Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 90, 2014, стор. 64–76

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 90, 2014, pp. 64–76

НИЖНЯ МЕЖА МАТРИЦІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ СЕМІПАРАМЕТРИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ У МОДЕЛІ СУМІШІ

УДК 519.21

О. В. ДОРОНІН

Анотація. Обговорюється модель сумішей зі змінними концентраціями. Розглядається параметризація перших K із M компонентів суміші. Розвивається техніка семіпараметричного оцінювання за допомогою узагальнених оціночних рівнянь. Доводиться консистентність та асимптотична нормальність введених оцінок. Знаходиться нижня межа матриці розсіювання.

Abstract. Model of mixtures with varying concentrations is discussed. Parametrization of the first K of M components is considered. Semiparametric estimation technique based on generalized estimating equations method is considered. Consistency and asymptotic normality of introduced estimators is proved. Lower bound of dispersion matrix is found.

Аннотация. Обсуждается модель смесей с переменными концентрациями. Рассматривается параметризация первых K из M компонент смеси. Развивается техника семипараметрического оценивания с помощью метода обобщенных оценочных уравнений. Доказывается состоятельность и асимптотическая нормальность введенных оценок. Находится нижняя грань их матрицы рассеивания.

1. Вступ

У моделі суміші зі змінними концентраціями розглядається вибірка з N елементів $O_{1;N}, \dots, O_{N;N}$, $N \ge 1$. Кожен із цих елементів може належати одній із M різних популяцій (компонент суміші), справжній номер якої позначимо через $\operatorname{ind}(O_{j;N})$ (вважається невідомим). Для кожного елемента $O_{j;N}$ спостерігаємо певні характеристики $\xi_{j;N} := \xi(O_{j;N})$ із деякого простору $\mathfrak{X}$ із σ-скінченною мірою μ, визначеною на борельовій σ-алгебрі $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$.

Позначимо через $F_i(A) := \mathsf{P}[\xi(O_{j;N}) \in A \mid \operatorname{ind}(O_{j;N}) = i]$ розподіл $\xi(O_{j;N})$ за умови, що $O_{j;N}$ належить m-ому компоненту суміші, $i = 1, \dots, M$, $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$. Через $p^i_{j;N} := \mathsf{P}[\operatorname{ind}(O_{j;N})]$ позначимо ймовірність того, що $O_{j;N}$ належить i-му компоненту суміші (концентрацію i-го компонента). Припустимо надалі, що набір ймовірностей $(p^i_{j;N})_{j=1,\dots,N, i=1,\dots,M}$ є відомим. Тоді

$$\mathsf{P}[\xi_{j;N} \in A] = \sum_{i=1}^{M} p^i_{j;N} F_i(A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X}). \tag{1}$$

Розподіли перших K компонентів суміші відомі з точністю до деякого евклідового параметра $t \in \Theta \subset \mathbf{R}^d$. Істинне значення цього параметра позначимо через ϑ. Розподіли останніх $(M - K)$ компонентів вважаємо повністю невідомими. Задача полягає в тому, щоб якомога точніше оцінити ϑ.

У класичній моделі суміші концентрації $p^i_{j;N}$ є однаковими для всіх $j = 1, \dots, N$. Опис аналізу статистичних даних за допомогою такої моделі можна знайти у [15] та [19]. Деякі спеціальні класи моделей суміші розглядаються у [9], [10] та [12]. Різні

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62G05, 62G20, 62F12; Secondary 62P25, 62G30.
Ключові слова і фрази. Нижня межа, модель сумішей, узагальнені оціночні рівняння.

задачі моделі суміші зі змінними концентраціями обговорюються у [5], [6], [7], [8], [13], [17] та [18].

Дана робота може бути розглянута як узагальнення результатів з [14], де розглянуто випадок $K = 1$. У [14] показана консистентність моментних оцінок у даній моделі. Також там показана асимптотична нормальність оцінок методу оціночних рівнянь (Generalized Estimating Equations, GEE), визначених як розв'язок рівняння $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N a_{j;N}^1 g(\xi_{j;N};t) = \mathbb{O}_d$ відносно параметра $t \in \Theta$, де $a_{j;N}^1$ — мінімаксний набір вагових коефіцієнтів (див. (4)), $g(x;t)\colon \mathfrak{X}\times\Theta \to \mathbf{R}^d$ — вимірна функція. Явним чином визначається нижня межа матриці розсіяння для введених GEE-оцінок. Знаходиться функція $g^*(x;t)$, на якій вона досягається. А також розвивається техніка адаптивного оцінювання, за допомогою якої можливо наблизитись до вказаної нижньої межі (що виходить за рамки даної роботи).

Дана робота організована наступним чином. GEE-оцінки у випадку, коли параметричні моделі визначені для кількох компонент суміші, вводяться у розділі 2. Умови консистентності та асимптотичної нормальності введених оцінок отримані у розділі 3. Нижня межа для їх матриці розсіяння визначається у розділі 4. Доведення основних результатів розміщені в додатку.

2. Визначення GEE-оцінок невідомого параметра

Надалі для зручності нульовий вектор з простору $\mathbf{R}^d$ позначатимемо як $\mathbb{O}_d$. Для дійсної $m \times n$ матриці A будемо писати $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$.

Для деякого набору коефіцієнтів $\{a_{j;N}\}_{j=1,\dots,N}$, $\{b_{j;N}\}_{j=1,\dots,N}$ визначимо оператор осереднення $\langle\cdot\rangle_N$ та відповідні арифметичні операції як

$$\langle a_{\cdot;N}\rangle_N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N a_{j;N}, \qquad \langle a_{\cdot;N} + b_{\cdot;N}\rangle_N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N (a_{j;N} + b_{j;N}). \tag{2}$$

Для матриці $p_{\cdot;N} := (p_{j;N}^i)_{j=1,\dots,N, i=1,\dots,M} \in \mathbf{R}^{N\times M}$, побудованої з набору концентрацій, матриці Грамма (за умови, що вони існують) позначимо як

$$\Gamma_N := \frac{1}{N}(p_{\cdot;N})^T \cdot p_{\cdot;N}, \qquad \Gamma := \lim_{N\to\infty}\Gamma_N. \tag{3}$$

У [14] розглянута задача мінімізації максимальної дисперсії навантажених емпіричних розподілів $\hat{F}_N^i(A) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N a_{j;N}^i \mathbb{I}_{\{\xi_{j;N}\in A\}}$, що береться серед усіх можливих $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ та розподілів $F_i(A)$ за умови незсуненості. Отримані мінімаксні вагові коефіцієнти визначаються як

$$a_{\cdot;N}^i := p_{\cdot;N}\Gamma_N^+ e_i, \tag{4}$$

де Γ_N^+ позначає псевдо-обернену матрицю Мура-Пенроуза для матриці Γ_N, а $e_i := (\mathbb{I}_{\{k=i\}})_{k=1,\dots,M} \in \mathbf{R}^M$.

