Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 90, 2014, стор. 102–112

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 90, 2014, pp. 102–112

# АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ МАРТИНГАЛЬНОГО ТИПУ ВІД НЕСТІЙКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

УДК 519.21

Г. Л. КУЛІНІЧ, С. В. КУШНІРЕНКО І Ю. С. МІШУРА

Анотація. Розглядаються функціонали $\int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)$, $t \geq 0$. Функція $g$ — дійсна і локально інтегровна з квадратом, $\xi$ — єдиний сильний розв'язок стохастичного диференціального рівняння Іто $d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + dW(t)$, $a$ — вимірна, обмежена, дійсна функція і $|xa(x)| \leq C$. Досліджується поведінка при $t \to \infty$ вказаних функціоналів, знайдено відповідний нормуючий множник та явний вигляд граничної випадкової величини.

Abstract. We consider functionals $\int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)$, $t \geq 0$. Function $g$ is real and locally square integrable, $\xi$ is a unique strong solution of Itô stochastic differential equation $d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + dW(t)$, $a$ is measurable, bounded, real function and $|xa(x)| \leq C$. The behavior of these functionals is investigated as $t \to \infty$, the appropriate normalizing factor and the explicit form of the limit random variable are established.

Аннотация. Рассматриваются функционалы $\int_0^t g(\xi(s))\,dW(s)$, $t \geq 0$. Функция $g$ — действительная и локально интегрируемая с квадратом, $\xi$ — единственное сильное решение стохастического дифференциального уравнения Ито $d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + dW(t)$, $a$ — измеримая, ограниченная, действительная функция и $|xa(x)| \leq C$. Исследуется поведение при $t \to \infty$ указанных функционалов, найден соответствующий нормирующий множитель и явный вид предельной случайной величины.

## 1. Вступ

Нехай на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \mathsf{P})$ визначено одновимірний вінерівський процес $W(t)$ відносно зростаючого, повного за мірою $\mathsf{P}$ потоку $\sigma$-алгебр $\sigma(W(s), s \leq t)$, $t \geq 0$. Нехай функція $a\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ вимірна, обмежена і $|xa(x)| \leq C$ при всіх $x \in \mathbf{R}$. Відомо, що однорідне стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + dW(t), \qquad t \geq 0,\ \xi(0) = x_0 \tag{1}$$

має єдиний сильний розв'язок $\xi = \xi(t)$ і цей розв'язок є строго марківським процесом (див. [1], Теорема 4).

Припустимо, що коефіцієнт $a$ задовольняє додаткову умову:

$(A_1)$ існує стала $c_0$ така, що $2c_0 + 1 > 0$ і

$$\lim_{|x|\to\infty} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x va(v)\,dv - c_0 \right] = 0.$$

**Означення 1.1.** Розв'язок $\xi$ рівняння (1) називається нестійким, якщо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathsf{P}\{|\xi(s)| < N\}\,ds = 0$$

для довільної сталої $0 < N < \infty$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10, Secondary 60F17.

*Ключові слова і фрази.* Стохастичні диференціальні рівняння Іто, нестійкі розв'язки, асимптотична поведінка функціоналів мартингального типу.

**Означення 1.2.** Важаємо, що сім'я процесів $\{\zeta_T(t), t \geq 0\}$ слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\{\zeta(t), t \geq 0\}$, якщо для довільного $L > 0$ міри $\mu_T[0, L]$, які відповідають процесам $\zeta_T(\cdot)$ на відрізку $[0, L]$, слабко збігаються до міри $\mu[0, L]$, яка відповідає процесу $\zeta(\cdot)$ на відрізку $[0, L]$.

Відомо (див. [2]), що за умови $(A_1)$ розв'язок $\xi$ рівняння (1) нестійкий і процес $\frac{|\xi(tT)|}{\sqrt{T}}$ при $T \to \infty$ слабко збігається до процесу $r(t) \geq 0$, який є розв'язком рівняння Іто

$$r^2(t) = (2c_0 + 1)\, t + 2 \int_0^t r(s)\, d\widehat{W}(s). \tag{2}$$

*Зауваження* 1.1. Процес $r(t)$ є бесселівським дифузійним процесом (див. [3]) із індексом $2c_0 + 1$ і перехідною щільністю

$$\rho(t, x, y) = \frac{1}{t(xy)^{\nu-1}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right\} y^{2\nu-1} I_{\nu-1}\left(\frac{xy}{t}\right), \tag{3}$$

де $\nu = c_0 + \frac{1}{2}$, $I_\nu$ — модифікована бесселівська функція. Цей процес при $-1 < 2c_0 < 1$ з відбиттям у точці нуль, при $2c_0 \geq 1$ точка нуль для нього недосяжна.

