Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 87, 2012, стор. 176–184

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 87, 2012, pp. 176–184

НАБЛИЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ФУНКЦІОНАЛАМИ ВІД ПРИРОСТІВ ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

УДК 519.21

Г. М. ШЕВЧЕНКО І Т. О. ШАЛАЙКО

Анотація. Отримана оцінка знизу для точності наближення випадкових величин функціоналами від приростів дробового броунівського руху з індексом Хюрста $H > \frac{1}{2}$.

Abstract. A lower estimate is given for the accuracy of approximation of random variables by functionals of increments of fractional Brownian motion with Hurst index $H > \frac{1}{2}$.

Аннотация. Получена оценка снизу на точность приближения случайных величин функционалами от приращений дробного броуновского движения с индексом Хюрста $H > \frac{1}{2}$.

1. Вступ

Дробовим броунівським рухом (надалі ДБР) $B^H = \{B^H_t, t \geq 0\}$ з індексом Хюрста $H > \frac{1}{2}$ називається центрований гауссівський процес з функцією коваріації

$$R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

За такого обмеження на H ДБР B^H має властивість сильної залежності. Завдяки цій властивості ДБР є популярною моделлю довгої залежності у фінансовій математиці.

При наближенному розв'язуванні стохастичних диференціальних рівнянь (СДР), керованих ДБР, методами дискретизації часу (за допомогою схем Ейлера, Мільштейна тощо) природно постає питання про точність апроксимації функціоналів від розв'язку СДР, тобто функціоналів від дробового броунівського руху, функціями від його приростів. У роботах, присвячених наближеному розв'язанню СДР з ДБР (наприклад, [3, 6, 7]) доведено, що точний порядок апроксимації розв'язку рівняння за схемою Ейлера становить δ^{2H-1}, де δ — діаметр розбиття, у [3] одержано, що точний порядок апроксимації за схемою Мільштейна становить $|\log\delta|(\delta^H + \delta^{2H-1/2})$. Оскільки апроксимації за схемами Ейлера та Мільштейна в одновимірному випадку будуються за приростами ДБР, то вказані результати дають верхню оцінку для точності найкращого наближення розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь функціоналами від приростів ДБР. Метою даної роботи є встановлення оцінок знизу на точність апроксимації довільних випадкових величин такими функціоналами. Зрозуміло, що при цьому потрібно накладати умови достатньої невиродженості функціоналу. Аналогічна задача була розглянута А. Нойенкірхом [8] для функціоналу, який є значенням розв'язку $\{X_t, t \in [0,1]\}$ СДР $dX_t = a(X_t) + b(X_t)\,dB^H_t$ при $t = 1$ за певних обмежень на коефіцієнти СДР.

Теорема 1.1. *Якщо центрована і квадратично інтегровна $\sigma\{B^H_t, t \leq T\}$-вимірна випадкова величина ξ є такою, що похідна функції f_1 у її розкладі Іто–Вінера є обмеженою та ненульовою на множині додатної міри Лебега, то для будь-якого рівномірного розбиття відрізку $\pi = \{iT/n\}_{i=0}^n$ достатньо малого діаметра $\delta = T/n$*

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary:60G22; Secondary: 60G15,65C30.

Ключові слова і фрази. Дробовий броунівський рух, розклад Іто–Вінера, точність наближення.

та будь-якого функціоналу F від приростів ДБР на цьому розбитті має місце нерівність:

$$\mathsf{E}[(\xi - F)^2] \geq C\delta^{4H},$$

де $C = C(\xi)$ — додатна константа, що залежить від ξ.

2. Попередні відомості

Наведемо основні відомості про простір білого шуму для ДБР, детальніше див.[1]. Нехай $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — простір Шварца швидкоспадних функцій, а $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ — дуальний до нього. Розглянемо на просторі білого шуму $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})})$ міру P^H, $H \in (1/2, 1)$, задану співвідношенням

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} e^{i\langle \omega, f\rangle}\, d\,\mathsf{P}^H(\omega) = e^{-\|f\|_H^2/2}, \tag{1}$$

