Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 86–96

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 86–96

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ "ГРЕЦЬКИХ" СИМВОЛІВ ДЛЯ ЦІН ОПЦІОНІВ ЄВРОПЕЙСЬКОГО ТИПУ: ВІД ДИСКРЕТНОГО ЧАСУ ДО НЕПЕРЕРВНОГО

УДК 519.21

С. В. КУЧУК-ЯЦЕНКО І Ю. С. МІШУРА

Анотація. В даній роботі розглядається поведінка так званих "греків" — величин, що характеризують ринок і активи на ньому в моделі Блека–Шоулса. Введено у розгляд дискретні аналоги цих величин у біноміальній моделі ринку і показано слабку збіжність цих аналогів до греків за умови, що кількість періодів прямує до нескінченності.

Abstract. This paper investigates behavior of the so-called "Greeks" that characterize the market and assets on it in the Black-Scholes model. Discrete analogues of these quantities are introduced for the binomial model of the market. The weak convergence of these analogues to the Greeks is established under the condition that the number of periods tends to infinity.

Аннотация. В данной работе рассматривается поведение так называемых "греков" — величин, характеризующих рынок и активы, представленные на нем, в модели Блека–Шоулса. Рассмотрены дискретные аналоги этих величин в биномиальной модели рынка и доказана слабая сходимость этих аналогов к грекам при условии, что количество периодов стремится к бесконечности.

1. Вступ

Слабку збіжність в кожний фіксований момент часу біноміальної моделі ринку в схемі серій до моделі Блека–Шоулса було продемонстровано ще у перших роботах, що досліджували біноміальні моделі, зокрема у [3]. З того часу з'явилася значна кількість різних узагальнень та уточнень цієї збіжності (наприклад, [6]). В статті [7] наведено умови слабкої збіжності мір, що відповідають біноміальній та набагато більш загальним дограничним моделям, до міри, що відповідає граничному дифузійному процесу. Чимало робіт присвячено оцінкам швидкості збіжності цін опціонів за умов збіжності цін ризикових активів ([1, 5]). Проте біноміальні аналоги для "греків" залишаються недостатньо дослідженим і до сьогодні. Необхідність знаходження різноманітних дискретних моделей, асимптотично близьких до моделі Блека–Шоулса, диктувалася тим фактом, що реальні фінансові ринки є дискретними. Модель Блека–Шоулса є зручним та добре дослідженим наближенням більш реалістичних дискретних моделей. Тому дослідження асимптотичної поведінки моделей з дискретним часом при спрямуванні кількості періодів до нескінченності має цілком практичний інтерес.

В даній роботі вивчено аналоги грецьких функціоналів від європейських опціонів у випадку, коли модель ринку у дискретному часі є симетричною та біноміальною. Статтю побудовано наступним чином: у розділі 2 представлено граничну модель

2010 *Mathematics Subject Classification.* 91G20, 60F10, 60J67.

Ключові слова і фрази. Банахові простори $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, випадкові процеси, умови Ліпшиця, модулі неперервності, метрична масивність, грецькі символи ("греки"), модель Блека–Шоулса, біноміальна модель, локальна теорема Муавра–Лапласа.

Блека–Шоулса і наводиться означення грека, який є основним предметом дослідження цієї статті, — “дельти”. У розділі 3 визначено допграничну модель — симетричну біноміальну модель Кокса–Росса–Рубінштейна, описано основні її властивості та введено поняття дельта-хеджу. У розділі 4 доведено слабку збіжність мір, що відповідають симетричній біноміальній моделі, до міри, що відповідає граничному процесу Блека–Шоулса. Розділ 5 містить допоміжні результати, необхідні для доведення слабкої збіжності греків. У розділі 6 формулюється та доводиться основний результат роботи: теорема про слабку збіжність дискретного аналогу дельти у біноміальній моделі до самої дельти при спрямуванні кількості періодів до нескінченності. Висновки сформульовано у розділі 7.

2. Гранична модель Блека–Шоулса та компоненти, пов’язані зі стратегіями і капіталом

