скорочено запишемо

$$x = \tilde{\Delta}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots}, \qquad \gamma_n \in A_n.$$

Останній вираз називається $\widetilde{Q}$-зображенням числа x (див. детальніше в [2, 18]).

Відрізок

$$\tilde{\Delta}_{\gamma_1 \ldots \gamma_m} = \left[\beta_{\gamma_1 1} + \sum_{n=2}^{m} \beta_{\gamma_n n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\gamma_i i}, \beta_{\gamma_1 1} + \sum_{n=2}^{m} \beta_{\gamma_n n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\gamma_i i} + \prod_{i=1}^{m} q_{\gamma_i i} \right]$$

називається циліндричним відрізком рангу m з основою $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ $\widetilde{Q}$-зображення числа x. Оскільки циліндри $\Delta'_{c_1 \ldots c_{k_n}}$ рангу k_n не перекриваються або співпадають, то між множинами циліндричних відрізків $\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{k_n}}$ рангу k_n і множиною $\widetilde{Q}$-циліндрів $\tilde{\Delta}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n}$, $\gamma_i \in B_i$, існує відповідність, породжена відображенням:

$$\gamma_i = \begin{cases} c_{k_{i-1}+1} + \cdots + c_{k_i}, & \text{якщо } a_{k_i} = r_{k_i}; \\ 2(c_{k_{i-1}+1} + \cdots + c_{k_i}), & \text{якщо } a_{k_i} > r_{k_i}. \end{cases}$$

Тому для фіксованого ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ і довільного набору

$$c_1 c_2 \ldots c_{k_1} c_{k_1+1} \ldots c_{k_2} \ldots c_{k_{n-1}+1} \ldots c_{k_n}, \qquad c_i \in \{0, 1\},$$

існує єдиний набір $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ $(\gamma_i \in B_i)$, такий що

$$\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{k_n}} = \tilde{\Delta}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n},$$

причому γ_i визначаються l_i символами $c_{k_{i-1}+1} \ldots c_{k_i}$ та виконанням (невиконанням) умови $a_{k_n} = r_{k_n}$.

Нехай $\{\tilde{\xi}_n\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, що набувають значень $0, 1, \ldots, m_n - 1$ з ймовірностями $\tilde{p}_{0n}, \tilde{p}_{1n}, \ldots, \tilde{p}_{m_n-1,n}$, де

$$\tilde{p}_{in} = C_{l_n}^{i} q^{l_n - i} p^{i},$$

коли $a_{k_n} = r_{k_n}$; та

$$\tilde{p}_{in} = \begin{cases} C_{l_n}^{i/2} q^{l_n - i/2} p^{i/2}, & \text{якщо } i \text{ — парне}, \\ 0, & \text{якщо } i \text{ — непарне}, \end{cases}$$

коли $a_{k_n} > r_{k_n}$. “Стохастичною матрицею” $\|q_{in}\|$ та послідовністю $\{\tilde{\xi}_n\}$ незалежних випадкових величин визначається випадкова величина $\tilde{\xi}$ з незалежними $\widetilde{Q}$-символами $\tilde{\xi}_n$

$$\tilde{\xi} = f(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_n, \ldots) = \beta_{\tilde{\xi}_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{\tilde{\xi}_n n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\tilde{\xi}_i i} =: \tilde{\Delta}_{\tilde{\xi}_1 \ \tilde{\xi}_2 \ldots \tilde{\xi}_n \ldots}.$$

Зауваження 2.1. Випадкові величини ξ і $\tilde{\xi}$ однаково розподілені. Справді, досить показати, що $\mathsf{P}_{\xi}(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{k_n}}) = \mathsf{P}_{\tilde{\xi}}(\tilde{\Delta}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n})$, $\forall n \in \mathbf{N}$, де

$$\gamma_i = \begin{cases} c_{k_{i-1}+1} + \cdots + c_{k_i}, & \text{якщо } a_{k_i} = r_{k_i}; \\ 2(c_{k_{i-1}+1} + \cdots + c_{k_i}), & \text{якщо } a_{k_i} > r_{k_i}. \end{cases}$$

Дана рівність безпосередньо випливає з конструкції випадкової величини $\tilde{\xi}$, незалежності та однакової розподіленості випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_n}$ та властивостей біноміального розподілу.

Лема 2.1. *Міра Лебега спектра випадкової величини* ξ *дорівнює*

$$\lim_{n\to\infty} r_{k_n}\left(\prod_{j=1}^{n}(l_j+1)\right).$$

Доведення. Спектр випадкової величини $\tilde{\xi}$ можна подати як нескінченний перетин об'єднання $\widetilde{Q}$-циліндричних відрізків (ненульової міри μ_ξ) усіх рангів. Такі $\widetilde{Q}$-циліндричні відрізки n-го рангу рівні між собою та їх кількість дорівнює l_n+1. Тому

$$S_{\tilde{\xi}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\gamma_1\in B_1}\cdots\bigcup_{\gamma_{n-1}\in B_{n-1}}\bigcup_{\gamma_n\in B_n}\tilde{\Delta}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}\gamma_n}.$$