Навантажені моменти для вимірних функцій $g^i(x;t)\colon \mathfrak{X}\times\Theta\to\mathbf{R}^d$ позначимо

$$\hat{g}_N^i(t) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N a_{j;N}^i g^i(\xi_{j;N};t), \qquad i = 1,\dots,K. \tag{5}$$

Означення 2.1. Будемо казати, що випадкова послідовність ϕ_N зрештою співпадає з випадковою послідовністю ψ_N, якщо $\phi_N = \psi_N$ м.н. починаючи з деякого випадкового номера N.

Означення 2.2. GEE-оцінку $\hat{\vartheta}_N$ визначаємо як борельову функцію від вибірки $\xi_{1;N},\dots,\xi_{N;N}$ таку, що зрештою

$$\sum_{k=1}^K \hat{g}_N^k(\hat{\vartheta}_N) = \mathbb{O}_d. \tag{6}$$

Приклад 2.3. В [14] розглянуто приклад соціологічного опитування, результати якого можуть бути змодельовані за допомогою моделі суміші зі змінними концентраціями. Розглянемо подібну трьохкомпонентну суміш. Перші дві компоненти ($K = 2$) вважаємо гауссовими з різним середнім значенням m_1 і m_2 та спільною дисперсією σ^2. Істинне значення невідомого параметра позначимо як $\vartheta = (m_1, m_2, \sigma)^T$. Середні значення m_i легко оцінити через $\tilde{m}_{i;N} := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N a^i_{j;N}\xi_{j;N}$, $i = 1, 2$. Аналогічно до [14], можемо оцінити σ як $\tilde{\sigma}_{i;N} := \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N a^i_{j;N}(\xi_{j;N} - \tilde{m}_{i;N})^2}$, $i = 1, 2$, за умови, що вираз під знаком кореня невід'ємний. Проте σ також можливо оцінити як $\tilde{\sigma}_N := \sqrt{\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{1;N})^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{2;N})^2}$. Більш загально, можливо ввести в розгляд функції $g^i(x; t)\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $i = 1, 2$, і визначити GEE-оцінку $\hat{g}^1_N(t) + \hat{g}^2_N(t) = \mathbb{O}_3$. Описані оцінки $\tilde{\vartheta}^a_N := (\tilde{m}_{1;N}, \tilde{m}_{2;N}, \tilde{\sigma}_{1;N})^T$, $\tilde{\vartheta}^b_N := (\tilde{m}_{1;N}, \tilde{m}_{2;N}, \tilde{\sigma}_{2;N})^T$ та $\tilde{\vartheta}^c_N := (\tilde{m}_{1;N}, \tilde{m}_{2;N}, \tilde{\sigma}_N)^T$ можливо трактувати як GEE-оцінки з відповідними функціями

$$g^1_a(x;t) := \left(x - t_1, 0, (x - t_1)^2 - t_3^2\right)^T, \qquad g^2_a(x;t) := (0, x - t_2, 0)^T,$$
$$g^1_b(x;t) := (x - t_1, 0, 0)^T, \qquad g^2_b(x;t) := \left(0, x - t_2, (x - t_2)^2 - t_3^2\right)^T,$$
$$g^1_c(x;t) := \left(x - t_1, 0, (x - t_1)^2 - t_3^2\right)^T, \qquad g^2_c(x;t) := \left(0, x - t_2, (x - t_2)^2 - t_3^2\right)^T.$$

Для формулювання тверджень припустимо, що для деякого відкритого околу $\mathfrak{U} \subset \Theta$ істинного значення параметра ϑ, функції $g^1(x;t), \ldots, g^K(x;t)\colon \mathfrak{X} \times \Theta \to \mathbf{R}^d$ задовольняють наступні умови.

- **(b1)** $\int g^k(x;t) F_k(dx;t) = \mathbb{O}_d$, $t \in \mathfrak{U}$ (умова незсуненості), $k = 1, \ldots, K$.
- **(b2)** $g^1(x;t), \ldots, g^K(x;t)$ – диференційовними за t для майже всіх $x \pmod{\mu}$, $t \in \mathfrak{U}$.
- **(b3)** Існує $\delta > 0$, для якого $\int \sup_{t\in\mathfrak{U}} \left\| \frac{\partial}{\partial t} g^k(x;t) \right\|^{1+\delta} F_i(dx) < \infty$, $i = 1, \ldots, M$, $k = 1, \ldots, K$.
- **(b4)** $\int \left\| g^k(x;\vartheta) \right\|^2 F_i(dx) < \infty$, $i = 1, \ldots, M$, $k = 1, \ldots, K$.
- **(b5)** Існують скінченні матриці $V_k(t) := \int \left[\frac{\partial}{\partial t} g^k(x;t)\right] F_k(dx;t)$, $k = 1, \ldots, K$, $t \in \mathfrak{U}$.
- **(b6)** Матриця $V(\vartheta) := \sum_{k=1}^K V_k(\vartheta)$ є невиродженою.

3. Консистентність та асимптотична нормальність GEE-оцінок

Для виведення асимптотичних властивостей GEE-оцінок невідомого параметра ϑ вибірку $\xi_{1;N}, \ldots, \xi_{N;N}$ розглядатимемо як елемент серії вибірок

$$(\{\xi_{1;N}, \ldots, \xi_{N;N}\})_{N\geq 1}.$$

3.1. Консистентність GEE-оцінок.

Теорема 3.1 (Узагальнення теореми 1 з [14]). *Нехай $\hat{\vartheta}_N$ — GEE-оцінка, визначена в (6), і виконуються наступні умови.*

- (i) *Існує скінченна невироджена матриця Γ (див. (3)).*
- (ii) *Оціночні функції мають представлення $g^k(x;t) = h^k(x) - H^k(t)$, де $h^k\colon \mathfrak{X} \to \mathbf{R}^d$ — деякі вимірні функції, $H^k(t) := \int h^k(x) F_k(dx;t)$, $k = 1, \ldots, K$.*
- (iii) *$\int |h^k(x)|\, F_m(dx) < \infty$, $k = 1, \ldots, K$, $m = 1, \ldots, M$.*
- (iv) *Позначимо $H(t) := \sum_{k=1}^K H^k(t)$. Існує неперервна функція $H^{-1}\colon S \to \mathbf{R}^d$, де $\{H(t)\colon t \in \Theta\} \subseteq S \subseteq \mathbf{R}^d$. Для всіх $t \in \Theta$ виконується $H^{-1}(H(t)) = t$, і $H(\vartheta)$ є внутрішньою точкою S.*

Тоді оцінка $\hat{\vartheta}_N$ зрештою співпадає з $H^{-1}(\sum_{k=1}^K \hat{h}^k_N)$, причому $\hat{\vartheta}_N \to \vartheta$ за ймовірністю.