У даній роботі розглядається асимптотична при $t \to \infty$ поведінка функціоналів вигляду $\beta(t) = \int_0^t g(\xi(s))\, dW(s)$, де $g$ — локально інтегровна з квадратом дійсна функція, $\xi$ — розв'язок рівняння (1). Ця стаття є продовженням досліджень роботи [4], у якій розглядалась поведінка при $t \to \infty$ функціоналу $\int_0^t g(\xi(s))\, ds$, де $g$ — локально інтегровна дійсна функція, $\xi$ — розв'язок рівняння (1). Було доведено, що при виконанні певних умов випадковий процес

$$\beta_T^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})} \int_0^{tT} g(\xi(s))\, ds,$$

де неспадна функція $\psi(r)$, $r \geq 0$ — регулярно змінна на нескінченності порядку $\alpha > 0$, слабко (у рівномірній топології простору неперервних функцій) збігається при $T \to \infty$ до процесу вигляду

$$\beta^{(1)}(t) = 2b\left[\frac{r^{\alpha+1}(t)}{\alpha + 1} - \int_0^t r^\alpha(s)\, d\widehat{W}(s)\right], \tag{4}$$

$r(t) \geq 0$ — бесселівський дифузійний процес, що є розв'язком рівняння (2).

Для функціоналів вигляду $\int_0^t g(\xi(s))\, dW(s)$, де $g$ — локально інтегровна з квадратом дійсна функція, $\xi$ — розв'язок рівняння вигляду (1), у якому $\left|\int_0^x a(v)\, dv\right| \leq C$ при всіх $x \in \mathbf{R}$ асимптотична поведінка при $t \to \infty$ досліджувалась в роботах [5]–[9].

У роботі [5] знайдено достатні умови, при яких розподіл функціоналу

$$\beta_T(1) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})}} \int_0^T g(\xi(s))\, dW(s)$$

збігається при $T \to \infty$ до розподілу функціоналу $\eta\sqrt{\beta^{(1)}(1)}$, де $\eta$ — нормально розподілена випадкова величина з параметрами $(0, 1)$, яка не залежить від $\beta^{(1)}(1)$,

$$\beta^{(1)}(t) = 2\left[\int_0^{\zeta(t)} |u|^\alpha \bar{b}(u)\, du - \int_0^t |\zeta(s)|^\alpha \bar{b}(\zeta(s))\, d\zeta(s)\right], \tag{5}$$

процес $\zeta(t)$ описує поведінку броунівської частинки у двошаровому середовищі, тобто $\zeta(t)$ є розв'язком рівняння

$$\zeta(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\zeta(s))\, d\widehat{W}(s),$$

$$\bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma_1, & x > 0, \\ \sigma_2, & x < 0, \end{cases} \qquad \bar{b}(x) = \begin{cases} b_1, & x > 0, \\ b_2, & x < 0, \end{cases}$$

$\alpha \geq 0$, $0 < \sigma_i < \infty$, $\int_0^t \mathsf{P}\{|\zeta(s)| = 0\}\, ds = 0$.

У роботі [10] було показано, що $\zeta(t)$ є однорідним марківським процесом з перехідною щільністю

$$\rho(t,x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_1^2 t}} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\, e^{-\frac{(y+x)^2}{2\sigma_1^2 t}}\right], & x \geq 0,\ y > 0, \\ \frac{2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\cdot\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(\sigma_1 y-\sigma_2 x)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2 t}}, & x \geq 0,\ y < 0, \\ \frac{2\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\cdot\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(\sigma_2 y-\sigma_1 x)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2 t}}, & x \leq 0,\ y > 0, \\ \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2 t}} - \frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\, e^{-\frac{(y+x)^2}{2\sigma_2^2 t}}\right], & x \leq 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Граничні розподіли вигляду (5) при $\zeta(t) = W(t)$ були вперше отримані в [11]. У роботі [6] отримано результати аналогічні результатам роботи [5] для функціоналів вигляду

$$\tilde{\beta}_T(t) = \int_0^t g_T(\xi_T(s))\, d\mu_T(s). \tag{6}$$

Тут $\mu_T(t)$ — сім'я інтегровних з квадратом мартингалів, для якої характеристика $\langle\mu_T\rangle(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} t$ при $T \to \infty$, а $\xi_T(t)$ — розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\xi_T(t) = a_T(\xi_T(t))\, dt + \sigma_T(\xi_T(t))\, d\mu_T(t).$$

У роботі [7] для функціоналів вигляду (6), у яких $\mu_T(t) = W_T(t)$ — сім'я вінерівських процесів, отримані необхідні і достатні умови слабкої збіжності при $T \to \infty$ до певних функціоналів від $\zeta(t)$.

Випадок функціоналу $\beta_T(1)$, у якому $\xi(t) = W(t)$, $\psi(\sqrt{T}) = 1$, а функція $g^2$ є інтегровною на всій осі, розглядався в [8]. У цій роботі аналітичним методом знайдено явний вигляд характеристичної функції граничного розподілу.

Поведінка функціоналів вигляду (6), де $\mu_T(t)$ — сім'я збіжних за ймовірністю, інтегровних з квадратом мартингалів, $\xi_T(t)$ — розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь, розглядалась у роботі ([9], §5, гл. IX) при локально рівномірній збіжності підінтегральної функції.