Оскільки $\mu_{\tilde{\xi}}(\tilde{\Delta}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}\gamma_n})=\widetilde{p}_{\gamma_1 1}\widetilde{p}_{\gamma_2 2}\ldots\widetilde{p}_{\gamma_n n}>0$ і $\lambda(\tilde{\Delta}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}\gamma_n})=r_{k_n}$, то з неперевності міри Лебега випливає рівність

$$\lambda(S_{\tilde{\xi}})=\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\gamma_1\in B_1}\cdots\bigcup_{\gamma_{n-1}\in B_{n-1}}\bigcup_{\gamma_n\in B_n}\tilde{\Delta}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}\gamma_n}\right)=\lim_{n\to\infty} r_{k_n}\prod_{j=1}^{n}(l_j+1),$$

що і доводить лему. □

Лема 2.2. *Нехай* $p=1-q\in[0,1]$. *Тоді*

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{C_n^i q^{n-i}p^i}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Доведення. Нехай $\varepsilon>0$, та S_n — кількість "успіхів" у серії з n незалежних випробовувань, у кожному з яких "успіх" відбувається з імовірністю p. За законом великих чисел

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}=0.$$

Тому існує $n_0\in\mathbf{N}$ таке, що для всіх $n>n_0$ має місце

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}<\varepsilon. \tag{8}$$

З нерівності Коші–Буняковського, $(1\cdot a_1+\cdots+1\cdot a_m)^2\le m\cdot(a_1^2+\cdots+a_m^2)$, та (8) отримаємо для випадку $\left|\frac{i}{n}-p\right|>\varepsilon$, що

$$\begin{aligned}\sum_{i:\,\left|\frac{i}{n}-p\right|>\varepsilon}^{n}\sqrt{C_n^i q^{n-i}p^i}&\le\sqrt{n+1}\sqrt{\left(\sum_{i:\,\left|\frac{i}{n}-p\right|>\varepsilon}^{n}C_n^i q^{n-i}p^i\right)}\\&=\sqrt{n+1}\sqrt{\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}}\le\sqrt{\varepsilon}\sqrt{n+1}.\end{aligned} \tag{9}$$

Існує не більше, ніж $2n\varepsilon+1$ натуральних чисел i таких, що $\left|\frac{i}{n}-p\right|\le\varepsilon$. Тому, використовуючи нерівність Коші-Буняковського та попереднє зауваження, маємо:

$$\sum_{i:\,\left|\frac{i}{n}-p\right|\le\varepsilon}^{n}\sqrt{C_n^i q^{n-i}p^i}\le\sqrt{2\varepsilon n+1}\sqrt{\left(\sum_{i:\,\left|\frac{i}{n}-p\right|\le\varepsilon}^{n}C_n^i q^{n-i}p^i\right)}\le\sqrt{2\varepsilon n+1}. \tag{10}$$

З (9) та (10) випливає, що при $n > n_0$

$$\sum_{i=0}^{n} \sqrt{C_n^i q^{n-i} p^i} = \sum_{i\colon \left|\frac{i}{n}-p\right|\le\varepsilon} \sqrt{C_n^i q^{n-i} p^i} + \sum_{i\colon \left|\frac{i}{n}-p\right|>\varepsilon} \sqrt{C_n^i q^{n-i} p^i}$$
$$\le \sqrt{\varepsilon}\sqrt{n+1} + \sqrt{2\varepsilon n+1} < 3\sqrt{\varepsilon}\sqrt{n+1}+1.$$

Отже,

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \sqrt{C_n^i q^{n-i} p^i}} \le 3\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{n+1}},$$

звідки і слідує твердження леми. □

Наслідок 2.1. *Нехай $p = 1-q \in [0,1]$ і K_0 — довільне число з $(0,1)$. Тоді існує $n_0 = n_0(p, K_0) \in \mathbf{N}$*

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \sqrt{C_n^i q^{n-i} p^i}} \le K_0 < 1, \qquad \forall n > n_0.$$

Дослідимо вираз

$$\sqrt{\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} \sqrt{C_m^i q^{m-i} p^i}}$$

як функцію $\upsilon(p)$, яка залежить від $p = 1-q \in [0,1]$.

Лема 2.3. *Нехай $m \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Тоді*

$$\upsilon(p) = \sqrt{\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} \sqrt{C_m^i q^{m-i} p^i}} \le K_m < 1, \qquad \forall p = 1-q \in [0,1],$$

де K_m — константа, яка залежить від m.

Доведення. Введемо функцію

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sqrt{x_0} + \sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_m}$$

на частині G гіперплощини $x_0+x_1+\cdots+x_m = 1$, що розташована в $(m+1)$-вимірному кубі $[0,1]^{m+1}$. Оскільки

$$\overrightarrow{(\sqrt{x_0}, \sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_m})}\overrightarrow{(1,1,\ldots,1)} \le \left|\overrightarrow{(\sqrt{x_0}, \sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_m})}\right| \left|\overrightarrow{(1,1,\ldots,1)}\right| = \sqrt{m+1},$$

то неперервна на G функція $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ досягає свого найбільшого значення $\sqrt{m+1}$ при

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_m = \frac{1}{m+1}$$

і

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_m) < \sqrt{m+1}$$

для всіх інших точок з множини G. Розглянемо функцію

$$\upsilon(p) = \sqrt{\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} \sqrt{C_m^i q^{m-i} p^i}},$$

де $p = 1-q \in [0,1]$. Ця функція неперервна на $[0,1]$, та обмежена зверху

$$\upsilon(p) \le \max\left(\frac{\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_m)}{\sqrt{m+1}}\right) = 1,$$

причому рівність можлива тільки у випадку

$$C_m^i q^{m-i} p^i = \frac{1}{m+1}, \qquad \forall i = 0, \ldots, m.$$

При $m \geq 2$ або p^m, або q^m строго менше, ніж $\frac{1}{m+1}$. Тому

$$\upsilon(p) < 1, \qquad \forall p \in [0,1], \ \forall m \geq 2. \tag{11}$$

Оскільки $\upsilon(p)$ визначена й неперервна на компакті, то на ньому вона досягає свого найбільшого значення, а з (11) випливає, що $\max_p (\upsilon(p)) = K_m < 1$, $\forall m \geq 2$, що й доводить лему. □

Наступна теорема встановлює лебегівську структуру розподілу випадкової величини ξ і є основним результатом даного розділу.

