ДИНАМИКА СРЕДНЕЙ МАССЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

УДК 519.21

С. А. МЕЛЬНИК

Аннотация. В работе получены условия, при которых средняя масса нетривиального решения задачи Коши для стохастического уравнения пористой среды становится бесконечно большой за конечное время.

Анотація. У роботі отримано умови, за яких середня маса нетривіального розв'язку задачі Коші для стохастичного рівняння пористого середовища стає нескінченно великою за скінчений проміжок часу.

Abstract. In this work conditions are specified at which average mass of non-trivial solution of Cauchy problem for the stochastic porous media equation becomes infinitely large for finite time.

1. Вступление

На стохастическом базисе $\left(\Omega, \mathbf{F}, \mathsf{P}, \{\mathbf{F}_t\}_{t\geq 0}\right)$ рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} du(t,x) = a\Delta u^\sigma(t,x)\,dt + bu^\beta(t,x)\,dt + cu^\gamma(t,x)\,dw(t), \\ t \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u(0,x) = u_0(x). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь: a, b, c, σ, β, γ — положительные числа, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, подчиненный фильтрации $\{\mathbf{F}_t\}_{t\geq 0}$, $u_0(x)$ — неотрицательная неслучайная функция.

Как детерминированные, так и стохастические уравнения пористой среды изучались многими авторами. Так V. Barbu, G. Da Prato, M. Röckner, F.-Y. Wang в серии работ изучили условия существования и единственности решений, а также предельное поведение решений в случае липшицевого коэффициента диффузии ([1] и другие работы указанных авторов). В детерминированном случае ($c = 0$) предельное поведение массы нетривиального решения уравнения пористой среды хорошо изучено. В работе [2] показано, что при $1 \leq \beta \leq \sigma + 2/n$ величина $\int_B u(t,x)\,dx$, называемая массой решения на множестве B, становится бесконечно большой за конечное время на некотором компакте B. При этом существенную роль играет условие $b > 0$, так как в этом случае уравнение (1) описывает процесс диффузии в среде, содержащей источник. Для стохастического уравнения ($c \neq 0$) в работе [3] доказано, что при $\sigma > 1$, $\beta = \gamma = 1$ справедлива оценка

$$\mathsf{E}\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx \leq \mathcal{K}e^{\mathcal{K}t}, \qquad \mathcal{K} = \text{const},$$

и, таким образом, средняя масса решения задачи (1) на всем $\mathbb{R}^n$ остается конечной в каждый конечный момент времени $t \geq 0$. В данной работе получены условия, при

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F10; Secondary 62F05.
Ключевые слова и фразы. Stochastic partial differential equation.
Исследования выполнены при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Российского фонда фундаментальных исследований. Грант Ф40.1/023.

которых средняя масса решения задачи (1), сосредоточенная на некоторой ограниченной части пространства $\mathbb{R}^n$, становится неограниченно большой за конечное время, то есть, существуют положительные числа T и R такие, что

$$\lim_{t\uparrow T} \mathsf{E} \int_{|x|\le R} u(t,x)\,dx = +\infty.$$

2. Обозначения и определения

В работе будем использовать следующие обозначения: E — символ математического ожидания по мере P; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{C} = \overset{\circ}{\mathbb{C}}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем; $\mathcal{V}$ — объём n-мерного шара радиуса 1; $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$. Символом $\mathcal{K}$ с индексами или без индексов будут обозначаться различные положительные константы, зависящие лишь от параметров n, a, b, c, σ, β, γ.

При определённых сочетаниях значений параметров решения задачи (1) могут существовать лишь на случайном интервале времени и развиваться в режиме обострения. Кроме того, решение, как функция пространственной переменной x, может пониматься в классическом или обобщённом смысле. Уточним в каком смысле мы будем понимать решение задачи (1). Следуя [4, с. 163] под фазовым пространством решения будем понимать одноточечную компактификацию пространства $\mathbb{R}^1$. Обозначим $\tau_N = \inf\{t \ge 0\colon \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(t,x)| \ge N\}$, $N \in \mathbb{N}$.

Определение. Случайный процесс $u(t,x)$ с непрерывными реализациями, согласованный с фильтрацией $\{\mathbf{F}_t\}_{t\ge 0}$, будем называть решением задачи (1), если он удовлетворяет таким требованиям.