Дана стаття побудована таким чином. Наступний розділ містить основні результати про слабку збіжність розглянутих у вступі функціоналів. У розділі 3 доведено допоміжний результат, що використовується при доведенні Теореми 2.1.

## 2. Основні результати

Позначимо

$$f(x) = \exp\left\{-2\int_0^x a(v)\, dv\right\}. \tag{7}$$

**Теорема 2.1.** *Нехай $\xi$ — розв'язок рівняння* (1), *в якому коефіцієнт $a$ задовольняє умову $(A_1)$. Нехай також локально інтегровна з квадратом дійсна функція $g$ є непарною і існують функції $\psi_i(r)$, $r \geq 0$, $i = 1,2$ — неспадні, регулярно змінні на нескінченності порядку $\alpha_i > 0$, $i = 1,2$ відповідно і сталі $b$, $C$ такі, що виконуються умови:*

$$(A_2) \qquad \lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{f(x)}{\psi_1(|x|)}\int_0^x \frac{g^2(u)}{f(u)}\, du - b\,\mathrm{sign}\, x\right] = 0,$$

$(A_3)$
$$\left|\frac{f(x)}{\psi_2(|x|)}\int_0^x \frac{|g(u)|}{f(u)}\,du\right| \le C,$$

$(A_4)$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{\psi_2(\sqrt{T})}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} = 0.$$

*Тоді випадковий процес*

$$\beta_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}}\int_0^{tT} g(\xi(s))\,dW(s),$$

*де процеси* $\xi(t)$ *і* $W(t)$ *пов'язані через рівняння* (1), *слабко (у рівномірній топології простору неперервних функцій) збігається при* $T \to \infty$ *до процесу* $\beta(t) = W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$. *Тут* $W^*(t)$ *— вінерівський процес,* $\beta^{(1)}(t)$ *має вигляд* (4) *при* $\alpha = \alpha_1$, *де процеси* $r(t) \ge 0$ *і* $\widehat{W}(t)$ *пов'язані через рівняння* (2), $W^*(t)$ *і* $\beta^{(1)}(t)$ *— незалежні.*

*Доведення.* Зрозуміло, що з непарності функції $g$ випливає

$$\beta_T(t) = \frac{\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T})}}\int_0^t g(r_T(s)\sqrt{T})\,d\widehat{W}_T(s),$$

де

$$r_T(t) = \frac{|\xi(tT)|}{\sqrt{T}}, \qquad \widehat{W}_T(t) = \int_0^t \operatorname{sign}\xi(sT)\,dW_T(s), \qquad W_T(t) = \frac{W(tT)}{\sqrt{T}}.$$

Оскільки $\int_0^t \mathsf{P}\{|\xi(s)| = 0\}\,ds = 0$ при кожному $t > 0$ (див. [12], гл. 6, §3, Лема 5), то $\widehat{W}_T(t)$ при кожному $T > 0$ є неперервним з ймовірністю 1 мартингалом з характеристикою $\langle\widehat{W}_T\rangle(t) = t$. Тому, за теоремою Дуба (див. [13], гл. 1, §1, Теорема 1), $\widehat{W}_T(t)$ при кожному $T > 0$ є вінерівським процесом відносно $\sigma$ - алгебри $\sigma(W_T(s), s \le t)$.

Крім того, процес $\left(r_T(t), \widehat{W}_T(t)\right)$ задовольняє принципу А. В. Скорохода вибору збіжної підпослідовності ([14], §6, гл. I). Тому, не обмежуючи загальності, будемо враховувати (див. [4]), що для довільної підпослідовності мають місце збіжності $r_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} r(t)$, $\widehat{W}_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \widehat{W}(t)$ при $T_n \to \infty$ і кожному $t > 0$. В роботі [2] доведено, що при виконанні умови $(A_1)$ граничні процеси $\left(r(t), \widehat{W}(t)\right)$ задовольняють рівняння (2), при цьому для довільних $L > 0$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0}\varlimsup_{T_n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{|t_1-t_2|\le h;\, t_i\le L} |r_{T_n}(t_2) - r_{T_n}(t_1)| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{8}$$

Зрозуміло, що збіжність (8) має місце і для $\widehat{W}_{T_n}(t)$. Нехай $\tau_{T_n}(t)$ — найменший розв'язок рівняння $\beta^{(1)}_{T_n}(\tau_{T_n}(t)) = t$, де

$$\beta^{(1)}_{T_n}(t) = \frac{\sqrt{T_n}}{\psi_1(\sqrt{T_n})}\int_0^t g^2\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\,ds.$$

При цьому $\tau_{T_n}(t)$ є марківським моментом відносно $\sigma$-алгебри $\sigma\left(W_{T_n}(s), s \le t\right)$, $t \ge 0$. Очевидно, що

$$\beta^{(1)}_{T_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_n}\psi_1(\sqrt{T_n})}\int_0^{tT_n} g^2\left(\xi(s)\right)\,ds.$$

Згідно з Лемою 3.1 $\int_0^\infty g^2\left(\xi(s)\right)\,ds = \infty$ з ймовірністю 1. Тому при кожному $T_n$ процес $\beta^{(1)}_{T_n}(t)$ з ймовірністю 1 досягає відповідний рівень.