Доведення. За лемою 1 з [14], $\sum_{k=1}^{K} \hat{h}_N^k \to H(\vartheta)$, $N \to \infty$ за ймовірністю. За теоремою 1.10 з [16], $H^{-1}(\sum_{k=1}^{K} \hat{h}_N^k) \to H^{-1}(H(\vartheta)) = \vartheta$, $N \to \infty$ за ймовірністю. □

Приклад 3.2. Розглянемо модель суміші з прикладу 2.3. Введені оцінки $\tilde{\vartheta}_N^a$, $\tilde{\vartheta}_N^b$, $\tilde{\vartheta}_N^c$ можливо трактувати як моментні. Наприклад, для оцінки $\tilde{\vartheta}_N^c$ функції $h^i(x)$ виражаються як $h^1(x) := (x, 0, x^2)^T$ та $h^2(x) := (0, x, x^2)^T$. Тоді $H^1(t) = (t_1, 0, t_3^2 + t_1^2)^T$, $H^2(t) = (0, t_2, t_3^2 + t_2^2)^T$, а $H(t) = (t_1, t_2, 2t_3^2 + t_1^2 + t_2^2)^T$, де $t \in \Theta = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times (0, +\infty) \subset \mathbf{R}^3$. Відповідно, $H^{-1}(s) = (s_1, s_2, \sqrt{(s_3 - s_1^2 - s_2^2)/2})^T$, де $s \in S := \{s \in \mathbf{R}^3 \colon s_3 \geq s_1^2 + s_2^2\} \subset \mathbf{R}^3$.

3.2. **Асимптотична нормальність GEE-оцінок.** Припустимо, що функції розподілу $F_1, \ldots, F_M$ є абсолютно неперервними відносно міри μ.

Щільності розподілу кожної компоненти суміші позначимо через

$$
\begin{aligned}
f_k(\cdot; t) &:= \frac{dF_k(\cdot; t)}{d\mu(\cdot)}, \qquad f_k(\cdot) := f_k(\cdot, \vartheta), \qquad k = 1, \ldots, K; \\
f_k(\cdot) &:= \frac{dF_k(\cdot)}{d\mu(\cdot)}, \qquad k = K+1, \ldots, M.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Введемо наступні позначення:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{r,s} := \big(\alpha_{r,s}^{k,l}\big)_{k,l=1,\ldots,K} := \Big(\lim_{N\to\infty} \big\langle a_{\cdot;N}^k a_{\cdot;N}^l p_{\cdot;N}^r p_{\cdot;N}^s \big\rangle_N \Big)_{k,l=1,\ldots,K} \in \mathbf{R}^{K\times K}, \\
r, s = 1, \ldots, M;
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_m := \big(\beta_m^{k,l}\big)_{k,l=1,\ldots,K} := \Big(\lim_{N\to\infty} \big\langle a_{\cdot;N}^k a_{\cdot;N}^l p_{\cdot;N}^m \big\rangle_N \Big)_{k,l=1,\ldots,K} \in \mathbf{R}^{K\times K}, \\
m = 1, \ldots, M;
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
R(x; t) := \sum_{m=1}^{K} \beta_m f_m(x; t) + \sum_{m=K+1}^{M} \beta_m f_m(x); \qquad R(x) := R(x; \vartheta) \in \mathbf{R}^{K\times K}. \tag{10}
$$

Матрицю, складену з оціночних функцій, позначимо як

$$
G(x; t) := \begin{pmatrix} g^1(x; t)^T \\ \vdots \\ g^K(x; t)^T \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{K\times d}. \tag{11}
$$

Математичне сподівання $G(x; t)$ від r-го компонента суміші виражається як

$$
\begin{aligned}
\bar{G}^r(t) &:= \begin{cases} \int G(x; t) F_r(dx; t), & r = 1, \ldots, K, \\ \int G(x; t) F_r(dx), & r = K+1, \ldots, M, \end{cases} \\
\bar{G}^r &:= \bar{G}^r(\vartheta), \qquad r = 1, \ldots, M.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Лема 3.3. *Нехай $\hat{\vartheta}_N$ — GEE-оцінка, визначена* (6), *функції $g^1(x; t), \ldots, g^K(x; t)$ задовольняють умову* **(b4)**, *і виконується наступне.*

(i) Існують границі $\alpha_{r,s}$, β_m, визначені в (8) *і* (9), *$m, r, s = 1, \ldots, M$.*

(ii) Існує скінченна матриця

$$
Z(\vartheta) := \int G(x; \vartheta)^T R(x; \vartheta) G(x; \vartheta)\, \mu(dx) - \sum_{r,s=1}^{M} \bar{G}^r(\vartheta)^T \alpha_{r,s} \bar{G}^s(\vartheta). \tag{13}
$$

Тоді $N \cdot \mathrm{Var}\big[\sum_{k=1}^{K} \hat{g}_N^k(\vartheta)\big] \to Z(\vartheta)$.

Доведення. За лемою 1 з [14] $\hat{g}_N^k(\vartheta) \to \int g^k(x;\vartheta) F_k(dx)$ за ймовірністю, $k = 1, \dots, K$;

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_\vartheta\Bigg[\sum_{k,l=1}^K \hat{g}_N^k(\vartheta)\cdot\hat{g}_N^l(\vartheta)^T\Bigg] &= \mathsf{E}_\vartheta\Bigg[\sum_{k,l=1}^K \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^N a_{i;N}^k a_{j;N}^l g^k(\xi_{i;N};\vartheta) g^l(\xi_{j;N};\vartheta)^T\Bigg] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^K\sum_{i,j=1}^N a_{i;N}^k a_{j;N}^l\, \mathsf{E}_\vartheta\left[g^k(\xi_{i;N};\vartheta)\right]\mathsf{E}_\vartheta\left[g^l(\xi_{j;N};\vartheta)^T\right] \\
&\quad + \frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^K\sum_{j=1}^N a_{j;N}^k a_{j;N}^l\Big(\mathsf{E}_\vartheta\left[g^k(\xi_{j;N};\vartheta) g^l(\xi_{j;N};\vartheta)^T\right] \\
&\qquad\qquad - \mathsf{E}_\vartheta\left[g^k(\xi_{j;N};\vartheta)\right]\mathsf{E}_\vartheta\left[g^l(\xi_{j;N};\vartheta)^T\right]\Big) \\
&= \sum_{k,l=1}^K \int g^k(x;\vartheta)\,F_k(dx)\int g^l(x;\vartheta)^T\,F_l(dx) \\
&\quad + \frac{1}{N}\sum_{k,l=1}^K\sum_{m=1}^M \langle a_{\cdot;N}^k a_{\cdot;N}^l p_{\cdot;N}^m\rangle_N \int g^k(x;\vartheta) g^l(x;\vartheta)^T\,F_m(dx) \\
&\quad - \frac{1}{N}\sum_{k,l=1}^K\sum_{r,s=1}^M \langle a_{\cdot;N}^k a_{\cdot;N}^l p_{\cdot;N}^r p_{\cdot;N}^s\rangle_N \\
&\qquad\qquad \times \int g^k(x;\vartheta)\,F_r(dx)\int g^l(x;\vartheta)^T\,F_s(dx).
\end{aligned}$$