де $\|f\|_H^2 = H(2H-1)\iint_{\mathbb{R}^2} f(t)f(s)|t-s|^{2H-2}\,dt\,ds$. Така міра існує в силу теореми Мінлоса-Сазонова. На цьому просторі визначимо дробовий броунівський рух $B^H = \left\{B_t^H, t \in [0,T]\right\}$, як $B_t^H = \langle \omega, \mathbb{I}_{[0,t]}(\cdot)\rangle$. Тут і надалі вважаємо, що $H > \frac{1}{2}$. Можна вивести, що B^H — центрований гауссівський процес з функцією коваріації:

$$R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Через $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ позначимо фільтрацію породжену ДБР B^H, тобто $\mathcal{F}_t = \sigma\left\{B_s^H, s \leq t\right\}$. Для спрощення запису позначимо $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Поповнення $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ за нормою $\|\cdot\|_H$ позначимо через $L_H^2(\mathbb{R})$. Зазначимо, що цей простір містить як звичайні функції, так і узагальнені. Оскільки $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ є, очевидно, сепарабельним за нормою $\|\cdot\|_H$, то таким є і простір $L_H^2(\mathbb{R})$; нехай $\{e_n, n \geq 1\}$ — ортонормована база цього простору.

Визначимо n-ий поліном Ерміта

$$h_n(x) := (-1)^n \cdot e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right).$$

Нехай I позначає множину скінченних мультиіндексів, тобто послідовностей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, у яких лише скінченна кількість елементів відмінна від нуля. Для $\alpha \in I$ позначимо

$$\mathcal{K}_\alpha(\omega) := h_{\alpha_1}(\langle \omega, e_1\rangle)h_{\alpha_2}(\langle \omega, e_2\rangle)\dots.$$

Означення 2.1. Простором Хіда основних функцій $(\mathcal{S})_H$ називається множина всіх $\psi(\omega) = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \mathcal{K}_\alpha(\omega) \in L^2(\mathsf{P}^H)$, таких, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ є скінченною норма

$$\|\psi\|_{H,k}^2 := \sum_{\alpha\in I} \alpha!\, a_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{k\alpha},$$

де для $\gamma \in I$ $\gamma! = \prod_{j=1}^\infty \gamma_j!$, $(2\mathbb{N})^\gamma = \prod_{j=1}^\infty (2j)^{\gamma_j}$.

На просторі $(\mathcal{S})_H$ чином можна ввести добуток Віка елементів

$$\phi(\omega) = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \mathcal{K}_\alpha(\omega)$$

та $\psi(\omega) = \sum_{\beta\in I} b_\beta \mathcal{K}_\beta(\omega)$ з $(\mathcal{S})_H$:

$$(\phi \diamond \psi)(\omega) = \sum_{\alpha,\beta\in I} a_\alpha b_\beta \mathcal{K}_{\alpha+\beta}(\omega).$$

Визначимо $\widehat{L}^2_H([0,T]^n)$ як симетричний тензорний добуток n просторів $L^2_H([0,T])$. Позначимо через $\mathcal{L}_n$ множину всіх функцій від n змінних наступного вигляду:

$$f(s_1,\ldots,s_n) = \sum_{1\le k_1,\ldots,k_n\le k} a_{k_1,\ldots,k_n} e_{k_1}(s_1)e_{k_2}(s_2)\cdots e_{k_n}(s_n).$$

Для такого елемента n-кратний інтеграл визначається так

$$\mathcal{I}_n(f) = \sum_{1\le k_1,\ldots,k_n\le k} a_{k_1,\ldots,k_n} \int_0^T e_{k_1}(s_1)\,dB^H_{s_1} \diamond \int_0^T e_{k_2}(s_2)\,dB^H_{s_2} \diamond \ldots \diamond \int_0^T e_{k_n}(s_n)\,dB^H_{s_n}.$$

Кожен елемент з $\widehat{L}^2_H([0,T]^n)$ — границя елементів $\mathcal{L}_n$, інтеграл $\mathcal{I}_n(f)$ для

$$f \in \widehat{L}^2_H([0,T]^n)$$

визначається як границя інтегралів від відповідних апроксимуючих функцій з $\mathcal{L}_n$ за допомогою наступною ізометрії:

$$\mathsf{E}\,|I_n(f)|^2 = n!\,\|f\|^2_H.$$

Більше того, кратні інтеграли різних порядків є ортогональними один до іншого: $\mathsf{E}[\mathcal{I}_n(f)\mathcal{I}_m(g)] = n!\,\langle f,g\rangle_H \mathbb{I}(n=m)$. Ця властивість дозволяє розкладати випадкові величини за ортогональними кратними інтегралами.