Отже, $\beta_{T_n}(\tau_{T_n}(t))$ — послідовність вінерівських процесів (див.[13], гл. 1, §4, Теорема 3), які позначимо $W^*_{T_n}(t)$. Тому $\beta_{T_n}(t) = W^*_{T_n}\left(\tau^{-1}_{T_n}(t)\right)$, де $\tau^{-1}_{T_n}(t) = \beta^{(1)}_{T_n}(t)$, тобто

$$\beta_{T_n}(t) = W^*_{T_n}\left(\beta^{(1)}_{T_n}(t)\right).$$

Із доведення Теореми 2.2 в [4] випливає, що при виконанні умови $(A_2)$ $\beta^{(1)}_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \beta^{(1)}(t)$ при $T_n \to \infty$, де $\beta^{(1)}(t)$ має вигляд (4) при $\alpha = \alpha_1$. Крім того, для процесу $\beta^{(1)}_{T_n}(t)$ має місце аналог збіжності (8).

Оскільки для довільних $N > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ має місце нерівність

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\left|W^*_{T_n}\left(\beta^{(1)}_{T_n}(t)\right) - W^*_{T_n}\left(\beta^{(1)}(t)\right)\right| > \varepsilon\right\} \\
&\quad\le \mathsf{P}\left\{\beta^{(1)}_{T_n}(t) > N\right\} + \mathsf{P}\left\{\beta^{(1)}(t) > N\right\} \\
&\qquad + \mathsf{P}\left\{\sup_{|t_1-t_2|\le\delta;\, t_i\le N} |W^*_{T_n}(t_2) - W^*_{T_n}(t_1)| > \varepsilon\right\} + \mathsf{P}\left\{\left|\beta^{(1)}_{T_n}(t) - \beta^{(1)}(t)\right| > \delta\right\}
\end{aligned}$$

і для вінерівського процесу $W^*_{T_n}(t)$ має місце аналог збіжності (8), то отримаємо збіжність

$$W^*_{T_n}\left(\beta^{(1)}_{T_n}(t)\right) - W^*_{T_n}\left(\beta^{(1)}(t)\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \tag{9}$$

для кожного $t > 0$ при $T_n \to \infty$.

Оскільки процеси $\beta^{(1)}_{T_n}(t)$ при кожному $T_n$ є вимірними відносно $\sigma$-алгебри $\sigma\big(\widehat{W}_{T_n}(s), s \le t\big)$, а процеси $\beta^{(1)}_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \beta^{(1)}(t)$ і $\widehat{W}_{T_n}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \widehat{W}(t)$ при $T_n \to \infty$, тому процес $\beta^{(1)}(t)$ вимірний відносно $\sigma$-алгебри $\sigma\big(\widehat{W}(s), s \le t\big)$.

Використовуючи властивості стохастичних інтегралів отримаємо

$$\begin{aligned}
\left|\mathsf{E}\, W^*_{T_n}(t)\widehat{W}_{T_n}(t)\right| &= \left|\mathsf{E}\,\beta_{T_n}(\tau_{T_n}(t))\,\widehat{W}_{T_n}(t)\right| \\
&= \left|\mathsf{E}\,\frac{\sqrt[4]{T_n}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T_n})}}\int_0^{\tau_{T_n}(t)} g\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\, d\widehat{W}_{T_n}(s)\widehat{W}_{T_n}(t)\right| \\
&= \frac{\sqrt[4]{T_n}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T_n})}}\left|\mathsf{E}\int_0^{\min(t,\tau_{T_n}(t))} g\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\, ds\right| \\
&\le \frac{\sqrt[4]{T_n}}{\sqrt{\psi_1(\sqrt{T_n})}}\,\mathsf{E}\int_0^t \left|g\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\right|\, ds \\
&= \frac{\psi_2(\sqrt{T_n})}{\sqrt{\sqrt{T_n}\psi_1(\sqrt{T_n})}}\cdot\frac{\sqrt{T_n}}{\psi_2(\sqrt{T_n})}\,\mathsf{E}\int_0^t \left|g\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\right|\, ds.
\end{aligned} \tag{10}$$

Покажемо, що при виконанні умов $(A_3)$, $(A_4)$ права частина попередньої нерівності прямує до нуля при $T_n \to \infty$. Для цього розглянемо функцію

$$F(x) = 2\int_0^x f(u)\left(\int_0^u \frac{|g(v)|}{f(v)}\, dv\right) du.$$

Ця функція має неперервну похідну $F'(x)$ і має майже скрізь (за мірою Лебега) локально інтегровну другу похідну $F''(x)$. Тому для процесу $F(\xi(t))$ можна застосувати формулу Іто ([15], §10, гл. II), згідно із якою отримаємо рівність

$$\mathsf{E}\,\frac{\sqrt{T_n}}{\psi_2(\sqrt{T_n})}\int_0^t \left|g\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\right|\, ds = \mathsf{E}\left[\frac{F(\xi(tT_n)) - F(x_0)}{\sqrt{T_n}\psi_2(\sqrt{T_n})}\right]. \tag{11}$$