Теорема 2.1. *Якщо $p = 0$ або $p = 1$, то випадкова величина ξ має вироджений розподіл. У всіх інших випадках ξ має сингулярно неперервний тип розподілу.*

Доведення. Перше твердження теореми є очевидним. Нехай

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \max_i \{\widetilde{p}_{in}\}.$$

Зрозуміло, що даний добуток буде розбігатись до 0 для всіх $p \in (0,1)$ і $M = 1$ при $p \in \{0,1\}$. Тому, за теоремою Леві [13], випадкова величина $\widetilde{\xi}$ має або чисто дискретний розподіл ($p \in \{0,1\}$), або чисто неперервний ($p \in (0,1)$) розподіл.

Випадкова величина $\widetilde{\xi}$, будучи випадковою величиною з незалежними $\widetilde{Q}$-символами, має абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді ([2]), коли:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m_n-1} \sqrt{q_{in}\widetilde{p}_{in}} \right) > 0.$$

Оскільки

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} \sqrt{q_{in}\widetilde{p}_{in}} = \sqrt{\frac{r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}} \sum_{i=0}^{l_n} \sqrt{C_{l_n}^i q^{l_n-i} p^i} \quad \text{та} \quad \frac{r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}} \leq \frac{1}{l_n+1},$$

то

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} \sqrt{q_{in}\widetilde{p}_{in}} \leq \sqrt{\frac{1}{l_n+1}} \sum_{i=0}^{l_n} \sqrt{C_{l_n}^i q^{l_n-i} p^i}.$$

Необхідною умовою збіжності добутку

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{l_n} \sqrt{q_{in}\widetilde{p}_{in}} \right)$$

є виконання умови

$$\sqrt{\frac{1}{l_n+1}} \sum_{i=0}^{l_n} \sqrt{C_{l_n}^i q^{l_n-i} p^i} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Якщо $l_n > 1$, то з наслідку леми 2.2 та з леми 2.3

$$\sqrt{\frac{1}{l_n+1}} \sum_{i=0}^{l_n} \sqrt{C_{l_n}^i q^{l_n-i} p^i} \leq \max\left\{\max\left\{K_j, j = 2, \ldots, m_0\right\}, K_0\right\} < 1,$$

де m_0 — номер, починаючи з якого виконується умова

$$\sqrt{\frac{1}{m+1}} \sum_{i=0}^{m} \sqrt{C_m^i q^{m-i} p^i} \leq K_0 < 1.$$

З іншого боку, умова $a_k < r_k$ виконується для нескінченної кількості індексів k, що рівносильно виконанню умови $l_n > 1$ для нескінченної кількості індексів n. Отже, випадкова величина $\widetilde{\xi}$ не може мати абсолютно неперервного розподілу, що, беручи до уваги чистоту розподілу ξ та зауваження 2.1, доводить синулярну неперервність міри μ_ξ. □

3. Фрактальні властивості спектра розподілу

Нехай M — фіксована обмежена підмножина дійсної прямої. Нагадаємо, що сімейство Φ_M інтервалів називається *сімейством локально тонких покриттів* множини M, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне ε-покриття $\{E_j\}$ множини M і $E_j \in \Phi_M$, тобто, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{E_j\}$ ($E_j \in \Phi_M$, $|E_j| \le \varepsilon$): $M \subset \bigcup_j E_j$. α-мірною мірою Хаусдорфа підмножини $E \subset M$ відносно заданого сімейства Φ_M називається

$$H^\alpha(E, \Phi_M) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\inf_{|E_j| \le \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right] = \lim_{\varepsilon \to \infty} m_\varepsilon^\alpha(E, \Phi_M),$$

де інфімум береться по всеможливих не більш ніж зчисленних ε-покриттях $\{E_j\}$ множини E, $E_j \in \Phi_M$. Якщо M=[0,1], то, використовуючи сімейство всіх відкритих (замкнених) інтервалів, отримаємо класичну α-мірну міру Хаусдорфа, яку будемо позначати $H^\alpha(E)$.

Невід'ємне число

$$\dim_H(E, \Phi_M) = \inf\{\alpha \colon H^\alpha(E, \Phi_M) = 0\}$$

називається розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини $E \subset M$ відносно сімейства локально тонких покриттів Φ_M.

Сімейство Φ_M локально тонких покриттів називається називається довірчим, якщо $\dim_H(E, \Phi_M) = \dim_H(E)$, $\forall E \subseteq M$.