Теорема 2.1 (Розклад Іто–Вінера)**.** *Нехай $F \in L^2(\mathsf{P}^H)$. Існують такі*

$$f_n \in \widehat{L}^2_H([0,T]^n), \qquad n \ge 0,$$

що

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n(f_n), \tag{2}$$

де $\mathcal{I}_0(f_0) := \mathsf{E}[F]$.

3. Основні результати

Нехай $\xi \in L^2(\mathsf{P}^H)$. Нас цікавить питання: наскільки "добре" ξ може бути наближена приростами ДБР, особливо нас цікавитиме нижня границя для точності наближення. А саме, для даного розбиття $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ позначимо $\Delta_\pi B^H_k = B^H_{t_k} - B^H_{t_{k-1}}$ і розглядатимемо наближення ξ функціоналами вигляду

$$F = F(\Delta_\pi B^H_1, \Delta_\pi B^H_2, \ldots, \Delta_\pi B^H_n).$$

Зрозуміло, що без порушення загальності можна вважати, що $\mathsf{E}\,\xi = 0$ та $T = 1$ (для полегшення запису викладок). Для того, щоб отримати нижню межу точності наближення ξ стохастичними інтегралами, достатньо розглянути наближення стохастичного інтегралу від невипадкової функції лінійними комбінаціями приростів

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta_\pi B^H_k.$$

А саме, має місце наступне твердження.

Лема 3.1. *Нехай $\xi \in L^2(\mathsf{P}^H)$ має розклад Іто–Вінера*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n(f_n),$$

а $G = G(\Delta_\pi B_1^H, \dots, \Delta_\pi B_n^H)$ *— довільний функціонал від приростів. Тоді знайдуться такі* $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$*, що*

$$\operatorname{Var}(\xi - G) \geq \operatorname{Var}\left(\mathcal{I}_1(f_1) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta_\pi B_k^H\right).$$

Доведення. Нехай

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n(g_n)$$

— розклад Іто–Вінера величини G. Члени розкладу Іто–Вінера є ортогональними і має місце:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\xi - G) &= \sum_{n\geq 1} n! \,\|f_n - g_n\|^2_{\widehat{L}^2_H([0,T]^n)} \geq \|f_1 - g_1\|^2_{\widehat{L}^2_H([0,T])} \\ &= \operatorname{Var}(\mathcal{I}_1(f_1) - \mathcal{I}_1(g_1)).\end{aligned}$$

Доведемо тепер, що $\mathcal{I}_1(g_1)$ є лінійною комбінацією приростів. Зазначимо, що $\mathcal{I}_1(g_1)$ є ортогональною проекцією G на простір V_1 стохастичних інтегралів від невипадкових функцій. Нехай

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta_\pi B_k^H$$

— ортогональна проекція G на лінійну оболонку V приростів $\Delta_\pi B_k^H$, $k = 0, \dots, n-1$, яка є підпростором V_1. За теоремою про три перпендикуляри, S є також ортогональною проекцією $I(g_1)$ на V. Тому різниця $I(g_1) - S$ ортогональна до V, тобто ортогональна до всіх приростів $\Delta_\pi B_k^H$, $k = 0, \dots, n-1$. Оскільки всі ці величини є гаусівськими, то різниця $I(g_1) - S$ не залежить від усіх приростів, зокрема, не залежить від G. Тоді, очевидно, $I(g_1) - S = 0$. $\square$

Нам також знадобиться наступна властивість ДБР, яку називають властивість асимптотично незалежних приростів.

Теорема 3.1. *Нехай* $H > 1/2$ *і* $B^H = \{B^H, t \in [0,T]\}$ *— ДБР з індексом Хюрста* H*. Тоді має місце наступна нерівність:*

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{j=1}^{n} u_j \Delta_\pi B_j^H\right] \geq C \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \operatorname{Var}\left[\Delta_\pi B_j^H\right],$$

де $u_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, *— довільні дійсні числа,* C *— деяка константа, що не залежить від* n *та* u_j, $j = 1, \dots, n$.