Згідно з умовою $(A_3)$

$$|F(x)| \le C\psi_2(|x|)\cdot|x|$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$. Тому

$$\mathsf{E}\left|\frac{F(\xi(tT_n))}{\sqrt{T_n}\psi_2(\sqrt{T_n})}\right| \le C\,\mathsf{E}\,r_{T_n}(t)\frac{\psi_2(r_{T_n}(t)\sqrt{T_n})}{\psi_2(\sqrt{T_n})} \le C_1\,\mathsf{E}\,r_{T_n}^{\alpha_2+1}(t).$$

Оскільки у рівнянні (1) $|xa(x)| \le C$ і $\xi(0) = x_0$, то аналогічно до ([13], гл. 2, §6, Теорема 4) отримаємо $\mathsf{E}\,r_T^{\alpha_2+1}(t) \le C_2 + C_3 t^{\frac{\alpha_2+1}{2}}$ для певних сталих $C_2$, $C_3$. Тому з рівності (11) маємо

$$\mathsf{E}\,\frac{\sqrt{T_n}}{\psi_2(\sqrt{T_n})}\int_0^t \left|g\left(r_{T_n}(s)\sqrt{T_n}\right)\right|\,ds \le \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t^{\frac{\alpha_2+1}{2}},$$

а з умови $(A_4)$ і нерівності (10) отримаємо для кожного $t > 0$

$$\left|\mathsf{E}\,W_{T_n}^*(t)\widehat{W}_{T_n}(t)\right| \to 0$$

при $T_n \to \infty$.

Отже, $\left|\mathsf{E}\,W_{T_n}^*(t)\widehat{W}(t)\right| \to 0$ при $T_n \to \infty$.

Оскільки процеси $\widehat{W}(t)$ і $W_{T_n}^*(t)$ є вінерівськими і в границі некорельовані, то $W_{T_n}^*(t)$ при $T_n \to \infty$ не залежить від $\widehat{W}(t)$, а в силу того, що процес $\beta^{(1)}(t)$ повністю визначається процесом $\widehat{W}(t)$, то $\beta^{(1)}(t)$ при $T_n \to \infty$ не залежить від $W_{T_n}^*(t)$.

Із збіжності (9) випливає ([17], гл. IV, §11), що скінченновимірні розподіли процесу $W_{T_n}^*\bigl(\beta_{T_n}^{(1)}(t)\bigr)$ і відповідні скінченновимірні розподіли процесу $W_{T_n}^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$ у границі при $T_n \to \infty$ співпадають. Оскільки процеси $W_{T_n}^*(t)$ і $\beta^{(1)}(t)$ при $T_n \to \infty$ незалежні, а скінченновимірні розподіли процесу $W_{T_n}^*(t)$ не залежать від $T_n$, то скінченновимірні розподіли процесу $W_{T_n}^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$ при $T_n \to \infty$ збігаються до відповідних скінченновимірних розподілів процесу $W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де $W^*(t)$ — вінерівський процес, незалежний від процесу $\beta^{(1)}(t)$.

Отже, скінченновимірні розподіли процесу $\beta_{T_n}(t)$ збігаються при $T_n \to \infty$ до відповідних скінченновимірних розподілів процесу $W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$.

Для доведення слабкої збіжності скористаємось нерівністю

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{|t_1-t_2|\le h\\ t_i\le L}}|\beta_{T_n}(t_2)-\beta_{T_n}(t_1)|>\varepsilon\right\}\\
&\quad= \mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{|t_1-t_2|\le h\\ t_i\le L}}\left|W_{T_n}^*\left(\beta_{T_n}^{(1)}(t_2)\right)-W_{T_n}^*\left(\beta_{T_n}^{(1)}(t_1)\right)\right|>\varepsilon\right\}\\
&\quad\le \mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le L}\left|\beta_{T_n}^{(1)}(t)\right|>N\right\}\\
&\qquad+\mathsf{P}\left\{\left(\sup_{\substack{|t_1-t_2|\le h\\ t_i\le L}}\left|W_{T_n}^*\left(\beta_{T_n}^{(1)}(t_2)\right)-W_{T_n}^*\left(\beta_{T_n}^{(1)}(t_1)\right)\right|>\varepsilon\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\cap\left(\sup_{0\le t\le L}\left|\beta_{T_n}^{(1)}(t)\right|\le N\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq L}\left|\beta_{T_n}^{(1)}(t)\right|>N\right\}+\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{|t_1-t_2|\leq h\\ t_i\leq L}}\left|\beta_{T_n}^{(1)}(t_2)-\beta_{T_n}^{(1)}(t_1)\right|\geq\delta\right\}$$
$$+\mathsf{P}\left\{\left(\sup_{\substack{|t_1-t_2|\leq h\\ t_i\leq L}}\left|W_{T_n}^*\left(\beta_{T_n}^{(1)}(t_2)\right)-W_{T_n}^*\left(\beta_{T_n}^{(1)}(t_1)\right)\right|>\varepsilon\right)\right.$$
$$\left.\cap\left(\sup_{0\leq t\leq L}\left|\beta_{T_n}^{(1)}(t)\right|\leq N\right)\cap\left(\sup_{\substack{|t_1-t_2|\leq h\\ t_i\leq L}}\left|\beta_{T_n}^{(1)}(t_2)-\beta_{T_n}^{(1)}(t_1)\right|<\delta\right)\right\}$$
$$\leq \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq L}\left|\beta_{T_n}^{(1)}(t)\right|>N\right\}+\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{|t_1-t_2|\leq h\\ t_i\leq L}}\left|\beta_{T_n}^{(1)}(t_2)-\beta_{T_n}^{(1)}(t_1)\right|\geq\delta\right\}$$
$$+\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{|s_1-s_2|\leq\delta\\ s_i\leq N}}\left|W_{T_n}^*(s_2)-W_{T_n}^*(s_1)\right|>\varepsilon\right\}$$