1. Для любой неслучайной функции $g \in \mathbb{C}$ при всех $t \ge 0$ с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int u(t,x)g(x)\,dx - \int u_0(x)g(x)\,dx \\ &\quad= c\int_0^t \int u^\gamma(s,x)g(x)\,dx\,dw(s) - a\int_0^t \int \nabla u^\sigma(s,x)\cdot\nabla g(x)\,dx\,ds \\ &\qquad+ b\int_0^t \int u^\beta(s,x)g(x)\,dx\,ds. \end{aligned} \tag{2}$$

2. При всех $N \in \mathbb{N}$ и $R > 0$ выполнены неравенства:

$$\mathsf{E} \sup_{0\le t\le\tau_N} \int_{|x|<R} u^2(t,x)\,dx < +\infty, \qquad \mathsf{E}\int_0^{\tau_N} \int_{|x|<R} |\nabla u^\sigma(s,x)|^2\,dx\,ds < +\infty,$$
$$\mathsf{E}\int_0^{\tau_N} \int_{|x|<R} u^\beta(s,x)\,dx\,ds < +\infty, \qquad \mathsf{E}\int_0^{\tau_N} \int_{|x|<R} u^{2\gamma}(s,x)\,dx\,ds < +\infty.$$

Замечание. Согласно [5, Теорема 2] при $0 < \sigma \le \beta < \left(1 + \frac{2}{n}\right)\sigma + \frac{2}{n}$ и $\frac{1}{2}(\sigma+1) \le \gamma < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)(\sigma+1)$ решение задачи существует в смысле данного выше определения. Далее будем предполагать, что эти условия выполнены. Согласно [6] решение с вероятностью 1 неотрицательно при неотрицательном начальном условии. В данной работе будем рассматривать неотрицательные нетривиальные решения, то есть неотрицательные решения, которые строго положительны на некотором подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$, имеющем положительный объём. Таким образом, согласно классификации [7, гл. E, F] мы будем рассматривать стохастически сильные аналитически слабые решения.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$.
2. $0 < \int u_0(x)\,dx < +\infty$.
3. $(1-2/n)_+ < \sigma$, $\max\{1,\sigma\} < \beta < \sigma + 2/n$.

Тогда, существуют положительные числа T и R такие, что

$$\lim_{t\uparrow T} \mathsf{E} \int_{|x|\le R} u(t,x)\,dx = +\infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$.
2. $\mathcal{K}_0 < \int u_0(x)dx < +\infty$, *где* $\mathcal{K}_0$ *определяется равенством (13).*
3. $\beta = \sigma + \frac{2}{n}$, $\sigma > 0$.

Тогда, существуют положительные числа T и R такие, что

$$\lim_{t\uparrow T} \mathsf{E} \int_{|x|\le R} u(t,x)\,dx = +\infty.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. $a > 0$, $c > 0$, $b = 0$.
2. $0 < \int u_0(x)\,dx < +\infty$.
3. $(1-2/n)_+ < \sigma$, $\max\{1,\sigma\} < \gamma < \sigma + 2/n$.

Тогда, существуют положительные числа T и R такие, что при любом $m > 1$

$$\lim_{t\uparrow T} \mathsf{E} \int_{|x|\le R} u^m(t,x)\,dx = +\infty.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. $a > 0$, $c > 0$, $b = 0$.
2. $\mathcal{K}_0 < \int u_0(x)\,dx < +\infty$, *где* $\mathcal{K}_0$ *определяется равенством (13) в котором нужно β заменить на γ.*
3. $\gamma = \sigma + 2/n$, $\sigma > 0$.

Тогда, существуют положительные числа T и R такие, что при любом $m > 1$

$$\lim_{t\uparrow T} \mathsf{E} \int_{|x|\le R} u^m(t,x)dx = +\infty.$$

4. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть $0 < \sigma < \beta$, $0 < \delta < R$, $\mathcal{L} = \int_{-1}^{1} \exp(-1/(1-y^2))\,dy$. Функция*

$$H(x,R) = \begin{cases} 1, & |x| \le R-\delta, \\ \frac{1}{\mathcal{L}} \int_{-1}^{\frac{2}{\delta}(R-|x|)-1} \exp\left(-\frac{1}{1-y^2}\right) dy, & R-\delta < |x| < R, \\ 0, & |x| \ge R \end{cases}$$

обладает следующими свойствами.