Нехай $\widetilde{\mathcal{A}}_n$ — сім'я циліндричних відрізків рангу k_n, тобто

$$\widetilde{\mathcal{A}}_n = \left\{ E \colon E = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k_n}}, \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, k_n \right\},$$

та

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}_n. \tag{12}$$

Лема 3.1. *Нехай* $\sup\{l_n\} < \infty$. *Тоді сімейство* $\widetilde{\mathcal{A}}$ *є довірчим сімейство покриттів на спектрі, тобто,* $\dim_H(E, \widetilde{\mathcal{A}}) = \dim_H(E)$, $\forall E \subset S_\mu$.

Доведення. Нерівність $\dim_H(E, \widetilde{\mathcal{A}}) \ge \dim_H(E)$ очевидна, оскільки сімейство всіх підмножин одиничного відрізка містить $\widetilde{\mathcal{A}}$ як частину. Доведемо обернену нерівність. Нехай $\{E_i\}$ — довільне ε-покриття множини $E \subset S_\mu$ інтервалами $E_i = (a_i, b_i)$. Оскільки при обчисленні передміри $m_\varepsilon^\alpha(E)$ достатньо брати покриття з умовою $E_i \cap E \ne \varnothing$, то, без втрати загальності, будемо вважати, що $E_i \cap E \ne \varnothing$. Для довільного E_i існує циліндричний відрізок

$$\Delta_{[n(i)]} := \Delta_{c_1 \ldots c_{k_{n(i)}}} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{n(i)},$$

такий, що $\Delta_{[n(i)]} \subset E_i$ і E_i не містить інтервалів з $\widetilde{\mathcal{A}}_{n(i)-1}$. E_i не може містити більше $2 \cdot l_{n(i)}$ циліндрів з $\widetilde{\mathcal{A}}_{n(i)}$, бо у іншому випадку E_i містив би циліндричний відрізок з $\widetilde{\mathcal{A}}_{n(i)-1}$. Таким чином, множина $E_i \cap E$ міститься в об'єднанні не більш як $2 \cdot l_{n(i)} + 2$ ізометричних циліндрів з $\widetilde{\mathcal{A}}_{n(i)}$ довжиною $r_{k_{n(i)}}$ (включаючи $\Delta_{[n(i)]}$). Отже, $\left|\Delta_{[n(i)]}\right| < \varepsilon$ і

$$\left(2 \cdot l_{n(i)} + 2\right) \left|\Delta_{[n(i)]}\right|^\alpha < \left(2 \cdot l_{n(i)} + 2\right) |E_i|^\alpha .$$

Тому,

$$m_\varepsilon^\alpha\left(E,\widetilde{\mathcal{A}}\right)\le\sum_i\left(2\cdot l_{n(i)}+2\right)\left|\Delta_{[n(i)]}\right|^\alpha\le\left(2\cdot\sup\{l_n\}+2\right)\sum_i|E_i|^\alpha,$$

для довільних фіксованих $\varepsilon>0$ та $\alpha>0$, та для довільного ε-покриття множини $E\subset S_\mu$ інтервалами E_i.

Таким чином

$$m_\varepsilon^\alpha(E,\widetilde{\mathcal{A}})\le(2\cdot\sup\{l_n\}+2)\,m_\varepsilon^\alpha(E).$$

При граничному переході отримаємо

$$H^\alpha(E,\widetilde{\mathcal{A}})\le(2\cdot\sup\{l_n\}+2)\,H^\alpha(E),$$

звідки і слідує потрібна нерівність

$$\dim_H(E,\widetilde{\mathcal{A}})\le\dim_H(E).\quad\square$$

Використовуючи дану лему, знайдемо розмірність Хаусдорфа–Безиковича топологічного носія S_μ (мінімального замкненого носія міри μ).

Теорема 3.1. *Нехай* $\sup\{l_n\}<\infty$. *Тоді розмірність Хаусдорфа–Безиковича топологічного носія* S_μ *дорівнює*

$$\dim_H(S_\mu)=\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=1}^n\ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}}\right).$$

Доведення. 1) Доведемо спочатку, що

$$\dim_H(S_\mu)\le\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=1}^n\ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}}\right).$$

Спектр S_μ можна покрити $\prod_{j=1}^n(l_j+1)$ циліндричними відрізками з $\widetilde{\mathcal{A}}$, діаметр яких дорівнює r_{k_n}. Тому

$$m_{r_{k_n}}^\alpha(S_\mu)\le r_{k_n}^\alpha\cdot\prod_{j=1}^n(l_j+1).$$

Якщо

$$\varliminf_{n\to\infty}r_{k_n}^\alpha\cdot\prod_{j=1}^n(l_j+1)<1\tag{13}$$

то $H^\alpha(S_\mu)\le1$. Легко перевірити, що (13) випливає з умови

$$\alpha\ge\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=1}^n\ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}}\right)=:a,$$

Тому, $H^\alpha(S_\mu)=0$ для всіх $\alpha>a$, і, отже, $\dim_H(S_\mu)\le a$.

2) Доведемо тепер, що

$$\dim_H(S_\mu)\ge\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=1}^n\ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}}\right).$$

Спектр узагальнених нескінчених згорток Бернуллі, S_μ не залежить від вибору матриці $P=\|p_{ik}\|$, $p_{0k}\in(0,1)$. Розглянемо допоміжну ймовірнісну міру μ^T з незалежними $\widetilde{Q}$-символами, спектр якої співпадає зі спектром досліджуваної випадкової величини. Зробимо такий вибір матриці $P=\|\widetilde{p}_{ik}\|$, при якому відповідна міра μ^T буде "рівномірно розподіленою" на топологічному носії, тобто так, щоб μ^T кожного з циліндричних відрізків з $\widetilde{\mathcal{A}}_n$ дорівнювала $\left(\prod_{j=1}^n(l_j+1)\right)^{-1}$.