при довільних $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $N>0$, $L>0$.

Із цієї нерівності і того, що для процесів $W_{T_n}^*(t)$ і $\beta_{T_n}^{(1)}(t)$ виконується співвідношення аналогічне (8), маємо, що і для процесу $\beta_{T_n}(t)$ має місце співвідношення аналогічне (8). Тому ([16], гл. IX, §2, Теорема 1) процес $\beta_{T_n}(t)$ слабко збігається при $T_n\to\infty$ до процесу $W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$. Із довільності підпослідовності $T_n\to\infty$ і єдиності розв'язку рівняння (2) випливає доведення теореми. □

**Приклад 2.1.** Розглянемо рівняння (1) з

$$a(x)=\frac{c_0x}{(1+x^2)}.$$

Нехай

$$g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[8]{1+x^2}}.$$

У даному випадку $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}$ і умови Теореми 2.1 виконуються при $\psi_1(r)=\sqrt{r}\ln r$, $\psi_2(r)=r^{\frac{3}{4}}$, $b=\frac{1}{2}$, $c_0=-\frac{1}{4}$.

Тому випадковий процес

$$\beta_T(t)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}}\int_0^{tT}g(\xi(s))\,dW(s)=\frac{1}{T^{\frac{3}{8}}\sqrt{\ln\sqrt{T}}}\int_0^{tT}\frac{\sin(\xi(s))}{\sqrt[8]{1+\xi^2(s)}}\,dW(s),$$

де процеси $\xi(t)$ і $W(t)$ пов'язані через рівняння (1), слабко збігається при $T\to\infty$ до процесу $\beta(t)=W^*\left(\beta^{(1)}(t)\right)$, де $W^*(t)$ — вінерівський процес,

$$\beta^{(1)}(t)=2b\left[\frac{r^{\alpha_1+1}(t)}{\alpha_1+1}-\int_0^t r^{\alpha_1}(s)\,d\widehat{W}(s)\right],$$

де $\alpha_1=\frac{1}{2}$, і процеси $r(t)\geq 0$ і $\widehat{W}(t)$ пов'язані через рівняння (2), $W^*(t)$ і $\beta^{(1)}(t)$ — незалежні. У розглядуваному випадку

$$\beta^{(1)}(t)=\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}(t)-\int_0^t\sqrt{r(s)}\,d\widehat{W}(s),\qquad r^2(t)=\frac{1}{2}t+2\int_0^t r(s)\,d\widehat{W}(s).$$

**Теорема 2.2.** *Нехай $\xi$ — розв'язок рівняння* (1), *в якому коефіцієнт $a$ задовольняє умову $(A_1)$; дійсна функція $g^2$ — локально інтегровна і така, що для певної сталої $b$ виконується умова*

$$\lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{f(x)}{|x|}\int_0^x \frac{g^2(u)}{f(u)}\,du - b\operatorname{sign}x\right] = 0,$$

*де $f(x)$ визначена в* (7). *Тоді випадковий процес*

$$\beta_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} g(\xi(s))\,dW(s)$$

*слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\beta(t) = \sqrt{b\,(2c_0+1)}W^*(t)$, де $W^*(t)$ — вінерівський процес.*

*Доведення.* Зрозуміло, що при кожному $t > 0$

$$\beta_T(t) = \int_0^t g(\xi(sT))\,dW_T(s)$$

з ймовірністю 1. Нехай $\tau_T(t)$ — найменший розв'язок рівняння $\beta_T^{(1)}(\tau_T(t)) = t$, де

$$\beta_T^{(1)}(t) = \int_0^t g^2\left(\xi(sT)\right)\,ds.$$

Аналогічними міркуваннями, як і при доведенні Теореми 2.1, отримаємо, що

$$\beta_T(t) = W_T^*\left(\beta_T^{(1)}(t)\right),$$

де $W_T^*(t)$ при кожному $T > 0$ є вінерівським процесом.