Нехай $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}\}$ — повний ймовірнісний простір з фільтрацією $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, що задовольняє стандартні умови (див., наприклад, [2]). Розглянемо фінансовий ринок, що задається двома активами — безризиковим та ризиковим. Нехай еволюцію безризикового активу задано формулою $B(t) = e^{rt}$, а ціну ризикового активу задано випадковим процесом $S(t) = S_0 \exp\{\mu t + \sigma W_t\}$, $S_0 > 0$, $\{W_t, \mathfrak{F}_t^{\mathbb{P}}, t \geq 0\}$ — вінерівський процес відносно міри $\mathbb{P}$. Введемо процес $X(t) = S(t)e^{-rt}$, що є еволюцією дисконтованої вартості ризикового активу. Для такої моделі ринку встановлено (див., наприклад, [4]) існування та єдиність ризик-нейтральної (мартингальної) міри $\mathbb{P}^*$, відносно якої процес $X = \{X(t), t \geq 0\}$ є мартингалом та допускає зображення $X(t) = S_0 \exp\{\sigma W_t^{\mathbb{P}^*} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$. Надалі, не зменшуючи загальності, вважаємо $S_0 = 1$, та будемо опускати верхній індекс в позначенні вінерівського процесу, вважаючи, що це вінерівський процес відносно міри $\mathbb{P}$.

Нехай $V(S,t) = e^{-r(T-t)}\,\mathsf{E}\{(S(T) - K)^+ \mid \mathfrak{F}_t\}$ — справедлива ціна Європейського опціону купівлі зі страйковою ціною K та часом виконання T за умови, що поточна ціна ризикового активу дорівнює S. Запишемо рівняння Блека–Шоулса в частинних похідних ([4]):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \qquad t \in [0,T].$$

Так звані грецькі символи, або “греки” відповідають різним частинним похідним функції V. Зокрема, означимо $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ і надалі розглядатимемо у цій роботі саме цього представника “греків”, який називатимемо “дельтою”. Дельта характеризує зміну вартості опціону або портфелю опціонів в залежності від ціни активу S. Дельта визначає міру кореляції між змінами вартості опціону і змінами ціни відповідного активу.

З формули Блека–Шоулса для ціни опціону ([4])

$$V(S(t),t) = S(t)\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-)$$

отримуємо відомий вираз для Δ в термінах фіксованого $S(t) = x$:

$$\Delta(x, T-t) = \frac{\partial V}{\partial x} = \Phi(d_+(x, T-t)),$$

де $\Phi(x)$ — функція стандартного нормального розподілу,

$$d_{\pm}(x, T-t) = \frac{\ln \frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Задача полягає у знаходженні дискретного аналогу дельти у введеній далі моделі ринку Кокса–Росса–Рубінштейна і дослідженні її збіжності до $\Delta(x, T-t)$.

3. Симетрична модель Кокса–Росса–Рубінштейна

Опишемо допграничну модель ринку в n-й серії. Введемо ймовірнісний простір

$$\Omega^{(n)} := \{-1,+1\}^n = \Big\{\omega^{(n)} = \Big(y_1^{(n)},\dots,y_n^{(n)}\Big) \mid y_i^{(n)} \in \{-1,+1\}\Big\},$$

а також дві числові послідовності a_n, b_n, $n \ge 1$. Позначимо через $Y_k\big(\omega^{(n)}\big) := y_k^{(n)}$ для $\omega^{(n)} = \big(y_1^{(n)},\dots,y_n^{(n)}\big)$ проекцію k-ї координати, і нехай

$$R_k^{(n)}\big(\omega^{(n)}\big) := a_n \frac{1 - Y_k\big(\omega^{(n)}\big)}{2} + b_n \frac{1 + Y_k\big(\omega^{(n)}\big)}{2}.$$

Вважаємо, що допгранична модель в n-й серії є n-періодною моделлю, і це модель Кокса–Росса–Рубінштейна з відсотковою ставкою

$$r_n = \frac{rT}{n},$$

що задає еволюцію безризикового активу $B_k^{(n)} = (1+r_n)^k$, $k = 0,\dots,n$, одним ризиковим активом $S_k^{(n)}$, $k = 0,\dots,n$, та доходами, які визначаються за формулою $R_k^{(n)} = \big(S_k^{(n)} - S_{k-1}^{(n)}\big)/S_{k-1}^{(n)}$, $k = 1,\dots,n$. Доходи незалежні і набувають одного з двох можливих значень: a_n і b_n, $k = 1,\dots,n$.

У такій моделі при переході до наступного періоду ціна активу здійснює стрибок від значення $S_{k-1}^{(n)}$ до більшого значення $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n)}(1+b_n)$ (якщо $b_n > 0$), або ж до меншого — $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n)}(1+a_n)$, (якщо $a_n < 0$). Далі розглядається саме такий випадок.