Доведення. Нагадаємо спочатку, що ДБР має стаціонарні прирости, а отже коваріаційна матриця приростів цього процесу є матрицею Тепліця. Далі, відомо, що спектральна щільність послідовності приростів ДБР відділена від нуля у випадку, коли індекс Хюрста $H > 1/2$ (див. [4]). Застосовуючи [5, твердження 5.2.b)], отримаємо необхідну нам нерівність. $\square$

Спочатку отримаємо оцінку згори для відстані між інтегралом $\int_0^1 f(s)\, dB_s^H$ та наступною "згладженою" інтегральною сумою

$$S_{\pi_\zeta}(f) := \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{\zeta} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s)\, ds \cdot \left(B^H_{t_{k+1}} - B^H_{t_k}\right),$$

що відповідає рівномірному розбиттю $\pi_\zeta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = 1\}$ діаметра $\zeta = 1/l$.

Лема 3.2. *Нехай $H > 1/2$ і $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — функція, модуль похідної якої обмежений згори числом $M > 0$. Тоді*

$$\mathsf{E}\left|\int_0^1 f(s)\,dB_s^H - S_{\pi_\zeta}(f)\right|^2 \le M^2\zeta^2. \tag{3}$$

Доведення. Ліва частина нерівності (3) завдяки властивості ізометрії між $L^2\big(\mathsf{P}^H\big)$ та L_H^2 інтеграла по ДБР рівна

$$H(2H-1)\cdot\frac{1}{\zeta^2}\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{l-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_j}^{t_{j+1}}|f(z)-f(t)| \\ \times|f(u)-f(v)|\cdot|u-z|^{2H-2}\,dv\,dt\,du\,dz.$$

Використовуючи умову леми на f: $|f(u)-f(v)| \le M|u-v|$, останній подвійний інтеграл оцінюється згори величиною

$$\zeta^2\cdot M^2\cdot H(2H-1)\int_0^1\int_0^1|s-t|^{2H-2}\,ds\,dt = M^2\zeta^2,$$

що і потрібно було довести. □

Далі розглядатимемо розбиття π_δ: $\{s'_k = k/n\}_{k=0}^n$ діаметра $\delta = 1/n$ і π_η — підрозбиття π_δ: $\{s_i = i/n^m\}_{i=0}^{n^m}$ діаметра $\eta = 1/n^m$, де n — достатньо велике, а m — деяке натуральне число, яке ми виберемо пізніше. У наступній лемі встановимо оцінку знизу на відстань між згладженими інтегральними сумами для розбиття та його підрозбиття.

Теорема 3.2. *Нехай функція $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ така, що для всіх $x\in[0,1]$: $|f'(x)|\le M$ і $\lambda\{x\colon f'(x)\ne 0\} > 0$. Тоді*

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i}^{i+n^{m-1}-1}\left(\frac{1}{\eta}\int_{s_k}^{s_{k+1}}f(s)\,ds - \frac{1}{\delta}\int_{s'_i}^{s'_{i+1}}f(t)\,dt\right)^2 \ge K\delta^{2-m}, \tag{4}$$

де стала K не залежить від n, m.

Доведення. Без порушення загальності можемо вважати, що $\lambda\{x : f'(x) > 0\} > 0$, а отже, існує таке $\varepsilon > 0$, що $\lambda\{x\colon f'(x) > \varepsilon\} > 0$. В силу теореми про середнє значення

$$\frac{1}{\eta}\int_{s_k}^{s_{k+1}}f(s)\,ds - \frac{1}{\delta}\int_{s'_i}^{s'_{i+1}}f(t)\,dt = \int_{[\theta^i,\theta_k^i]}f'(x)\,dx,$$

де $\theta^i\in[s'_i, s'_{i+1}]$, а $\theta_k^i\in[s_k, s_{k+1}]$. Далі, позначимо ліву частину (4) через S і покладемо $A := \{x\colon f'(x) > \varepsilon\}$. Для заданого $\alpha\in(0,1/4)$ за теоремою Лебега про щільність існує такий відрізок $[a,b]\subset[0,1]$, що $\lambda(A\cap[a,b]) > (b-a)(1-\alpha)$. Серед тих відрізків $[s'_i, s'_{i+1}]$, що містяться в $[a,b]$, не менше половини є такими, що:

$$\lambda(A\cap[s'_i, s'_{i+1}]) > \lambda([s'_i, s'_{i+1}])(1-2\alpha). \tag{5}$$