Зазначимо, що

$$\int G(x;\vartheta)^T R(x;\vartheta) G(x;\vartheta)\,\mu(dx) = \sum_{k,l=1}^K\sum_{m=1}^M \beta_m^{k,l}\int g^k(x;\vartheta) g^l(x;\vartheta)^T\,F_m(dx);$$

$$\sum_{r,s=1}^M \bar{G}^r(\vartheta)^T\alpha_{r,s}\bar{G}^s(\vartheta) = \sum_{k,l=1}^K\sum_{r,s=1}^M \alpha_{r,s}^{k,l}\int g^k(x;\vartheta)\,F_r(dx)\int g^l(x;\vartheta)^T\,F_s(dx). \qquad \square$$

Теорема 3.4. *Нехай $\hat{\vartheta}_N$ — GEE-оцінка, визначена* (6)*, виконуються умови* **(b1)**–**(b6)***, і справджується наступне.*

(i) *Існують граничні матриці $\alpha_{r,s}$, β_m, визначені в* (8) *і* (9)*, $m, r, s = 1, \dots, M$.*
(ii) *Існує скінченна матриця $Z(\vartheta)$ (див.* (13)*).*
(iii) *Оцінка $\hat{\vartheta}_N$ є консистентною.*

Тоді $\sqrt{N}\cdot(\hat{\vartheta}_N - \vartheta)$ збігається за розподілом до деякого випадкового вектора з розподілом $\mathcal{N}(\mathbb{O}_d, D(\vartheta))$, де $D(\vartheta) := V(\vartheta)^{-1}\cdot Z(\vartheta)\cdot V(\vartheta)^{-T}$ з $Z(\vartheta)$ визначеним в (13)*.*

Доведення. Зазначимо, що

$$\sum_{k=1}^K \hat{g}_N^k(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\left(\sum_{k=1}^K a_{j;N}^k\cdot g^k(\xi_{j;N};t)\right).$$

За центральною граничною теоремою (див. теорему 7.3.8 з [4]), $\sqrt{N}\sum_{k=1}^K \hat{g}_N^k(t) \xrightarrow{W_\vartheta} \mathcal{N}(\mathbb{O}_d, Z(t))$. Умова Ліндеберга у вказаній теоремі виконується за умовою (ii), а також лемою 3.3.

Решта доведення аналогічна до доведення класичної сендвіч-формули для GEE-оцінок, побудованих для незалежних однаково розподілених спостережень (див. теорему 5.14 та лему 5.3 з [16]). $\square$

Означення 3.5. Нехай послідовність оцінок ζ_N, $N \geq 1$ є асимптотично нормальною, тобто $\sqrt{N} \cdot \zeta_N$ збігається за розподілом до деякої випадкової величини з розподілом $\mathcal{N}(a, \Sigma)$. Величину Σ будемо назвати коефіцієнтом розсіяння, якщо ζ_N — випадкове число, і матрицею розсіяння, якщо ζ_N — випадковий вектор.

Приклад 3.6. Розглянемо модель суміші з прикладу 2.3. Припустимо, що всі три компоненти мають гауссовий розподіл ($\mathcal{N}(m_1, \sigma^2), \mathcal{N}(m_2, \sigma^2), \mathcal{N}(m_3, \sigma_3^2)$ відповідно). Оберемо справжні параметри компонентів як $m_1 = -3$, $m_2 = 2$, $\sigma = 2$, $m_3 = 0$, $\sigma_3 = 2$. Концентрації компонент візьмемо як $p^{\cdot}_{j;N} := \frac{1}{S_{j;N}}\big(u^1_{j;N}, u^2_{j;N}, 2u^3_{j;N}\big)^T$, де $u^i_{j;N}$ — незалежні рівномірно розподілені на $[0, 1]$ випадкові величини, $i = 1, 2, 3$, $S_{j;N} := u^1_{j;N} + u^2_{j;N} + 2u^3_{j;N}$, $j = 1, \dots, N$. Розглянемо запропоновані оцінки параметра $\vartheta = (m_1, m_2, \sigma)^T$, вважаючи третій компонент повністю невідомим. За теоремою 3.4 для введених оцінок $\tilde{\vartheta}^a_N$, $\tilde{\vartheta}^b_N$ та $\tilde{\vartheta}^c_N$ отримаємо відповідні матриці розсіяння $D_a(\vartheta)$, $D_b(\vartheta)$ та $D_c(\vartheta)$. Так, коефіцієнти розсіяння для даних оцінок виражаються як $d(\tilde{m}_{1;N}) = 281.204$, $d(\tilde{m}_{2;N}) = 244.921$, $d(\tilde{\sigma}_{1;N}) = 472.254$, $d(\tilde{\sigma}_{2;N}) = 406.491$, $d(\tilde{\sigma}_N) = 217.29$. Зазначимо, що $d(\tilde{\sigma}_N)$ вийшов приблизно у два рази меншим за $d(\tilde{\sigma}_{1;N})$ та $d(\tilde{\sigma}_{2;N})$. Тому застосування оціночної функції, що спирається на параметричні моделі обох компонент одразу, дозволяє суттєво зменшити коефіцієнт розсіяння оцінки для σ.

4. Знаходження нижньої межі матриці розсіяння введених оцінок

Знайдемо нижню межу матриць розсіювання GEE-оцінок, які можна отримати запропонованим методом. Для цього будуть корисні наступні позначення. Більш повне обгрунтування їх змісту можна знайти у додатку.

Визначимо вектор із щільностей компонентів $f_{\cdot}(x) := (f_1(x; \vartheta), \dots, f_K(x; \vartheta))^T$.

Нехай $h(\cdot) \in \mathbf{R}^K$ — деяка вимірна функція. Для зручності запису умов типу $\int h_k(x) f_k(x; \vartheta)\, \mu(dx) = 0$, $k = 1, \dots, K$ визначимо діагональну матрицю зі щільностей як

$$\mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x)) := \begin{pmatrix} f_1(x;\vartheta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2(x;\vartheta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_K(x;\vartheta) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{K \times K}.$$

Щоб врахувати такі умови, у деяких місцях знадобляться одиничні $K \times K$ матриці, у яких викреслено s-ий рядок, $s = 1, \dots, K$:

$$H_s := \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{(s-1)\times(s-1)} & \mathbb{O}_{1\times(s-1)} & \mathbb{O}_{(s-1)\times(K-s)} \\ \mathbb{O}_{(K-s)\times(s-1)} & \mathbb{O}_{1\times(K-s)} & \mathbb{I}_{(K-s)\times(K-s)} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(K-1)\times K}, \qquad s = 1, \dots, K;$$

$$H_s := \mathbb{I}_{K\times K} \in \mathbf{R}^{K\times K}, \qquad s = K+1, \dots, M;$$
$$\bar{\alpha}_{r,s} := H_r \cdot \alpha_{r,s} \cdot H_s^T, \qquad r, s = 1, \dots, M$$

($\alpha_{r,s}$ визначено в (8)).