Не обмежуючи загальності, як і для граничної моделі, вважаємо далі, що ціна активу в початковий момент часу $S_0^{(n)} = 1$. Введемо процес дисконтованої вартості ризикового активу

$$X_k^{(n)} := \frac{S_k^{(n)}}{(1+r_n)^k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1 + R_i^{(n)}}{1 + r_n}.$$

Фільтрація на розглядуваному просторі задається виразом

$$\mathfrak{F}_k^{(n)} := \sigma\big(S_1^{(n)},\dots,S_k^{(n)}\big) = \sigma\big(X_1^{(n)},\dots,X_k^{(n)}\big), \qquad k = 1,\dots,n.$$

і нехай $\mathfrak{F}^{(n)} = \mathfrak{F}_n^{(n)}$. Об'єктивну ймовірнісну міру на просторі $\big(\Omega^{(n)},\mathfrak{F}^{(n)}\big)$ позначимо $\mathbb{P}^{(n)}$. Припустимо, що модель є симетричною, тобто

$$\hat{a}_n = 1 + a_n = \exp\big\{-\sigma\sqrt{T/n}\big\}, \qquad \hat{b}_n = 1 + b_n = \exp\big\{\sigma\sqrt{T/n}\big\} \tag{1}$$

для деякого заданого $\sigma > 0$. Оскільки

$$\sqrt{n} r_n \to 0, \quad \sqrt{n} a_n \to -\sigma\sqrt{T}, \quad \sqrt{n} b_n \to \sigma\sqrt{T} \qquad \text{при } n \to \infty, \tag{2}$$

то $a_n < r_n < b_n$, починаючи з деякого номера n_0. Тоді для $n \ge n_0$ така модель є безарбітражною, ринок повним, причому єдина еквівалентна мартингальна міра $\mathbb{P}_n^*$ характеризується рівністю (див., наприклад, [4])

$$\mathbb{P}_n^* \Big\{R_k^{(n)} = b_n\Big\} =: p_n^* = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

При цьому з (2) неважко отримати, що $\lim_{n\to\infty} p_n^* = 1/2$. Таку модель назвемо симетричною біноміальною моделлю.

Нехай C — деяке платіжне зобов'язання, вимірне відносно σ-алгебри $\mathfrak{F}_n^{(n)}$. Тоді існує борелева функція h така, що дисконтоване платіжне зобов'язання $H = Ce^{-rT}$ допускає зображення

$$H = h\big(S_1^{(n)},\dots,S_n^{(n)}\big).$$

Повнота ринку забезпечує досяжність платіжного зобов'язання C.

Означення 3.1. Торгівельна стратегія $\bar{\xi}^{(n)} = \big(\xi_B^{(n)}, \xi_S^{(n)}\big)$ називається *самофінансованою*, якщо $\bar{\xi}_k^{(n)}\bar{S}_k^{(n)} = \bar{\xi}_{k+1}^{(n)}\bar{S}_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n-1$.

Означення 3.2. Самофінансована торгівельна стратегія $\bar{\xi}^{(n)} = \big(\xi_B^{(n)}, \xi_S^{(n)}\big)$ називається *реплікуючою стратегією* для досяжного платіжного зобов'язання C, якщо $C = \bar{\xi}_n^{(n)}\bar{S}_n^{(n)}$ м.н.

Означення 3.3. *Процес вартості* $V = \big(V_k^{(n)}\big)_{k=0,\dots,n}$, асоційований з торгівельною стратегією $\bar{\xi}^{(n)}$, визначається наступним чином:

$$V_0^{(n)} := \bar{\xi}_1^{(n)}\bar{X}_0^{(n)}, \qquad V_k^{(n)} := \bar{\xi}_k^{(n)}\bar{X}_k^{(n)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

де $\bar{X}_k^{(n)} = \big(1, X_k^{(n)}\big)$, $k = 0, \dots, n$, — процес дисконтованої вартості активів.

Має місце наступне твердження ([4, ст. 250]).

Твердження 3.1. *Процес вартості реплікуючої стратегії для платіжного зобов'язання H дорівнює*

$$V_i^{(n)} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}\big[H \mid \mathfrak{F}_i^{(n)}\big], \qquad i = 0, \dots, n,$$

і допускає зображення

$$V_i^{(n)}(\omega) = v_i^{(n)}\big(S_1^{(n)}(\omega), \dots, S_i^{(n)}(\omega)\big),$$

де функція $v_i^{(n)}$ задається наступним чином:

$$v_i^{(n)}(x_0, \dots, x_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}\Big[h\big(x_0, \dots, x_i, x_i S_1^{(n)}, \dots, x_i S_{n-i}^{(n)}\big)\Big]. \tag{3}$$