Для заданого $\varepsilon > 0$, нехай $\{V_i\}$ — ε-покриття множини S_μ циліндричними відрізками з $\widetilde{\mathcal{A}}_{n(i)}$, $(r_{k_{n(i)}} \leq \varepsilon$, $\forall i \in \mathbf{N})$. Тоді

$$1 = \mu^T(S_\mu) = \mu^T\left(\bigcup_i V_i\right) \leq \sum_i \mu^T(V_i) = \sum_i \frac{1}{\prod_{j=1}^{n(i)}(l_j+1)}$$
$$= \sum_i |V_i|^{\log_{|V_i|}\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{n(i)}(l_j+1)}\right)} = \sum_i |V_i|^{-\log_{r_{k_{n(i)}}}\left(\prod_{j=1}^{n(i)}(l_j+1)\right)}.$$

З означення величини a слідує, що для довільного $\delta > 0$ існує $n_0 \in \mathbf{N}$ таке, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}} \geq a - \delta.$$

Виберемо таке n^*, що $n^* > n_0$ та $r_{k_{n^*}} \leq \varepsilon$. Тоді

$$1 = \mu^T(S_\mu) \leq \sum_i |V_i|^{a-\delta},$$

для довільного $r_{k_{n^*}}$-покриття спектра S_μ циліндричними відрізками з $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Таким чином,

$$1 \leq m^{a-\delta}_{r_{n^*}}(S_\mu, \widetilde{\mathcal{A}}) \leq H^{a-\delta}(S_\mu, \widetilde{\mathcal{A}}), \qquad \forall \delta > 0.$$

Тому $H^\alpha(S_\mu, \widetilde{\mathcal{A}}) \geq 1$, $\forall \alpha < a$, і, отже, з попередньої леми

$$\dim_H(S_\mu) = \dim_H(S_\mu, \widetilde{\mathcal{A}}) \geq \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}}\right). \quad \square$$

Покажемо, що всі ймовірнісні міри з розглядуваного класу належать до так званих нескінченних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями. З цією метою знайдемо розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини тих точок, для яких існує континуальна множина різних зображень та розмірність множини точок, що мають скінченну кількість зображень.

Теорема 3.2. *Нехай* $\sup\{l_n\} < \infty$. *Тоді*

1) розмірність Хаусдорфа–Безиковича множин точок, що мають скіченну кількість зображень (5), *дорівнює*

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{n\ln 2}{-\ln r_{k_n}}\right).$$

2) розмірність Хаусдорфа–Безиковича множин точок, що мають континуальну кількість зображень (5), *дорівнює*

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}}\right).$$

Доведення. Нагадаємо основні властивості розмірності Хаусдорфа–Безиковича ([9]):

B1) якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_H(E_1) \leq \dim_H(E_2)$;

B2) $\dim_H(\bigcup_n E_n) = \sup_n \dim_H(E_n)$;

B3) якщо E_1 і E_2 геометрично подібні, то $\dim_H(E_1) = \dim_H(E_2)$.

Для заданого ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ побудуємо за вказаним в розділі 2 алгоритмом числові послідовності $\{l_n\}$ та $\{m_n\}$ і відповідну послідовність множин $\{B_n\}$. Сконструюємо допоміжну послідовність множин $\{L_j\}$, таку, що

$$L_j := \Big\{x : \tilde{\Delta}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \gamma_n \in B_n, \text{ якщо } n \in \{1, 2, \ldots, j-1\}, \\ \text{і } \gamma_n \in \{0, m_n - 1\}, \text{ якщо } n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \ldots, j-1\}\Big\}.$$

Множина L_1 співпадає з множиною тих точок, які мають єдине зображення у вигляді (5), окрім, можливо, зчисленної кількості точок. Провівши міркування, які повністю аналогічні до тих, які використовувалися при доведенні теореми 3.1, отримуємо:

$$\dim_H(L_1) = \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{n\ln 2}{-\ln r_{k_n}}\right).$$

Тепер доведемо, що $\dim_H(L_j) = \dim_H(L_1)$, $\forall j \in \mathbf{N}$. Нехай $j \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, тоді

$$L_1 = \bigcup_{i}^{2^{j-1}} L_1^{(i)},$$

де $\{L_1^{(i)}\}_{i=1,\ldots,2^{j-1}}$ — ізометричні множини, які мають не більше однієї спільної точки, і

$$L_1^{(1)} := \Big\{x\colon x = \tilde{\Delta}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \gamma_n = 0, \text{ якщо } n \in \{1, 2, \ldots, j-1\}, \\ \text{і } \gamma_n \in \{0, m_n - 1\}, \text{ якщо } n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \ldots, j-1\}\Big\}.$$

Рівність

$$\dim_H\left(L_1^{(1)}\right) = \dim_H(L_1) \tag{14}$$

випливає з B2 та B3. Множину L_j можна представити у вигляді

$$L_j = \bigcup_{t=1}^{\prod_{i=1}^{j-1}(l_i+1)} L_j^{(t)},$$

$\{L_j^{(t)}\}_{t=1,\ldots,\prod_{i=1}^{j-1}(l_i+1)}$ — ізометричні множини, які мають не більше однієї спільної точки, та $L_1^{(1)} \in \{L_j^{(t)}\}_{t=1,\ldots,\prod_{i=1}^{j-1}(l_i+1)}$. Тоді з B2, B3 та (14) випливає

$$\dim_H(L_j) = \dim_H(L_1).$$

З попередньої рівності та з B2, маємо:

$$\dim_H\left(\bigcup_i L_i\right) = \sup_i \dim_H(L_i) = \dim_H(L_1). \tag{15}$$