Дійсно, нехай k_1 — кількість тих відрізків, де має місце нерівність (5), а k_2 — кількість відрізків, де нерівність (5) порушується. Тоді

$$\lambda(A\cap[a,b]) \le k_1\delta + k_2\delta(1-2\alpha)$$

або

$$(b-a)(1-\alpha) \le k_1\delta + \left(\frac{b-a}{\delta} - k_1\right)\delta(1-2\alpha),$$

що рівносильно $(b-a)\alpha \le 2\alpha\delta k_1$, тобто $k_1 \ge (b-a)/(2\delta)$, що і було заявлено. Далі,

$$\begin{aligned} S &\ge \sum{}' \sum_{k=i}^{i+n^{m-1}-1} \left(\int_{[\theta^i, \theta^i_k]} f'(s)\, ds \right)^2 \\ &\ge \sum{}' \sum_{k=i}^{i+n^{m-1}} \frac{1}{2} \left(\int_{[\theta^i, \theta^i_k] \cap A} f'(x)\, dx \right)^2 - \left(\int_{[\theta^i, \theta^i_k] \cap A^c} f'(x)\, dx \right)^2, \end{aligned}$$

де сума $\sum'$ береться по тих $i = 0, \ldots, n-1$, для яких має місце (5). Окремо оцінимо

$$\sum_{k=i}^{i+n^{m-1}} \left(\int_{[\theta^i, \theta^i_k] \cap A} f'(x)\, dx \right)^2$$

та

$$\sum_{k=i}^{i+n^{m-1}} \left(\int_{[\theta^i, \theta^i_k] \cap A^c} f'(x)\, dx \right)^2.$$

Почнемо з першого, позначимо через $\kappa := \delta/\eta$ — кількість відрізків розбиття π_η у відрізку розбиття π_δ.

$$\sum_{k=i}^{i+n^{m-1}} \left(\int_{[\theta^i, \theta^i_k] \cap A} f'(x)\, dx \right)^2 \ge \sum_{k=i}^{i+\kappa-1} \varepsilon^2 \lambda^2([\theta^i, \theta^i_k] \cap A) \ge \varepsilon^2 \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{k=i}^{i+\kappa} \lambda([\theta^i, \theta^i_k] \cap A) \right)^2.$$

Нехай $\theta^i \in [s_m, s_{m+1}]$, тоді останній вираз не менший, ніж

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa} \left(\sum_{k=i}^{i+m-1} \lambda([s_{k+1}, s_m] \cap A) + \sum_{k=i+m}^{\kappa} \lambda([s_{m+1}, s_k] \cap A) \right)^2 \\ &\quad = \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{k=1}^{m-1} k\lambda([s_k, s_{k+1}] \cap A) + \sum_{k=m}^{\kappa-2} (\kappa - k + 1)\lambda([s_k, s_{k+1}] \cap A) \right)^2 \\ &\quad \ge C_1 \frac{1}{\kappa} (1-4\alpha)^2 \eta^2 \kappa^4, \end{aligned}$$

де остання нерівність була отримана з урахуванням того, що для не менш ніж половини відрізків $[s_k, s_{k+1}]$, при $k = i, \ldots, i+\kappa-1$ має місце нерівність:

$$\lambda([s_k, s_{k+1}] \cap A) \ge \lambda([s_k, s_{k+1}])(1-4\alpha).$$

Оскільки для $[s'_i, s'_{i+1}]$ виконано (5), то

$$\sum_{k=i}^{i+\kappa-1} \left(\int_{[\theta^i, \theta^i_k] \cap A^c} f'(x)\, dx \right)^2 \le M^2 4\alpha^2 \delta^2 \cdot \delta\eta^{-1}.$$

Остання нерівність була отримана з очевидних міркувань $f'(x) \le |f'(x)| \le M$, а інтеграл по $[\theta^i, \theta^i_k]$ від додатної функції не більший за відповідний інтеграл по відрізку $[s'_i, s'_{i+1}]$. Зрозуміло, що вибором α можна зробити так, щоб

$$C_1(1-4\alpha)^2 - M^2 4\alpha^2 > C_2 > 0,$$

тому

$$S > \frac{b-a}{2\delta} \delta^3 \eta^{-1} C_2 = C_3 \delta^2 \eta^{-1} = C_3 \delta^{2-m}.$$

Лему доведено. □

Тепер ми можемо довести основний результат.