1. $0 \le H(x,R) \le 1$.
2. $H_{x_i}(x,R)\big|_{|x|=R} = 0$, $H_{x_i}(x,R)\big|_{|x|=R-\delta} = 0$, $i = 1,\dots,n$.
3. *Если $\delta = \varepsilon R$, $\varepsilon \in (0;1)$, то*

$$\int_{|x|\le R} \left(\frac{|\Delta H(x,R)|^\beta}{H^\sigma(x,R)}\right)^{\frac{1}{\beta-\sigma}} dx = \mathcal{H}(\varepsilon) R^{\frac{(n-2)\beta - n\sigma}{\beta-\sigma}},$$

где

$$\mathcal{H}(\varepsilon)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}8^{\frac{\beta}{\beta-\sigma}}}{\varepsilon^{\frac{\beta+\sigma}{\beta-\sigma}}}\int_{-1}^{1}(1-0.5\varepsilon(r+1))^{n-1}\left[\frac{|r|^{\frac{\beta}{\sigma}}e^{-\frac{\beta}{\sigma(1-r^2)}}}{(1-r^2)^{\frac{2\beta}{\sigma}}\int_{-1}^{r}e^{-\frac{1}{1-y^2}}dy}\right]^{\frac{\sigma}{\beta-\sigma}}dr>\mathcal{H}(1)>0.$$

Доказательство. Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из определения функции $H(x,R)$. Докажем свойство 3. Из равенства

$$\Delta H(x,R)=\begin{cases}0, & |x|\notin(R-\delta;R),\\ -\frac{8}{\mathcal{L}\delta^2}\frac{\frac{2R}{\delta}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)-1}{\left[1-\left(\frac{2R}{\delta}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)-1\right)^2\right]^2}\exp\left(-\frac{1}{1-\left(\frac{2R}{\delta}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)-1\right)^2}\right), & |x|\in(R-\delta;R),\end{cases}$$

получаем после перехода к полярным координатам

$$\int_{|x|\le R}\left(\frac{|\Delta H(x,R)|^\beta}{H^\sigma(x,R)}\right)^{\frac{1}{\beta-\sigma}}dx$$
$$=\mathcal{K}\delta^{-\frac{\beta+\sigma}{\beta-\sigma}}R^{n-1}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{\delta}{2R}(r+1)\right)^{n-1}\left[\frac{|r|^{\frac{\beta}{\sigma}}e^{-\frac{\beta}{\sigma(1-r^2)}}}{(1-r^2)^{\frac{2\beta}{\sigma}}\int_{-1}^{r}e^{-\frac{1}{1-y^2}}dy}\right]^{\frac{\sigma}{\beta-\sigma}}dr.$$

Подынтегральная функция может иметь особенности лишь в точках $r=-1$ и $r=1$. Покажем, что в этих точках особенностей нет.

$$\lim_{r\downarrow-1}\frac{e^{-\frac{\beta}{\sigma(1-r^2)}}}{(1-r^2)^{\frac{2\beta}{\sigma}}\int_{-1}^{r}e^{-\frac{1}{1-y^2}}dy}=\lim_{z\to+\infty}\frac{z^{\frac{2\beta}{\sigma}}e^{-\frac{\beta}{\sigma}z}}{\int_{-1}^{-\sqrt{1-\frac{1}{z}}}e^{-\frac{1}{1-y^2}}dy}=0.$$

Таким образом, в точке $r=-1$ особенности нет.

Аналогично

$$\lim_{r\uparrow1}\frac{e^{-\frac{\beta}{\sigma(1-r^2)}}}{(1-r^2)^2}=0$$

и в точке $r=1$ также нет особенности.