Функція $g^2$ задовольняє умовам Теореми 2.2 роботи [4] при $\alpha = 1$. Тому процес $\beta_T^{(1)}(t)$ при $T \to \infty$ слабко збігається до виродженого процесу $b\,(2c_0+1)t$. Із слабкої збіжності до виродженого процесу випливає збіжність за ймовірністю ([17], гл. III, §10.1). Отже,

$$\beta_T^{(1)}(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} b\,(2c_0+1)t$$

при $T \to \infty$ і аналогічно доведенню збіжності (9) маємо, що

$$W_T^*\left(\beta_T^{(1)}(t)\right) - W_T^*\left(b\,(2c_0+1)t\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

при $T \to \infty$. Оскільки $W_T^*(t)$ при кожному $T$ є вінерівським процесом, то маємо збіжність при $T \to \infty$ скінченновимірних розподілів процесу $\beta_T(t)$ до відповідних розподілів процесу $\sqrt{b\,(2c_0+1)}W^*(t)$.

Для остаточного доведення теореми досить, як і в Теоремі 2.1, впевнитися в справедливості співвідношення аналогічного (8) для $\beta_T(t)$. □

**Теорема 2.3.** *Нехай $\xi$ — розв'язок рівняння* (1), *і виконується умова $(A_1)$; нехай дійсна вимірна функція $g$ локально інтегровна і така, що існують сталі $q$ і $b$, для яких*

$$(A_5)\qquad \lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|}\int_0^x f(u)\left(\int_q^u \frac{g(v)}{f(v)}\,dv\right)du = 0;$$

$$(A_6)\qquad \lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{f(x)}{|x|}\int_0^x f(u)\left(\int_q^u \frac{g(v)}{f(v)}\,dv\right)^2 du - b\operatorname{sign}x\right] = 0,$$

*де $f(x)$ визначена в* (7). *Тоді випадковий процес*

$$\beta_T^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} g(\xi(s))\,ds$$

*слабко збігається при* $T \to \infty$ *до процесу* $2\sqrt{b\,(2c_0+1)}W^*(t)$*, де* $W^*(t)$ *— вінерівський процес.*

*Доведення.* Розглянемо функцію

$$F(x) = 2\int_0^x f(u)\int_q^u \frac{g(v)}{f(v)}\,dv\,du,$$

де $f(x)$ визначена в (7). Ця функція має неперервну похідну $F'(x)$ і має майже скрізь (за мірою Лебега) локально інтегровну другу похідну $F''(x)$. Тому для процесу $F(\xi(t))$ можна застосувати формулу Іто ([15], §10, гл. II), згідно із якою, враховуючи рівність

$$F'(x)a(x) + \frac{1}{2}F''(x) = g(x),$$

яка має місце майже скрізь (за мірою Лебега), отримаємо

$$\beta_T^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[F(\xi(tT)) - F(x_0)\right] - \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} F'(\xi(s))\,dW(s) \tag{12}$$

з ймовірністю 1 для всіх $t > 0$. Із умови $(A_5)$ випливає, що $|x|^{-1}F(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Крім того, враховуючи нерівність

$$\mathsf{E}\,\frac{|\xi(tT)|^2}{T} \le C_1 + C_2 t$$

(див. [4]) легко встановити, що

$$\frac{F(\xi(tT))}{\sqrt{T}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

при $T \to \infty$. Отже, з (12) випливає, що

$$\beta_T^{(1)}(t) + \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} F'(\xi(s))\,dW(s) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \tag{13}$$

при $T \to \infty$. Аналогічними міркуваннями, як і при доведенні Теореми 2.1, отримаємо, що

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} F'(\xi(s))\,dW(s) = \int_0^t F'(\xi(sT))\,dW_T(s) = W_T^*\left(\int_0^t \left[F'(\xi(sT))\right]^2\,ds\right),$$

де $W_T^*(t)$ — сімейство вінерівських процесів. Тому, враховуючи (13),

$$\beta_T^{(1)}(t) + W_T^*\left(\int_0^t \left[F'(\xi(sT))\right]^2\,ds\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

при $T \to \infty$ для кожного $t > 0$. Згідно з умовою $(A_6)$ для функції $[F'(x)]^2$ виконуються умови Теореми 2.2 роботи [4] при $\alpha = 1$. Тому процес

$$\beta_T^{(1)}(t) = \int_0^t \left[F'(\xi(sT))\right]^2\,ds$$

при $T \to \infty$ слабко збігається до виродженого процесу $4b\,(2c_0+1)t$. Далі завершення доведення теореми аналогічне завершенню доведення Теореми 2.2. □

**Приклад 2.2.** Розглянемо рівняння (1) з

$$a(x) = \frac{c_0 x}{1+x^2}.$$

Нехай $g(x) = \sin x$.

1) У випадку $c_0 = 1$ маємо $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ і умови Теореми 2.3 виконуються при $q = 0$, $b = \frac{1}{6}$.

Тому випадковий процес

$$\beta_T^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{tT} \sin(\xi(s))\, ds$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\beta(t) = \sqrt{2} W^*(t)$, де $W^*(t)$ — вінерівський процес.