Множина точок, які мають скінченну кількість зображеннь у вигляді (5), співпадає з множиною $\bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$, звідки і випливає перше твердження теореми. Нехай L^* — множина тих точок, для яких існує континуальна множина різних зображень у вигляді (5). Якщо

$$\dim_H S_\mu > \dim_H L_1 = \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{n\ln 2}{-\ln r_{k_n}}\right),$$

то з того, що $S_\mu = L^* \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} L_j\right)$ та властивості $B2$ випливає, що $\dim_H L^* = \dim_H S_\mu$ і, отже, майже всі (в сенсі розмірності Хаусдорфа–Безиковича) точки спектра S_μ мають континуальну кількість зображень у вигляді (5).

Покажемо, що $\dim_H L^* = \dim_H S_\mu$ навіть для того випадку, коли

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}}\right) = \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{n\ln 2}{-\ln r_{k_n}}\right),$$

тобто, коли $\dim_H S_\mu = \dim_H L_1$ (це, зокрема, можливо, якщо $l_n = 1$, $n \neq 2^s$, і $l_n = 2$, $n = 2^s$).

Оскільки $l_n > 1$ для нескінченної кількості індексів n, то можна вибрати як завгодно "рідку" підпослідовність n_t так, щоб множини B_{n_t} містили не меньше трьох елементів. Виберемо в кожній з множин $B_{n_t} \setminus \{0, m_{n_t} - 1\}$ один елемент і назвемо його θ_t. Розглянемо множину

$$K_1 = \Big\{x\colon x := \tilde{\Delta}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots},\ \text{де } \gamma_k \in \{0, m_k - 1\} \text{ при } k \notin \{n_t\} \text{ і } \gamma_{n_t} = \theta_t, \forall t \in \mathbf{N}\Big\}.$$

Кожна точка з множини K_1 має континуальну кількість зображень виду (5), тобто $K_1 \subset L^*$. Використавши міркування, які повністю аналогічні до тих міркувань, які наведені в доведені теореми 3.1, отримуємо:

$$\dim_H(K_1) = \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln(z_i + 1)}{-\ln r_{k_n}}\right),$$

де $z_i = 0$, якщо $i \in \{n_t\}$ і $z_i = 1$ при $i \notin \{n_t\}$. Тому

$$\dim_H(K_1) = \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{(n - \tau(n))\ln 2}{-\ln r_{k_n}}\right) = \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{(n - \tau(n))}{n}\ \frac{n \ln 2}{-\ln r_{k_n}}\right),$$

де $\tau(n)$ — кількість членів послідовності $\{n_t\}$, які менші за n. Оскільки $\{n_t\}$ вибрана достатньо "рідка" так, щоб $\tau(n)/n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $\dim_H K_1 = \dim_H L_1$. Отже, $\dim_H L^* = \dim_H L_1$. $\square$

Наслідок 3.1. *Якщо $\lambda(S_\mu) > 0$, то майже всі (в сенсі міри Лебега) точки спектра мають континуальну кількість зображень* (5).

4. Тонкі фрактальні властивості розподілу випадкової величини ξ

Спектр є досить грубою характеристикою сингулярно неперервного ймовірнісного розподілу, оскільки навіть континуальне сімейство попарно сингулярних розподілів може мати спільний спектр. В якості прикладу такого сімейства можна взяти клас нескінченних згорток Бернуллі виду $\xi = \sum_{k=1}^\infty \xi_k/2^k$, де ξ_k — незалежні випадкові величини, які набувають значень 0 та 1 з імовірностями $p \in (0, \frac{1}{2})$ та $1 - p$ відповідно. Тому розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра міри є також досить грубою фрактальною характеристикою сингулярної міри. Значно краще характеризує властивості сингулярного розподілу розмірність Хаусдорфа власне розподілу.

Нагадаємо, що розмірністю Хаусдорфа розподілу випадкової величини τ називається число:

$$\dim_H(\tau) = \inf\{\dim_H(E), E \in \mathcal{B}_\tau\},$$

де $\mathcal{B}_\tau$ — клас всеможливих борелівських носіїв (не обов'язково замкнених) випадкової величини τ, тобто

$$\mathcal{B}_\tau = \{E\colon E \in \mathcal{B}, \mathsf{P}_\tau(E) = 1\}.$$

Нехай υ — неперервна ймовірнісна міра на борелівських підмножинах $[0,1]$, E_0 — деяка фіксована підмножина одиничного відрізка, і нехай $\Phi(E_0)$ — сім'я відрізків (інтервалів) одиничного відрізка така, що для E_0 і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш як зчисленне $(\upsilon - \varepsilon)$-покриття $\{E_j\}$ множини E_0, $E_j \in \Phi(E_0)$, $\upsilon(E_j) \le \varepsilon$. Тоді $(\upsilon - \alpha)$ —міра Хаусдорфа довільної множини $E \subset E_0$ визначається наступним чином:

$$H^\alpha(E, \upsilon, \Phi(E_0)) = \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[\inf_{\upsilon(E_j)\le\varepsilon} \left\{\sum_j \upsilon^\alpha(E_j)\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to\infty} m_\varepsilon^\alpha(E, \upsilon, \Phi),$$

де $E_j \in \Phi(E_0)$, $\bigcup_j E_j \supset E$.