Похідні від щільностей за параметром t позначимо як

$$f'_{\cdot}(x;t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x;t)}{\partial t^T}^T \\ \vdots \\ \frac{\partial f_K(x;t)}{\partial t^T}^T \end{pmatrix}; \qquad f'_{\cdot}(x) := f'_{\cdot}(x;\vartheta) \in \mathbf{R}^{K\times d}; \tag{14}$$

у припущенні, що вони існують.

Також стануть у нагоді позначення інтегралів від комбінацій функцій $R(x)^{-1}$, $f_k(x)$, $f'(x)$, $f_{\cdot}(x)$:

$$S^0 := \int f'_{\cdot}(x)^T [R(x)]^{-1} f'_{\cdot}(x)\, \mu(dx) \qquad \in \mathbf{R}^{d\times d}$$

($R(x)$ визначено в (10)),

$$S^1_m := \int f'_{\cdot}(x)^T [R(x)]^{-1} f_m(x)\, \mu(dx) \in \mathbf{R}^{d\times K}, \qquad m = 1,\dots,M;$$

$$S^2_{r,s} := \int [R(x)]^{-1} f_r(x) f_s(x)\, \mu(dx) \in \mathbf{R}^{K\times K}, \qquad r,s = 1,\dots,M;$$

$$Q^0 := \int \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x))[R(x)]^{-1}\,\mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x))\, \mu(dx) \in \mathbf{R}^{K\times K};$$

$$Q^1_m := \int \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x))[R(x)]^{-1} f_m(x)\, \mu(dx) \in \mathbf{R}^{K\times K}, \qquad m = 1,\dots,M;$$

$$Q^2 := \int f'_{\cdot}(x)^T [R(x)]^{-1}\,\mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x))\, \mu(dx) \in \mathbf{R}^{d\times K}.$$

Одну із складових формули для оптимальних оціночних функцій, матрицю $X \in \mathbf{R}^{(KM+d)\times(KM+d)}$, будемо будувати поблочно. Для цього стануть корисними наступні матриці:

$$E_m := (\overbrace{\mathbb{O}_{(K-1)\times(K-1)} \cdots \mathbb{O}_{(K-1)\times(K-1)} \underbrace{\mathbb{I}_{(K-1)\times(K-1)}}_{\text{m-те місце}} \mathbb{O}_{(K-1)\times(K-1)} \cdots \mathbb{O}_{(K-1)\times(K-1)}}^{K}$$

$$\overbrace{\mathbb{O}_{(K-1)\times K} \cdots \mathbb{O}_{(K-1)\times K}}^{M-K} \mathbb{O}_{(K-1)\times K} \mathbb{O}_{(K-1)\times d}) \in \mathbf{R}^{(K-1)\times(K\cdot M+d)}, \quad m = 1,\dots,K;$$

$$E_m := (\overbrace{\mathbb{O}_{K\times(K-1)} \cdots \mathbb{O}_{K\times(K-1)}}^{K} \overbrace{\mathbb{O}_{K\times K} \cdots \mathbb{O}_{K\times K} \underbrace{\mathbb{I}_{K\times K}}_{\text{m-те місце}} \mathbb{O}_{K\times K} \cdots \mathbb{O}_{K\times K}}^{M-K}$$

$$\mathbb{O}_{K\times K} \mathbb{O}_{K\times d}) \in \mathbf{R}^{K\times(K\cdot M+d)}, \quad m = K+1,\dots,M;$$

$$E_{M+1} := (\overbrace{\mathbb{O}_{K\times(K-1)} \cdots \mathbb{O}_{K\times(K-1)}}^{K} \overbrace{\mathbb{O}_{K\times K} \cdots \mathbb{O}_{K\times K}}^{M-K} \mathbb{I}_{K\times K} \mathbb{O}_{K\times d}) \in \mathbf{R}^{K\times(K\cdot M+d)};$$

$$E_{M+2} := (\overbrace{\mathbb{O}_{d\times(K-1)} \cdots \mathbb{O}_{d\times(K-1)}}^{K} \overbrace{\mathbb{O}_{d\times K} \cdots \mathbb{O}_{d\times K}}^{M-K} \mathbb{O}_{d\times K} \mathbb{I}_{d\times d}) \in \mathbf{R}^{d\times(K\cdot M+d)}.$$

Сама матриця $X \in \mathbf{R}^{(K\cdot M+d)\times(K\cdot M+d)}$ виражається як

$$\begin{aligned} X := &- \sum_{m=1}^{M} E_m^T E_m \\ &+ \sum_{m=1}^{M} E_m^T H_m \cdot \left((S^1_m)^T E_{M+2} + (Q^1_m)^T E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^{M} S^2_{m,r} H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} E_s \right) \\ &+ E_{M+1}^T \cdot \left((Q^2)^T E_{M+2} + Q^0 E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^{M} Q^1_r H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} E_s \right) \\ &+ E_{M+2}^T \cdot \left(S^0 E_{M+2} + Q^2 E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^{M} S^1_r H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} E_s \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Тоді матриця з оптимальних оціночних функцій виглядає як

$$\begin{aligned} G^*(x;\vartheta) = -[R(x)]^{-1} \cdot \Bigg(& f'_{\cdot}(x) E_{M+2} + \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x)) E_{M+1} \\ & + \sum_{r,s=1}^{M} f_r(x) H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} E_s \Bigg) \cdot X^{-1} E_{M+2}^T \in \mathbf{R}^{K\times d}. \end{aligned} \tag{16}$$

Нижня межа введених GEE-оцінок є матрицею розсіяння для $G^*(x;\vartheta)$ і має представлення

$$Z(G^*;\vartheta) = J_1 - J_2, \tag{17}$$

$$J_1 := \int G^*(x;\vartheta)^T R(x;\vartheta) G^*(x;\vartheta)\,\mu(dx) = E_{M+2} X^{-T} \cdot Q(M,T) \cdot X^{-1} E_{M+2}^T,$$

де

$$\begin{aligned}
Q(M,T) = E_{M+2}^T \cdot &\left(S^0 E_{M+2} + Q^2 E_{M+1} + \sum_{r_2,s_2=1}^{M} S^1_{r_2} H^T_{r_2} \bar{\alpha}_{r_2,s_2} E_{s_2} \right) \\
&+ E_{M+1}^T \cdot \left(\left(Q^2\right)^T E_{M+2} + Q^0 E_{M+1} + \sum_{r_2,s_2=1}^{M} Q^1_{r_2} H^T_{r_2} \bar{\alpha}_{r_2,s_2} E_{s_2} \right) \\
&+ \sum_{r_1,s_1=1}^{M} E^T_{s_1} \bar{\alpha}_{s_1,r_1} \\
&\qquad \times H_{r_1} \left(\left(S^1_{r_1}\right)^T E_{M+2} + \left(Q^1_{r_1}\right)^T E_{M+1} + \sum_{r_2,s_2=1}^{M} S^2_{r_1,r_2} H^T_{r_2} \bar{\alpha}_{r_2,s_2} E_{s_2} \right)
\end{aligned}$$

та $J_2 := \sum_{r,s=1}^M \bar{G}^{*;r}(\vartheta)^T \alpha_{r,s} \bar{G}^{*;s}(\vartheta)$.