Значит, интеграл конечен и при $\delta=\varepsilon R$, $\varepsilon\in(0;1)$ получаем свойство 3. Легко видно, что $\mathcal{H}(1)$ конечно и положительно. Лемма доказана. □

5. Доказательство теорем 1–4

5.1. **Доказательство теоремы 1.** Обозначим

$$J(t,R)=\mathsf{E}\int u(t,x)H(x,R)\,dx,\qquad I(t,R)=\mathsf{E}\int u^\beta(t,x)H(x,R)\,dx.$$

Из равенства (2) получаем

$$\begin{gathered}J_t(t,R)=a\,\mathsf{E}\int u^\sigma(t,x)\Delta H(x,R)dx+bI(t,R),\\ t\ge0,\ J(0,R)=\int u_0(x)H(x,R)dx.\end{gathered}\tag{3}$$

Оценим снизу первое слагаемое в правой части равенства (3) с помощью неравенства Гёльдера и свойства 3 из Леммы 1.

$$\mathsf{E}\int u^\sigma(t,x)\Delta H(x,R)\,dx\ge-\mathcal{H}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta}}(\varepsilon)R^{\frac{(n-2)\beta-n\sigma}{\beta}}I^{\frac{\sigma}{\beta}}(t,R).$$

Тогда, из равенства (3) следует неравенство

$$J_t(t,R)\ge I^{\frac{\sigma}{\beta}}(t,R)\left[-a\mathcal{H}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta}}(\varepsilon)R^{\frac{(n-2)\beta-n\sigma}{\beta}}+bI^{\frac{\beta-\sigma}{\beta}}(t,R)\right].\tag{4}$$

Из неравенства Гёльдера следует

$$J(t,R) \le \mathcal{V}^{\frac{\beta-1}{\beta}} R^{\frac{n(\beta-1)}{\beta}} I^{\frac{1}{\beta}}(t,R)$$

и

$$I(t,R) \ge \mathcal{V}^{1-\beta} R^{n(1-\beta)} J^{\beta}(t,R). \tag{5}$$

Тогда, неравенство (4) принимает вид

$$J_t(t,R) \ge R^{\frac{(n-2)\beta-n\sigma}{\beta}} I^{\frac{\sigma}{\beta}}(t,R) \left[-\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 R^{n\sigma+2-n\beta} J^{\beta-\sigma}(t,R)\right], \tag{6}$$

где

$$t \ge 0, \qquad \mathcal{K}_1 = a\mathcal{H}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta}}(\varepsilon) > 0, \qquad \mathcal{K}_2 = b\mathcal{V}^{\frac{(1-\beta)(\beta-\sigma)}{\beta}} > 0.$$

Покажем, что существует такое $R_0 > 0$, что при $R \ge R_0$ из неравенства (6) следует неравенство

$$J_t(t,R) \ge \mathcal{K}_3 R^{n(1-\beta)} J^{\beta}(t,R), \tag{7}$$

где $\mathcal{K}_3 = \frac{1}{2}\mathcal{K}_2 \mathcal{V}^{\frac{(1-\beta)\sigma}{\beta}} > 0$.

Так как $J(t,R)$ монотонно не убывает по R и по условию 3 Теоремы 1 справедливы неравенства $\beta > \sigma$ и $n\sigma + 2 - n\beta > 0$, то выражение $R^{n\sigma+2-n\beta} J^{\beta-\sigma}(t,R)$ неограниченно растёт при $R \to +\infty$. Выберем R_0 таким, чтобы выполнилось неравенство

$$-\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 R_0^{n\sigma+2-n\beta} J^{\beta-\sigma}(0,R_0) \ge 0.5\mathcal{K}_2 R_0^{n\sigma+2-n\beta} J^{\beta-\sigma}(0,R_0) > 0.$$

Такое R_0 найдётся согласно условию 2 Теоремы 1. Тогда, из неравенства (6) после применения (5) следует

$$J_t(0,R_0) \ge \mathcal{K}_3 R_0^{n(1-\beta)} J^{\beta}(0,R_0) > 0. \tag{8}$$

Так как $J(t,R)$ непрерывна по t, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$-\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 R_0^{n\sigma+2-n\beta} J^{\beta-\sigma}(t,R_0) \ge 0.5\mathcal{K}_2 R_0^{n\sigma+2-n\beta} J^{\beta-\sigma}(t,R_0) > 0 \tag{9}$$