2) Якщо $c_0 = 0$, то $f(x) = 1$ і умови Теореми 2.3 виконуються при $q = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Тому випадковий процес

$$\beta_T^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{tT} \sin(W(s))\, ds$$

слабко збігається при $T \to \infty$ до процесу $\beta(t) = \sqrt{2} W^*(t)$, де $W^*(t)$ — вінерівський процес.

## 3. Допоміжний результат

Доведемо лему, що використовується при доведенні Теореми 2.1.

**Лема 3.1.** *Нехай $\xi$ — розв'язок рівняння* (1)*, тоді для локально інтегровної з квадратом дійсної функції $g \not\equiv 0$*

$$\int_0^{\infty} g^2\left(\xi(s)\right)\, ds = \infty$$

*з ймовірністю 1.*

*Доведення.* Оскільки $g \not\equiv 0$, то не обмежуючи загальності, будемо вважати, що

$$\sup_{-1<x<0} g^2(x) > 0.$$

Позначимо $\sigma_1 = \min\{t\colon \xi(t) = 0\}$, $\tau_1 = \min\{t > \sigma_1 \colon \xi(t) = -1\}$, ..., $\sigma_n = \min\{t > \tau_{n-1} \colon \xi(t) = 0\}$, $\tau_n = \min\{t > \sigma_n \colon \xi(t) = -1\}$, ..., і

$$\zeta_n = \int_{\sigma_n}^{\tau_n} g^2\left(\xi(s)\right)\, ds.$$

Оскільки розв'язок рівняння (1) є строго марківським (див. [1]), то $\zeta_n$ — послідовність незалежних і однаково розподілених випадкових величин (див.[13], гл. 3, §15, Наслідок 1). Тому згідно з посиленим законом великих чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \to \mathsf{E}\, \zeta_1, \qquad n \to \infty$$

майже напевне.

Отже, $\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \to \infty$, $n \to \infty$, з ймовірністю 1, оскільки

$$\mathsf{E} \int_{\sigma_1}^{\tau_1} g^2\left(\xi(s)\right)\, ds > 0$$

(існування і невід'ємність математичного сподівання для $\zeta_1$ випливає із роботи [13], гл. 3, §15, Теорема 2).

Тому із нерівності

$$\int_0^{\infty} g^2\left(\xi(s)\right)\, ds \geq \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i$$

маємо, що

$$\int_0^{\infty} g^2\left(\xi(s)\right)\, ds = \infty$$

з ймовірністю 1. □

## Література


1. А. Ю. Веретенников, *О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений*, Теор. вероятн. и применен. **XXIV** (1979), № 2, 348–360.
2. Г. Л. Кулініч, Є. П. Каськун, *Про асимптотичну поведінку розвязків певного класу одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь Іто*, Теор. ймовір. та матем. статист. **56** (1997), 96–104.
3. T. Shiga and S. Watanabe, *Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb. **27** (1973), № 1, 37–46.
4. G. L. Kulinich, S. V. Kushnirenko, and Y. S. Mishura, *Asymptotic behavior of the integral functionals for unstable solutions of one-dimensional Itô stochastic differential equations*, Theory Probab. Math. Statist. **89** (2013), 93–105.
5. Г. Л. Кулинич, *Предельные распределения для функционалов интегрального типа от неустойчивых диффузионных процессов*, Теор. вероятн. и матем. статист. **11** (1974), 81–85.
6. Г. Л. Кулинич, *Предельные теоремы для одномерных стохастических дифференциальных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра*, Теор. вероятн. и матем. статист. **15** (1976), 99–114.
7. G. L. Kulinich, *On necessary and sufficient conditions for convergence of homogeneous additive functionals of diffusion processes*, Proceedings of the Second Ukrainian–Hungarian Conference: New Trends in Probability and Mathematical Statistics (M. Arato and M. Yadrenko, eds.), vol. 2, “TViMS”, Kyiv, 1995, pp. 381–390.
8. Н. И. Портенко, *Некоторые предельные теоремы для аддитивных функционалов от процессов с независимыми приращениями*, Теор. вероятн. и матем. статист. **4** (1971), 130–136.
9. Ж. Жакод, А. Н. Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов*, В 2-х томах, т. 2, “Наука: Физматлит”, Москва, 1994.
10. Г. Л. Кулинич, *О предельном поведении распределения решения стохастического диффузионного уравнения*, Теор. вероятн. и применен. **XII** (1967), № 3, 348–360.
11. А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, *Предельные теоремы для случайных блужданий*, “Наукова думка”, Киев, 1970.
12. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, “Наукова думка”, Киев, 1982.
13. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, “Наукова думка”, Киев, 1968.
14. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*, Издательство Киевского университета, Киев, 1961.
15. Н. В. Крылов, *Управляемые процессы диффузионного типа*, “Наука”, Москва, 1977.
16. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, “Наука”, Москва, 1965.
17. М. Лоэв, *Теория вероятностей*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.



01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра загальної математики

*Адреса електронної пошти*: zag_mat@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра загальної математики

*Адреса електронної пошти*: bksv@univ.kiev.ua

01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

*Адреса електронної пошти*: myus@univ.kiev.ua


Надійшла 14/03/2014