Математичне сподівання $G(\bullet;\vartheta)$ від m-го компонента суміші виражається як

$$\bar{G}^{*;m}(\vartheta) = -\left((S^1_m)^T E_{M+2} + (Q^1_m)^T E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^{M} (S^2_{r,m})^T H^T_r \bar{\alpha}_{r,s} E_s \right) \cdot X^{-1} E^T_{M+2}.$$

Теорема 4.1. *Нехай матриці* $R(x)$ *(визначено в* (10)*) і* X *(визначено в* (15)*) — скінченні та невироджені для всіх* $x \in \mathfrak{X}$*. Припустимо, що існують неперервні похідні від щільностей по параметру* $t \in \Theta$*, визначені в* (14)*. Нехай функції* $g^1(x;t), \dots, g^K(x;t)$ *задовольняють умови* **(b1)**–**(b6)***, а GEE-оцінка, визначена в* (6)*, є консистентною.*

Тоді $Z(G;\vartheta) \ge Z(G^*;\vartheta)$ *(див. (13), і (17)) у сенсі, що матриця* $(Z(G;\vartheta) - Z(G^*;\vartheta))$ *— невід'ємно визначена.*

Доведення теореми див. у додатку.

Приклад 4.2. Розглянемо модель суміші з прикладу 3.6. Згідно (17), нижня межа для коефіцієнтів розсіяння наступна: $d(\hat{m}^1) = 57.24$, $d(\hat{m}^2) = 60.52$, $d(\hat{\sigma}) = 19.21$. Тобто, використовуючи добре підібрані оціночні функції, коефіцієнт розсіяння оцінок можливо зменшити у 4-12 разів у порівнянні з початковим значенням.

5. Висновок

Запропоновано техніку оціночних рівнянь для побудови оцінок параметрів у моделі скінченної суміші, де частина компонентів описується параметричними моделями. Для введених оцінок отримані умови консистентністі та асимптотичної нормальності. Знайдена нижня межа для їх матриці розсіяння та відповідна оцінка, на якій вона досягається. На жаль, ця межа досягається на оціночних функціях, які залежать від невідомих розподілів розглянутої моделі. Тому їх неможливо використати для безпосереднього оцінювання. Суттєвого зменшення дисперсії оцінок можна досягти, використовуючи адаптивну техніку оцінювання, аналогічну розглянутій у [14] для випадку $K = 1$. Перенесення даної техніки на випадок $K > 1$ є предметом окремої статті. Розроблена техніка оцінювання може бути застосована у соціологічних дослідженнях.

6. Додаток

6.1. **Доведення теореми 4.1.**

6.1.1. *Обмежуючі умови.* З умови незсуненості **(b1)** маємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{O}_d &= \frac{\partial}{\partial t_i}\int g^k(x;t)f_k(x;t)\,\mu(dx)\\ &= \int\left(\frac{\partial}{\partial t_i}g^k(x;t)\right)f_k(x;t)\,\mu(dx)+\int g^k(x;t)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}f_k(x;t)\right)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

Звідси $V_k(t) = -\int g^k(x;t)f_k'(x;t)^T\,\mu(dx)$.

Зазначимо, що без втрати загальності можна вважати, що $V(\vartheta) = \mathbb{I}_{d\times d}$. Дійсно, GEE-оцінка $\hat{\vartheta}_N$ не зміниться, якщо $g^k(x;t)$ замінити функціями $V(\vartheta)^{-1}g^k(x;t)$, $k = 1,\dots,K$. Отже, обмеження на функції $g^k(x;t)$, $k = 1,\dots,K$ можуть бути записані як

$$\begin{cases}\int g^k(x;\vartheta)f_k(x;\vartheta)\,\mu(dx) = \mathbb{O}_d, & k = 1,\dots,K;\\ -\sum_{k=1}^K\int g^k(x;\vartheta)\cdot f_k'(x;\vartheta)^T\,\mu(dx) = \mathbb{I}_{d\times d}.\end{cases} \tag{18}$$

6.1.2. *Задача мінімізації.* Для доведення теореми слід показати, що $\forall c\in\mathbf{R}^d$:

$$c^T\left(Z(G;\vartheta) - Z(G^*;\vartheta)\right)c \geq 0.$$

Іншими словами, для всіх $c\in\mathbf{R}^d$ потрібно мінімізувати $c^TZ(G;\vartheta)c$ за обмежень (18).

Позначимо $h(x) := G(x;\vartheta)\cdot c\in\mathbf{R}^K$; $i^k := H_k\int h(x)f_k(x)\,\mu(dx)$, $k = 1,\dots,M$. Зауважимо, що з умови незсуненості випливає, що $\left(\int h(x)f_k(x)\,\mu(dx)\right)_k = 0$, $k = 1,\dots,K$. Отже,

$$\int h(x)f_r(x)\,\mu(dx) = H_r^TH_r\cdot\int h(x)f_r(x)\,\mu(dx), \qquad r = 1,\dots,M.$$

З (13) маємо:

$$\begin{aligned}J(h;i) := c^TZ(\vartheta)c &= \int c^TG(x;\vartheta)^TR(x)G(x;\vartheta)c\,\mu(dx) - \sum_{r,s=1}^M c^T\bar{G}^r(\vartheta)\alpha_{r,s}\bar{G}^s(\vartheta)c\\ &= \int h(x)^TR(x)h(x)\,\mu(dx) - \sum_{r,s=1}^M i^{rT}\bar{\alpha}_{r,s}i^s.\end{aligned}$$

Задача мінімізації $J(h;i)$ за обмежень (18) набуває вигляду

$$\begin{cases}J(h;i) := \int h(x)^TR(x)h(x)\,\mu(dx) - \sum_{r,s=1}^M i^{rT}\bar{\alpha}_{r,s}i^s \to \min;\\ H_k\int h(x)f_k(x)\mu(dx) =: i^k, \qquad k = 1,\dots,M\\ \qquad\qquad (\in\mathbb{R}^{K-1}, k = 1,\dots,K; \in\mathbf{R}^K, k = K+1,\dots,M);\\ \int\mathrm{Diag}(f_\cdot(x))h(x)\,\mu(dx) = \mathbb{O}_K\in\mathbf{R}^K;\\ \int f_\cdot'(x)^Th(x)\,\mu(dx) = -c\in\mathbf{R}^d.\end{cases} \tag{19}$$

6.1.3. *Дослідження функціоналу Лагранжа.* Введемо змінні $\lambda\in\mathbf{R}^d$; $\gamma\in\mathbf{R}^K$; $\psi^m\in\mathbf{R}^{K-1}$, $m = 1,\dots,K$; $\psi^m\in\mathbf{R}^K$, $m = K+1,\dots,M$.