при $t \in [0;\delta]$. Так как $J(t,R)$ не убывает по R, то неравенство (9) справедливо при $R \ge R_0$. В силу (6) и (5) отсюда следует справедливость неравенства

$$J_t(t,R) \ge \mathcal{K}_3 R^{n(1-\beta)} J^{\beta}(t,R), \tag{10}$$

при $t \in [0;\delta]$ и $R \ge R_0$. Из (10) вытекает, что $J(t,R_0)$ монотонно возрастает по $t \in [0;\delta]$ и $J(\delta,R_0) > J(0,R_0) > 0$. Подставив $t = \delta$ в (10) получаем

$$J_t(\delta,R_0) \ge \mathcal{K}_3 R_0^{n(1-\beta)} J^{\beta}(\delta,R_0) > 0.$$

Отметим, что в правой части этого неравенства стоит та же константа $\mathcal{K}_3$, что и в правой части неравенства (8). Тогда, существует $\delta_1 > 0$ такое, что (9), а следовательно и (10), выполнятся при при $t \in [0;\delta+\delta_1]$. Поскольку неравенства (6) и (7) инвариантны относительно сдвигов вдоль оси времени и $J(\delta,R_0) > J(0,R_0)$, то $\delta_1 \ge \delta$. Значит, справедливость неравенства (7) доказана при $t \in [0;2\delta]$. Повторяя приведенные рассуждения приходим к выводу, что при $R \ge R_0$ из неравенства (6) следует неравенство (7).

Разделив (7) на $J^{\beta}(t,R_0)$ и проинтегрировав по t, получаем

$$J(t,R_0) \ge \left(J^{1-\beta}(0,R_0) - (1-\beta)\mathcal{K}_3 R_0^{n(1-\beta)} t\right)_+^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \uparrow T} J(t,R_0) = +\infty,$$

где

$$T = \frac{R_0^{n(\beta-1)}}{(\beta-1)\mathcal{K}_3} J^{1-\beta}(0, R_0) < +\infty.$$

Теорема 1 доказана.

5.2. **Доказательство теоремы 2.** Для доказательства Теоремы 2 воспользуемся результатами, полученными при доказательстве теоремы 1. Ключевым неравенством в доказательстве теоремы 1 было неравенство (6). Так как, согласно условию 3 теоремы 2 $\beta = \sigma + \frac{2}{n}$, то неравенство (6) принимает вид

$$J_t(t, R) \geq R^{\frac{(n-2)\beta - n\sigma}{\beta}} I^{\frac{\sigma}{\beta}}(t, R) \left[-\mathcal{K}_1(\varepsilon) + \mathcal{K}_2 J^{\beta-\sigma}(t, R)\right], \qquad t \geq 0. \tag{11}$$

Напомним, что константа $\mathcal{K}_1$ зависит от ε так как выражается через $\mathcal{H}(\varepsilon)$.

Докажем, что если выполнено условие 2 Теоремы 2, то существуют $\varepsilon \in (0; 1)$, $\varepsilon' \in (0; 1)$ и $R_0 > 0$ такие, что для $R \geq R_0$ выполнится неравенство

$$-\mathcal{K}_1(\varepsilon) + \mathcal{K}_2 J^{\beta-\sigma}(0, R) \geq \varepsilon' \mathcal{K}_2 J^{\beta-\sigma}(0, R). \tag{12}$$

Неравенство (12) равносильно неравенству

$$J(0, R) \geq \left(\frac{\mathcal{K}_1(\varepsilon)}{(1-\varepsilon')\mathcal{K}_2}\right)^{\frac{1}{\beta-\sigma}}.$$

Функция $J^{\beta-\sigma}(0, R)$ монотонно неубывает по R и

$$\lim_{R\to+\infty} J(0, R) = \int u_0(x)\, dx \in (0; +\infty).$$

Кроме того, $\mathcal{K}_1(\varepsilon) > \mathcal{K}_1(1)$, $\frac{\mathcal{K}_1(\varepsilon)}{(1-\varepsilon')\mathcal{K}_2} > \frac{\mathcal{K}_1(1)}{\mathcal{K}_2} > 0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 1, \varepsilon'\to 0} \frac{\mathcal{K}_1(\varepsilon)}{(1-\varepsilon')\mathcal{K}_2} = \frac{\mathcal{K}_1(1)}{\mathcal{K}_2}.$$

Определим константу $\mathcal{K}_0$ равенством

$$\mathcal{K}_0 = \left(\frac{\mathcal{K}_1(1)}{\mathcal{K}_2}\right)^{\frac{1}{\beta-\sigma}}. \tag{13}$$