Число

$$\dim_\upsilon(E, \Phi(E_0)) = \inf\{\alpha\colon H^\alpha(E, \upsilon, \Phi(E_0)) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа-Біллінгслі* множини E відносно міри υ і сімейства покриттів $\Phi(E_0)$.

Теорема 4.1. *Нехай* $\sup\{l_n\} < \infty$. *Тоді розмірність Хаусдорфа розподілу випадкової величини* ξ *дорівнює:*

$$\dim_H(\mu_\xi) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^n h_j}{-\ln r_{k_n}},$$

де

$$h_j = -\sum_{i=0}^{l_j} \tilde{p}_{ij} \ln \tilde{p}_{ij}.$$

Доведення. При обчисленні розмірності Хаусдорфа розподілу випадкової величини ξ достатньо обмежитись розглядом носіїв, які є підмножинами спектра ξ.

Нехай $\widetilde{\Delta}_{[n]}(x) := \widetilde{\Delta}_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)}$ — $\widetilde{Q}$-циліндричний відрізок n-го рангу, який містить точку x спектра S_ξ. Зазначимо, що клас усіх таких циліндричних відрізків співпадає з $\widetilde{\mathcal{A}}$ (див. (12)). Нехай μ — ймовірнісна міра, яка відповідає розподілу випадкової величини ξ, тобто $\forall E \in \mathcal{B}$

$$\mu(E) = \mathsf{P}\{\xi \in E\}.$$

Нехай λ — міра Лебега на [0,1]. Тоді

$$\mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x)) = \tilde{p}_{a_1(x)1} \cdot \tilde{p}_{a_2(x)2} \cdot \ldots \cdot \tilde{p}_{a_n(x)n},$$
$$\lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x)) = q_{a_1(x)1} \cdot q_{a_2(x)2} \cdot \ldots \cdot q_{a_n(x)n} = r_{k_n}.$$

Розглянемо відношення

$$\frac{\ln \mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))}{\ln \lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))} = \frac{\sum_{j=1}^n \ln \tilde{p}_{a_j(x)j}}{\ln r_{k_n}}.$$

Якщо $x = \widetilde{\Delta}_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots}$ вибирається випадково так, що $\mathsf{P}(a_j(x) = i) = \tilde{p}_{ij}$ (тобто розподіл випадкової величини x описується мірою μ), то

$$\{\eta_j\} = \{\eta_j(x)\} := \{\ln \tilde{p}_{a_j(x)j}\}$$

є послідовністю незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$\mathsf{P}\{\eta_j = \ln \tilde{p}_{ij}\} = \tilde{p}_{ij}, \qquad i = 0, \ldots, m_j - 1.$$

$$\mathsf{E}\,\eta_j = \sum_{i=0}^{m_j-1} \tilde{p}_{ij} \ln \tilde{p}_{ij} = -h_j, \qquad |h_j| \le c_1 < \infty,$$

$$\mathsf{E}\,\eta_j^2 = \sum_{i=0}^{m_j-1} \tilde{p}_{ij} \ln^2 \tilde{p}_{ij} \le c_2 < \infty,$$

причому константи c_1 та c_2 не залежать від j, бо функції $\nu(x) = x \ln x$ та $\varphi(x) = x \ln^2 x$ обмежені на відрізку [0,1], та $\sup l_j < \infty$. Позначимо

$$S_n := \eta_1(x) + \eta_2(x) + \cdots + \eta_n(x).$$

За теоремою Колмогорова (посилений закон великих чисел) для μ-майже всіх точок $x \in [0,1]$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(S_n - \mathsf{E}(S_n))}{n} = 0.$$

Зауважимо, що

$$\mathsf{E}(S_n) = \mathsf{E}(\eta_1) + \mathsf{E}(\eta_2) + \cdots + \mathsf{E}(\eta_n) = -(h_1 + h_2 + \cdots + h_n).$$

Позначимо $H_n := h_1+h_2+\cdots+h_n$, $D = \underline{\lim}_{n\to\infty} H_n/(-\ln r_{k_n})$, і розглянемо множину

$$T = \left\{x\colon \lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{\ln r_{k_n}} - \frac{H_n}{-\ln r_{k_n}}\right) = 0\right\} = \left\{x\colon \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}\left(S_n - \mathsf{E}(S_n)\right)}{\frac{1}{n}\ln r_{k_n}}\right) = 0\right\}.$$

Оскільки $r_{k_n} \le \frac{1}{2^n}$, то добуток $\frac{1}{n}\ln r_{k_n}$ відокремлений від нуля. Тому $\mu(T) = 1$ і, отже, $\dim_\mu(T, \widetilde{\mathcal{A}}) = 1$. Нехай

$$T_1 = \left\{x : \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{\ln r_{k_n}} - \frac{H_n}{-\ln r_{k_n}}\right) = 0\right\};$$

$$T_2 = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln r_{k_n}} \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{H_n}{-\ln r_{k_n}}\right\} = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))}{\ln\lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))} \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{H_n}{-\ln r_{k_n}}\right\};$$

$$T_3 = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln r_{k_n}} \ge \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{H_n}{-\ln r_{k_n}}\right\} = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))}{\ln\lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))} \ge \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{H_n}{-\ln r_{k_n}}\right\}.$$

Очевидно, що $T \subset T_1$. Можна довести (аналогічно до того, як це було зроблено в доведенні теореми 1 роботи [4]), що $T_1 \subset T_3$ і $T \subset T_2$.