Теорема 3.3. *Нехай випадкова величина $\xi \in L^2(\mathsf{P}^H)$. Якщо функція f_1 у її розкладі Іто–Вінера (2) є диференційовною та задовольняє наступні умови*

$$|f'(x)| \leq M, \qquad x \in [0,1],$$
$$\lambda\{x \in [0,1]\colon f'(x) \neq 0\} > 0,$$

то знайдеться така стала $C > 0$, що для довільного рівномірного розбиття $\pi = \pi_\delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ достатньо малого діаметра δ та будь-якого функціоналу F від приростів ДБР на цьому розбитті має місце нерівність

$$\mathsf{E}[(\xi - F)^2] \geq C\delta^{4H}.$$

Доведення. Для випадкової величини ξ запишемо її розклад Іто–Вінера:

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n(f_n). \tag{6}$$

За лемою 3.1, знайдуться такі $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, що

$$\mathrm{Var}(\xi - F) \geq \mathrm{Var}\left(\mathcal{I}_1(f_1) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta_\pi B_k^H\right).$$

Щоб не обтяжувати позначення покладемо $f = f_1$. Фактично, нам потрібно оцінити відхилення

$$\mathcal{I}_1(f) = \int_0^1 f(s)\, dB_s^H$$

від

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(B^H_{s'_{k+1}} - B^H_{s'_k}\right).$$

Для цього розіб'ємо кожен відрізок розбиття π_δ на δ/η відрізків довжини η. Далі,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\left(\int_0^1 f(s)\, dB_s^H - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(B^H_{s'_{k+1}} - B^H_{s'_k}\right)\right)^2\right] \\
&\quad = \mathsf{E}\left[\left(\int_0^1 f(s)\, dB_s^H - S_{\pi_\eta}(f) + S_{\pi_\eta}(f) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(B^H_{s'_{k+1}} - B^H_{s'_k}\right)\right)^2\right] \\
&\quad \geq \frac{1}{2}\,\mathsf{E}\left[\left(S_{\pi_\eta}(f) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(B^H_{s'_{k+1}} - B^H_{s'_k}\right)\right)^2\right] - \mathsf{E}\left[\left(\int_0^1 f(s)\, dB_s^H - S_{\pi_\eta}(f)\right)^2\right] \\
&\quad =: D_1 + D_2,
\end{aligned}$$

де

$$S_{\pi_\eta}(f) = \sum_{k=0}^{n^m-1} \frac{1}{\eta} \int_{s_k}^{s_{k+1}} f(u)\, du \left(B^H_{s_{k+1}} - B^H_{s_k}\right).$$

Спочатку оцінимо знизу вираз D_1, який можна записати як

$$D_1 = \mathsf{E}\left|\sum_{k=0}^{n^m-1} \frac{1}{\eta} \int_{s_k}^{s_{k+1}} f(s) ds \cdot \triangle B^H_{s_k} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \triangle B^H_{s'_k}\right|^2.$$

Помітимо, що в кожному інтервалі $[s'_k, s'_{k+1})$, $k = 0, \dots, n-1$, міститься n^{m-1} точок s_i, $i = k, \dots, k + n^{m-1} - 1$, тому

$$\Delta = \mathsf{E}\left|\sum_{k=0}^{n^m-1}\left(\frac{1}{\eta}\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(s)\,ds - a_{\left[\frac{k}{n^{m-1}}\right]}\right)\triangle B^H_{s_k}\right|^2.$$

Застосовуючи теорему 3.1, отримаємо, що

$$\Delta \geq C \cdot \eta^{2H} \cdot \sum_{k=0}^{n^m-1}\left(\frac{1}{\eta}\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(s)ds - a_{\left[\frac{k}{n^{m-1}}\right]}\right)^2$$
$$= C\delta^{2mH}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{k+n^{m-1}-1}\left(\frac{1}{\eta}\int_{s_i}^{s_{i+1}} f(s)\,ds - a_k\right)^2.$$

Мінімізуючи по a_k, $k = 0, \dots, n-1$, кожну суму

$$\sum_{i=k}^{k+n^{m-1}-1}\left(\frac{1}{\eta}\int_{s_i}^{s_{i+1}} f(s)\,ds - a_k\right)^2,$$