Согласно условию 2 Теоремы 2 $\int u_0(x)\, dx > \mathcal{K}_0$. Значит, существуют $\varepsilon \in (0; 1)$, $\varepsilon' \in (0; 1)$ и $R_0 > 0$ такие, что неравенство (12) выполнится для $R \geq R_0$. Тогда из (12) и (11) следует неравенство

$$J_t(0, R) \geq \varepsilon' \mathcal{K}_2 R_0^{\frac{(n-2)\beta - n\sigma}{\beta}} I^{\frac{\sigma}{\beta}}(0, R_0) J^{\beta-\sigma}(0, R_0) > 0$$

из которого с помощью (5) получаем

$$J_t(0, R_0) \geq \mathcal{K}_4 R_0^{n(1-\beta)} J^{\beta}(0, R_0),$$

где $\mathcal{K}_4$ — некоторая положительная константа. Это неравенство аналогично неравенству (8). Повторив рассуждения, приведенные в доказательстве Теоремы 1, начиная с неравенства (8), получим утверждение Теоремы 2. Теорема 2 доказана.

5.3. **Доказательство теорем 3 и 4.** В приведенных выше доказательствах теорем 1 и 2 существенную роль играло условие $b > 0$. Благодаря этому условию получались ключевые неравенства (6) и (7). В условиях теорем 3 и 4 $b = 0$. Покажем, что режим с обострением возникает и при выполнении условий теорем 3 и 4.

Докажем Теорему 3. Обозначим $\xi(t) = e^{-t/2+w(t)}$. Процесс $\xi(t)$ является решением стохастического уравнения

$$\xi(t) = 1 + \int_0^t \xi(s)\, dw(s).$$

Кроме того, $\mathsf{E}\,\xi(t) = 1$, $\mathsf{E}\,\xi^l(t) = e^{l(l-1)t/2}$, $l \geq 0$. Применив формулу Ито к процессу $u(t,x)H(x,R)\xi(t)$ и проинтегрировав, получаем

$$\begin{aligned}\int u(t,x)H(x,R)\,dx\xi(t) = \int u_0(x)H(x,R)\,dx + a\int_0^t \int u^\sigma(s,x)\Delta H(x,R)\,dx\xi(s)\,ds\\ + c\int_0^t \int u^\gamma(s,x)H(x,R)\,dx\xi(s)\,ds\\ + c\int_0^t \int u^\gamma(s,x)H(x,R)\,dx\xi(s)\,dw(s)\\ + \int_0^t \int u(s,x)H(x,R)\,dx\xi(s)\,dw(s).\end{aligned}$$

Согласно [4, Замечание 2.2, с. 163] стохастические интегралы в этом равенстве определены и их математические ожидания равны нулю. Значит, справедливо равенство

$$J_t(t,R) = a\,\mathsf{E}\left(\int u^\sigma(t,x)\Delta H(x,R)\,dx\xi(t)\right) + cI(t,R), \tag{14}$$

где $J(t,R) = \mathsf{E}\left(\int u(t,x)H(x,R)\,dx\xi(t)\right)$, $I(t,R) = \mathsf{E}\left(\int u^\gamma(t,x)H(x,R)\,dx\xi(t)\right)$.

Как и при доказательстве теоремы 1 с помощью леммы 1 получаем оценку

$$\mathsf{E}\left(\int u^\sigma(t,x)\Delta H(x,R)\,dx\xi(t)\right) \geq -\mathcal{H}^{\frac{\gamma-\sigma}{\gamma}}(\varepsilon)R^{\frac{(n-2)\gamma-n\sigma}{\gamma}}I^{\frac{\sigma}{\gamma}}(t,R).$$

Тогда, из (14) следует

$$J_t(t,R) \geq I^{\frac{\sigma}{\gamma}}(t,R)\left[-a\mathcal{H}^{\frac{\gamma-\sigma}{\gamma}}(\varepsilon)R^{\frac{(n-2)\gamma-n\sigma}{\gamma}} + cI^{\frac{\gamma-\sigma}{\gamma}}(t,R)\right], \tag{15}$$