Функціонал Лагранжа, який відповідає задачі мінімізації (19), виражається як

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left(h(\cdot); i^1, \ldots, i^M\right) := & \int h(x)^T R(x) h(x)\, \mu(dx) - \sum_{r,s=1}^{M} i^{r\,T} \bar{\alpha}_{r,s} i^s \\ & - 2\left(c + \int f'_{\cdot}(x)^T h(x)\, \mu(dx)\right)^T \lambda \\ & - 2\left(\int \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x)) h(x)\, \mu(dx)\right)^T \gamma \\ & - 2\sum_{m=1}^{M}\left(H_m \int h(x) f_m(x)\, \mu(dx) - i^m\right)^T \psi^m.\end{aligned}$$

Знайдемо стаціонарну точку цього функціоналу. З рівняння $\delta\mathfrak{L}(\cdot) = 0$ маємо:

$$2R(x)h(x) - 2f'_{\cdot}(x)\lambda - 2\,\mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x))\gamma - 2\sum_{m=1}^{M} f_m(x) H_m^T \psi^m = \mathbb{O}_K.$$

Отже,

$$h(x) = [R(x)]^{-1}\left(f'_{\cdot}(x)\lambda + \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x))\gamma + \sum_{m=1}^{M} f_m(x) H_m^T \psi^m\right). \tag{20}$$

З рівняння $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial i^m} = 0$ маємо:

$$-2\sum_{r=1}^{M} \bar{\alpha}_{m,r} i^r + 2\psi^m = 0, \qquad m = 1, \ldots, M.$$

Отже,

$$\psi^m = \sum_{r=1}^{M} \bar{\alpha}_{m,r} i^r, \qquad m = 1, \ldots, M.$$

Звідси

$$\sum_{m=1}^{M} f_m(x) H_m^T \psi^m = \sum_{m=1}^{M} f_m(x) H_m^T \sum_{r=1}^{M} \bar{\alpha}_{m,r} i^r = \sum_{r,s=1}^{M} f_r(x) H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} i^s.$$

З (20) отримуємо:

$$h(x) = [R(x)]^{-1}\left(f'_{\cdot}(x)\lambda + \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x))\gamma + \sum_{r,s=1}^{M} f_r(x) H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} i^s\right). \tag{21}$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} h(x) = [R(x)]^{-1}\left(f'_{\cdot}(x)\lambda + \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x))\gamma + \sum_{r,s=1}^{M} f_r(x) H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} i^s\right); \\ i^m = H_m \int h(x) f_m(x) \mu(dx), \quad m = 1, \ldots, M; \\ \mathbb{O}_K = \int \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x)) h(x)\, \mu(dx); \\ -c = \int f'_{\cdot}(x)^T h(x)\, \mu(dx). \end{cases}$$

Підставляючи $h(x)$ в інші рівняння, маємо

$$\begin{cases} i^m = H_m (S_m^1)^T \lambda + H_m (Q_m^1)^T \gamma + \sum_{r,s=1}^{M} H_m S_{m,r}^2 H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} i^s, \quad m = 1, \ldots, M; \\ \mathbb{O}_K = (Q^2)^T \lambda + Q^0 \gamma + \sum_{r,s=1}^{M} Q_r^1 H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} i^s; \\ -c = S^0 \lambda + Q^2 \gamma + \sum_{r,s=1}^{M} S_r^1 H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} i^s. \end{cases} \tag{22}$$

Позначимо

$$\phi := \left(i^{1\,T}, \cdots, i^{M\,T}, \gamma^T, \lambda^T\right)^T \in \mathbf{R}^{K\cdot M + d}.$$

Отже,

$$i^m = E_m\phi, \qquad m = 1,\dots,M;$$
$$\gamma = E_{M+1}\phi; \qquad \lambda = E_{M+2}\phi.$$

Система рівнянь (22) набуває вигляду

$$\begin{cases} E_m\phi = H_m\left((S^1_m)^T E_{M+2} + (Q^1_m)^T E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^M S^2_{m,r} H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\right)\phi, \\ \hfill m = 1,\dots,M; \\ \mathbb{O}_K = (Q^2)^T E_{M+2}\phi + Q^0 E_{M+1}\phi + \sum_{r,s=1}^M Q^1_r H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\phi; \\ -c = S^0 E_{M+2}\phi + Q^2 E_{M+1}\phi + \sum_{r,s=1}^M S^1_r H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\phi. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} E^T_m E_m\phi = E^T_m H_m\left((S^1_m)^T E_{M+2} + (Q^1_m)^T E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^M S^2_{m,r} H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\right)\phi; \\ E^T_{M+1}\mathbb{O}_K = \left(E^T_{M+1}(Q^2)^T E_{M+2} + E^T_{M+1} Q^0 E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^M E^T_{M+1} Q^1_r H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\right)\phi; \\ -E^T_{M+2}c = \left(E^T_{M+2} S^0 E_{M+2} + E^T_{M+2} Q^2 E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^M E^T_{M+2} S^1_r H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\right)\phi. \end{cases}$$

Додаючи всі рівняння, маємо $X\phi = -E^T_{M+2}c$. Отже, $\phi = -X^{-1}E^T_{M+2}c$.
З (21) маємо

$$\begin{aligned} h(x) &= [R(x)]^{-1}\left(f'_\cdot(x)\lambda + \mathrm{Diag}(f_\cdot(x))\gamma + \sum_{r,s=1}^M f_r(x) H^T_r \bar\alpha_{r,s} i^s\right) \\ &= [R(x)]^{-1}\left(f'_\cdot(x)E_{M+2} + \mathrm{Diag}(f_\cdot(x))E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^M f_r(x) H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\right)\phi \\ &= -[R(x)]^{-1}\left(f'_\cdot(x)E_{M+2} + \mathrm{Diag}(f_\cdot(x))E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^M f_r(x) H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\right) \\ &\quad \times X^{-1}E^T_{M+2}c. \end{aligned}$$

Оскільки $c \in \mathbf{R}^d$ вибрано довільним чином, а $h(x) = G(x;\vartheta)c$, маємо

$$\begin{aligned} G^*(x;\vartheta) = -[R(x)]^{-1}&\left(f'_\cdot(x)E_{M+2} + \mathrm{Diag}(f_\cdot(x))E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^M f_r(x) H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\right) \\ &\times X^{-1}E^T_{M+2}. \end{aligned}$$

6.1.4. *Коректність розв'язку.* Функціонал $J(h;i)$ у задачі мінімізації (19) є квадратичною формою від $h(\cdot)$ (якщо підставити туди значення i). Дана квадратична форма є матрицею розсіяння деякого випадкового вектора, тому вона є невід'ємною. В той же час обмеження (18) задають афінний простір. Тому стаціонарна точка $J(h;i)$ в умовах (19) є точкою глобального мінімума.