отримаємо, що остання подвійна сума не менша за її значення при

$$a_i = \frac{1}{n^{m-1}} \cdot \frac{1}{\eta}\sum_{k=i}^{i+n^{m-1}-1}\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(u)\,du = \frac{1}{\delta}\int_{s'_i}^{s'_{i+1}} f(u)\,du,$$

а саме:

$$D_1 \geq C\delta^{2mH}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{k+n^{m-1}-1}\left(\frac{1}{\eta}\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(s)\,ds - \frac{1}{\delta}\int_{s'_k}^{s'_{k+1}} f(t)\,dt\right)^2.$$

За теоремою 3.2, $D_1 \geq C_1\delta^{2mH-m+2}$, з іншого боку, за лемою 3.2, застосованою до розбиття π_η, $D_2 \leq -C_2\delta^{2m}$, тому

$$\mathsf{E}\left[\left(\int_0^1 f(s)dB^H_s - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(B^H_{s'_{k+1}} - B^H_{s'_k}\right)\right)^2\right] \geq C_1\delta^{2mH-m+2} - C_2\delta^{2m}.$$

Покладаючи $m = 2$ (це значення дає найкращу оцінку), отримаємо, що для достатньо малих δ останній вираз не менший $C_1\delta^{4H}$. Отже, маємо те, що було заявлено. □

Зауваження 3.1. При $H = 1/2$ апроксимація за методом Мільштейна має порядок точності $\delta^2 = \delta^{4H}$, тобто оцінка порядку у теоремі 3.3 для $H = 1/2$ є точною (проте ця теорема застосовна лише для $H > 1/2$). Точність оцінки теореми 3.3 для $H > 1/2$ є предметом подальших досліджень.

Приклад 3.1. Розглянемо рівняння Орнштейна–Уленбека з дробовим броунівським рухом:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(aX_s\,ds + b\,dB^H_s\right), \qquad t \in [0,1],$$

де X_0, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Добре відомо, що дане рівняння має розв'язок

$$X_t = X_0 e^{at} + b\int_0^t e^{a(t-s)}\,dB^H_s, \qquad t \in [0,1]. \tag{7}$$

Нехай $\xi = X_1$. Тоді (7) дає розклад Іто–Вінера для ξ, а саме:

$$f_0 = X_0 e^a, \qquad f_1(t) = be^{a(1-t)}, \qquad f_n = 0, \quad n \geq 2.$$

Неважко бачити, що похідна функції f_1 є обмеженою та не дорівнює нулю. Отже, ξ задовольняє припущення теореми 3.3.

4. Висновки

У роботі розглянуто питання наближення випадкових величин функціоналами від приростів дробового броунівського руху. Для випадкових величин певного класу (а саме, для тих, у розкладі Іто–Вінера яких функція f_1 не сталою) отримана оцінка знизу точності наближення.

Література

1. F. Biagini, Y. Hu, B. Oksendal, and T. Zhang, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer, Berlin, 2008.
2. J. M. C. Clark and R. J. Cameron, *The maximum rate of convergence of discrete approximations for stochastic differential equations*, Stochastic Differential Systems Filtering and Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 25, 1980, no. 1, pp. 162–171.
3. A. Deya, A. Neuenkirch, and S. Tindel, *A Milstein-type scheme without Lévy area terms for SDEs driven by fractional Brownian motion*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat. **48** (2012), no. 2, 518–550.
4. T. Dieker and M. Mandjes, *On spectral simulation of fractional Brownian motion*, Probab. Engrg. Inform. Sci. **17** (2003), no. 3, 417–434.
5. U. Grenander and G. Szego, *Toeplitz forms and their applications*, Chelsea publishing company, New York, 1984.
6. Yu. Mishura and G. Shevchenko, *The rate of convergence for Euler approximations of solutions of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion*, Stochastics **80** (2008), no. 5, 489–511.
7. I. Nourdin and A. Neuenkirch, *Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion*, J. Theoret. Probab. **20** (2007), no. 4, 871–899.
8. A. Neuenkirch, *Optimal pointwise approximation of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion*, Stochastic Process. Appl. **118** (2008), no. 12, 2294–2333.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичний факультет, Київський Національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичний факультет, Київський Національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: tarasenya@gmail.com

Надійшла 23/11/2011