которое совпадает с неравенством (4), если в (4) заменить β на γ и b на c. Поскольку, в теореме 3 на γ наложены такие же ограничения, как на β в теореме 1, то к неравенству (15) применимы те же рассуждения, которые были проведены в доказательстве теоремы 1, начиная с неравенства (4). Повторив эти рассуждения получаем неравенство

$$\mathsf{E}\left(\int u(t,x)H(x,R_0)\,dx\xi(t)\right) \geq \left(J^{1-\gamma}(0,R_0) - (\gamma-1)\mathcal{K}R_0^{n(1-\gamma)}t\right)_+^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\uparrow T}\mathsf{E}\left(\int u(t,x)H(x,R_0)\,dx\xi(t)\right) = +\infty, \tag{16}$$

где

$$T = \frac{R_0^{n(\gamma-1)}J^{1-\gamma}(0,R_0)}{\mathcal{K}(\gamma-1)} \in (0;+\infty).$$

Завершим доказательство теоремы 3. Пусть $m > 1$. Тогда, согласно неравенству Гёльдера при $t \in [0;T)$ справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\left(\int u(t,x)H(x,R_0)\,dx\xi(t)\right) \leq \mathcal{V}^{\frac{m-1}{m}} R_0^{\frac{n(m-1)}{m}} e^{\frac{1}{2(m-1)}T}\left(\mathsf{E}\int u^m(t,x)H(x,R_0)\,dx\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Как показано выше, левая часть этого неравенства неограниченно растет при $t \uparrow T$. Значит

$$\lim_{t\uparrow T}\mathsf{E}\int u^m(t,x)H(x,R_0)\,dx = +\infty, \qquad \forall m > 1.$$

Теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы 4 нужно к неравенству (15) применить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.

6. Выводы

В условиях теорем 1–4 на исходные данные задачи (1) наложены лишь те ограничения, которые требовались при доказательстве указанных теорем. Понятно, что в дополнение к этим ограничениям нужно требовать выполнение условий, обеспечивающих существование решения заданного типа, например, условий, указанных в Замечании. Легко видно, что условия доказанных выше теорем совместимы с условиями из замечания.

Теоремы 1 и 2 дают условия, при которых средняя масса решения взрывается за конечное время. Этот результат обеспечен тем, что уравнение (1) содержит детерминированный источник ($b > 0$). При отсутствии детерминированного источника доказать, что из равенства (16) следует неограниченный рост средней массы решения не удается. Теоремы 3 и 4 дают условия, при которых взрываются интегральные моменты решения порядка выше единицы. Например, при $m = 2$ мы получим среднюю энергию решения.

В заключение отметим, что требование $c > 0$ не является принципиальным и наложено лишь для сокращения записей. Если $c < 0$, то, представив $c = -|c|$ и заменив винеровский процесс $w(t)$ на новый винеровский процесс $\tilde{w}(t) = -w(t)$, получим уравнение (1) с положительным коэффициентом в стохастическом слагаемом. Таким образом, для теорем 3 и 4 существенным является требование $c \neq 0$.

Список литературы

1. V. Barbu, G. Da Prato, and M. Röckner, *Existens of strong solutions of stochastic porous media equations*, Annals Probability **37** (2009), 428–452.
2. X. Liu and M. Wang, *The critical exponent of doubly singular parabolic equations*, Journal of Math. Analysis and Applications **257** (2001), 170–188.
3. С. А. Мельник, *Динамика решений задачи Коши для стохастических уравнений со степенными нелинейностями*, Теорія ймовірностей і математична статистика **64** (2001), 110–117.
4. С. Ватанабэ, Н. Икэда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, “Наука”, Москва, 1986.
5. С. А. Мельник, *Існування розв'язків стохастичних рівнянь параболічного типу із степеневими нелінійностями*, Теорія ймовірностей і математична статистика **53** (1995), 103–108.
6. С. А. Мельник, *Принцип максимума для стохастических уравнений горения*, Деп. УКРИНТЭИ, 434-Ук 921 06.04.92, 1992, стр. 1–5.
7. C. Prevot and M. Röckner, *Coincise Course of SPDE*, “Springer-Verlag”, Berlin, 2007.

Отдел теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и механики НАНУ, ул. Розы Люксембург, 74, Донецк, 83114, Украина

Адрес электронной почты: melnik@iamm.ac.donetsk.ua

Поступила 13/12/2011