За теоремою 2.1 з [6], $\dim_\lambda(T_2, \widetilde{\mathcal{A}}) \le D$. Враховуючи, що $T \subset T_2$, маємо

$$\dim_\lambda(T, \widetilde{\mathcal{A}}) \le D.$$

Оскільки

$$T \subset T_3 = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))}{\ln\lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))} \ge D\right\},$$

то за теоремою 2.2 з [6]

$$\dim_\lambda(T, \widetilde{\mathcal{A}}) \ge D\cdot\dim_\mu(T, \widetilde{\mathcal{A}}) = D\cdot 1 = D.$$

Отже, $\dim_\lambda(T, \widetilde{\mathcal{A}}) = D$. Оскільки λ — міра Лебега на [0,1], то

$$\dim_H(T, \widetilde{\mathcal{A}}) = \dim_\lambda(T, \widetilde{\mathcal{A}}) = D.$$

За лемою 3.1 $\dim_H(T, \widetilde{\mathcal{A}}) = \dim_H(T)$. Тому $\dim_H(T) = D$.

Доведемо, що побудована вище множина T є мінімальнім розмірнісним носієм міри μ. Нехай C — деякий носій міри μ, тобто $\mu(C) = 1$. Очевидно, що $C_1 = C\cap T$ — теж носій міри μ і $C_1 \subset C$. Тому $\dim_H(C_1) \le \dim_H(C)$ і $C_1 \subset T$. Доведемо, що $\dim_H(C_1) = \dim_H(T)$. Оскільки $C_1 \subset T$, то $\dim_H(C_1) \le \alpha_0(T) = D$. З іншого боку,

$$C_1 \subset T \subset T_3 = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))}{\ln\lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))} \ge D\right\}.$$

Тому з теореми 2.1 та 2.2 роботи [6] та леми 3.1 випливає, що

$$\dim_H(C_1) = \dim_\lambda(C_1, \widetilde{\mathcal{A}}) \ge D\cdot\dim_\mu(T, \widetilde{\mathcal{A}}) \ge D\cdot\dim_\mu(C_1, \widetilde{\mathcal{A}}) = D\cdot 1 = D. \quad \square$$

Наслідок 4.1. *Випадкова величини* ξ *може мати суперфрактальний* ($\dim_H(\mu_\xi) = 1$) *сингулярний розподіл навіть у випадку однакової розподіленості випадкових величин* ξ_k. *Це, зокрема, має місце при* $p = q = \frac{1}{2}$, $a_{k_n} = r_{k_n}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ *і*

$$l_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \ne 2^s, \\ 2, & \text{якщо } n = 2^s, \end{cases} \qquad s \in \mathbf{N}.$$

Література

1. S. Albeverio and G. Torbin, *On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions*, Bull. Sci. Math. **132** (2008), no. 8, 711–727.
2. S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols*, Meth. of Func. An. Top. **17** (2011), no. 2, 97–111.
3. S. Albeverio and G. Torbin, *Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions*, Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки **5** (2004), 248–264.
4. S. Albeverio and G. Torbin, *Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), no. 4, 356–367.
5. J. C. Alexander and D. Zagier, *The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure*, J. London Math. Soc. **44** (1991), 121–134.
6. P. Billingsley, *Hausdorff dimension in probability theory II*, Ill. J. Math. **5** (1961), 291–198.
7. M. Cooper, *Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions*, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. **124** (1998), 135–149.
8. P. Erdös, *On a family of symmetric Bernoulli convolutions*, Amer. J. Math. **61** (1939), 974–975.
9. K. J. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, 1990.
10. A. M. Garsia, *Arithmetic properties of Bernoulli convolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 409–432.
11. Ya. Gontcharenko, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, *On fractal properties of some Bernoulli convolutions*, Prob. Theory and Math. Statist. **79** (2009), 39-–55.
12. B. Jessen, and A. Wintner, *Distribution function and Riemann Zeta–function*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), 48–88.
13. P. Lévy, *Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes*, Studia Math. **3** (1931), 119–155.
14. Y. Peres, W. Schlag, and B. Solomyak, *Sixty years of Bernoulli convolutions*, Fractal Geometry and Stochastics II, Progress in Probab., vol. 46, 2000, pp. 39–65.
15. Y. Peres and B. Solomyak, *Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 2, 231–239.
16. B. Solomyak, *On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem)*, Annals of Mathematics **142** (1995), 611–625.
17. М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін, *Один клас випадкових величин типу Джессена–Вінтнера*, Доп. НАН України (1998), №4, 48–54.
18. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, Київ, 1998.
19. Г. М. Торбін, *Мультифрактальний аналіз сингулярно неперевних ймовірнісних мір*, Український математичний журнал **57** (2005), №5, 837–857.

Кафедра математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна

Адреса електронної пошти: mykola.lebid@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, Інститут математики НАН України, вул. Пирогова, 9, Київ 01130, Україна

Адреса електронної пошти: torbin7@gmail.com, torbin@iam.uni-bonn.de

Надійшла 09/04/2012