6.1.5. *Обчислення $Z(G^*,\vartheta)$.* Нижня межа матриці розсіяння введених GEE-оцінок виражається як $Z(G^*;\vartheta) = J_1 - J_2$ (див. (17)). Обчислимо J_2:

$$\begin{aligned} -\bar G^{*;m}(\vartheta) &= -\int G^*(x;\vartheta)\,F_m(dx) \\ &= \int R(x)^{-1}\cdot\left(f'_\cdot(x)E_{M+2} + \mathrm{Diag}(f_\cdot(x))E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^M f_r(x) H^T_r \bar\alpha_{r,s} E_s\right) \\ &\hfill \times X^{-1}E^T_{M+2}\,F_m(dx) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg(\int R(x)^{-1} f'_{\cdot}(x) f_m(x)\,\mu(dx) \cdot E_{M+2} \\
&\quad + \int R(x)^{-1}\,\mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x)) f_m(x)\,\mu(dx) \cdot E_{M+1} \\
&\quad + \sum_{r,s=1}^{M} \int R(x)^{-1} f_r(x) f_m(x)\,\mu(dx) \cdot H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} E_s \Bigg) \cdot X^{-1} E_{M+2}^T \\
&= \Bigg((S_m^1)^T E_{M+2} + (Q_m^1)^T E_{M+1} + \sum_{r,s=1}^{M} (S_{r,m}^2)^T H_r^T \bar{\alpha}_{r,s} E_s \Bigg) \cdot X^{-1} E_{M+2}^T .
\end{aligned}
$$

Обчислимо J_1:

$$
\begin{aligned}
&\int G^*(x;\vartheta)^T R(x;\vartheta) G^*(x;\vartheta)\,\mu(dx) \\
&\quad = \int E_{M+2} X^{-T} \Bigg(E_{M+2}^T \cdot f'_{\cdot}(x)^T + E_{M+1}^T \cdot \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x)) \\
&\qquad\qquad + \sum_{r_1,s_1=1}^{M} E_{s_1}^T \bar{\alpha}_{s_1,r_1} H_{r_1} \cdot f_{r_1}(x) \Bigg) \\
&\qquad \times R(x)^{-1} \Bigg(f'_{\cdot}(x) \cdot E_{M+2} + \mathrm{Diag}(f_{\cdot}(x)) \cdot E_{M+1} \\
&\qquad\qquad + \sum_{r_2,s_2=1}^{M} f_{r_2}(x) \cdot H_{r_2}^T \bar{\alpha}_{r_2,s_2} E_{s_2} \Bigg) X^{-1} E_{M+2}^T\,\mu(dx) \\
&\quad = E_{M+2} X^{-T} \cdot \Bigg[E_{M+2}^T \cdot \Bigg(S^0 E_{M+2} + Q^2 E_{M+1} + \sum_{r_2,s_2=1}^{M} S_{r_2}^2 H_{r_2}^T \bar{\alpha}_{r_2,s_2} E_{s_2} \Bigg) \\
&\qquad + E_{M+1}^T \cdot \Bigg((Q^2)^T E_{M+2} + Q^0 E_{M+1} + \sum_{r_2,s_2=1}^{M} Q_{r_2}^1 H_{r_2}^T \bar{\alpha}_{r_2,s_2} E_{s_2} \Bigg) \\
&\qquad + \sum_{r_1,s_1=1}^{M} E_{s_1}^T \bar{\alpha}_{s_1,r_1} H_{r_1} \Bigg((S_{r_1}^1)^T E_{M+2} + (Q_{r_1}^1)^T E_{M+1} \\
&\qquad + \sum_{r_2,s_2=1}^{M} S_{r_1,r_2}^2 H_{r_2}^T \bar{\alpha}_{r_2,s_2} E_{s_2} \Bigg) \Bigg] \cdot X^{-1} E_{M+2}^T .
\end{aligned}
$$

Теорему 4.1 доведено.

Література

1. А. А. Боровков, *Математическая статистика*, “Наука”, Москва, 1984.
2. О. В. Доронін, *Робастні оцінки для сумішей з гауссовою компонентою*, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки (2012), no. 1, 18–23.
3. А. Лодатко, Р. Майборода, *Адаптивна моментна оцінка параметру розподілу по спостереженнях з домішкою*, Теор. ймовір. та матем. статист. **75** (2006), 61–70.
4. Р. Є. Майборода, О. В. Сугакова, *Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші*, “Київський університет”, Київ, 2008.
5. Д. І. Похилько, *Вейвлет-оцінки щільності по спостереженням з суміші*, Теор. ймовір. та матем. статист. **70** (2004), 121–130.
6. А. М. Щербіна, *Оцінювання середнього у моделі суміші зі змінними концентраціями*, Теор. ймовір. та матем. статист. **84** (2011), 142–154.

7. А. М. Щербіна, *Оцінювання параметрів біноміального розподілу у моделі суміші*, Теор. ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 182–192.
8. F. Autin and Ch. Pouet, *Test on the components of mixture densities*, Statistics & Risk Modelling **28** (2011), no. 4, 389–410.
9. L. Bordes, C. Delmas, and P. Vandekerkhove, *Semiparametric Estimation of a two-component Mixture model where one component is known*, Scandinavian Journal of Statistics **33** (2006), 733–752.
10. P. Hall and X.-H. Zhou, *Nonparametric estimation of component distributions in a multivariable mixture*, Annals of Statistics **31** (2003), no. 1, 201–224.
11. R. E. Maiboroda and O. O. Kubaichuk, *Improved estimators for moments constructed from observations of a mixture*, Theory of Probab. Math. Statist. **70** (2005), 83–92.
12. R. Maiboroda and O. Sugakova, *Nonparametric density estimation for symmetric distributions by contaminated data*, Metrica **75** (2012), no. 1, 109–126.
13. R. Maiboroda and O. Sugakova, *Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis*, Journal of Nonparametric Statistics **24** (2012), no. 1, 201–205.
14. R. E. Maiboroda, O. V. Sugakova, and A. V. Doronin, *Generalized estimating equations for mixtures with varying concentrations*, The Canadian Journal of Statistics **41** (2013), no. 2, 217–236.
15. G. J. McLachlan and D. Peel, *Finite Mixture Models*, Wiley, New York, 2000.
16. J. Shao, *Mathematical statistics*, Springer-Verlag, New York, 1998.
17. O. Sugakova, *Adaptive estimates for the parameter of a mixture of two symmetric distributions*, Theory Probab. Math. Statist. **82** (2011), 149–159.
18. O. Sugakova, *Empirical Bayesian classification for observations with admixture*, Theory Probab. Math. Statist. **84** (2012), 165–172.
19. D. M. Titterington, A. F. Smith, and U. E. Makov, *Analysis of Finite Mixture Distributions*, Wiley, New York, 1985.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: al_doronin@ukr.net

Надійшла 01/07/2013