Функцію $v_i^{(n)}$ називатимемо *функцією капіталу*. Зазначимо, що функція капіталу може бути визначена рекурсивно, причому шляхом оберненої рекурсії:

$$v_n^{(n)}(x_0, \dots, x_n) = h(x_0, \dots, x_n),$$
$$v_i^{(n)}(x_0, \dots, x_i) = p_n^* v_{i+1}^{(n)}(x_0, \dots, x_i, x_i\hat{b}_n) + (1 - p_n^*)v_{i+1}^{(n)}(x_0, \dots, x_i, x_i\hat{a}_n).$$

Називатимемо реплікуючу стратегію для зобов'язання H *дельта-хеджем* та позначатимемо її $\Delta_i^{(n)} := \Delta_i^{(n)}\big(S_1^{(n)}(\omega), \dots, S_{i-1}^{(n)}(\omega)\big)$. Встановимо вигляд дельта-хеджу для Європейського опціону купівлі

$$C^{(n)} = f\big(S_n^{(n)}\big) = \big(S_n^{(n)} - K\big)^+$$

на ринку з дискретним часом, описаному вище.

Лема 3.1. *Реплікуюча стратегія для Європейського опціону купівлі має вигляд*

$$\Delta_k^{(n)}\big(S_{k-1}^{(n)}\big) = (1 + r_n)^k \, \frac{v_k^{(n)}\big(S_{k-1}^{(n)}\hat{b}_n\big) - v_k^{(n)}\big(S_{k-1}^{(n)}\hat{a}_n\big)}{S_{k-1}^{(n)}\big(\hat{b}_n - \hat{a}_n\big)}, \tag{4}$$

де

$$v_k^{(n)}(y) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{\big(\hat{b}_n^i \hat{a}_n^{n-i-k} y - K\big)^+}{(1 + r_n)^n} C_{n-k}^i (p_n^*)^i (1 - p_n^*)^{n-i-1}. \tag{5}$$

Доведення. Рівність (4) випливає з твердження 5.45, [4], ст. 252, яке встановлює загальний вигляд реплікуючої стратегії $\Delta_k^{(n)}$.

У нашому випадку $H = h\big(S_n^{(n)}\big)$, $h(x) = (x - K)^+/(1 + r_n)^n$. Таким чином, H залежить лише від вартості активу у термінальний момент часу. В цьому випадку $V_k^{(n)}$ залежить тільки від поточної вартості активу:

$$V_k^{(n)}(\omega) = v_k^{(n)}\big(S_k^{(n)}(\omega)\big).$$

Більше того, формула для визначення функції капіталу (3) зводиться до вигляду математичного сподівання функції, що залежить від біноміально розподіленої величини з параметром p_n^*:

$$v_k^{(n)}(x_k) = \sum_{i=0}^{n-k} h\big(x_k \hat{b}_n^i \hat{a}_n^{n-i-k}\big) C_{n-k}^i (p_n^*)^i (1-p_n^*)^{n-i-k},$$

звідки випливає (5). □

Зважаючи на таке означення дельта-хеджу, природно сподіватися, що саме він і буде шуканим аналогом дельти. Дріб у правій частині (4) є певним дискретним аналогом похідної функції капіталу, тому є підстави вважати, що при переході до границі, якщо функція капіталу буде збігатися до граничного значення, отримаємо дельту.

4. Слабка збіжність симетричної моделі Кокса–Росса–Рубінштейна до моделі Блека–Шоулса

Оскільки дельта-хедж та дельта опціону визначені на ринках з різною часовою структурою, позначимо k_t^n те ціле число, для якого $\frac{k_t^n T}{n} \le t < \frac{(k_t^n+1)T}{n}$, причому $0 \le k_t^n \le n$. Таким чином, $k_t^n = [\frac{nt}{T}]$. Введемо послідовність випадкових процесів

$$S_n(t) = S_{k_t^n}^{(n)}.$$

Позначимо $\stackrel{\mathrm{d}}{\to}$ слабку збіжність за розподілом, $\stackrel{\mathsf{P}}{\to}$ збіжність за ймовірністю та $\stackrel{\mathrm{W}}{\to}$ слабку збіжність мір, що відповідають випадковим процесам. Зауважимо, що згідно з теоремою 5.53 та наслідком 5.55 з [4], має місце слабка збіжність одновимірних розподілів $S_{k_t^n}^{(n)} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} S(t)$ для кожного $t \in [0,T]$. Щоб довести слабку збіжність мір $\mathbb{Q}_n$, що відповідають випадковим процесам S_n, до міри $\mathbb{Q}$, що відповідає випадковому процесу S, застосуємо теорему 3.3 з [7], яку сформулюємо наступним чином.

Теорема 4.1. *Нехай* $B_t^{(n)} = (1+rT/n)^{k_t^n}$, $S_t^{(n)} = \prod_{k=1}^{k_t^n}\big(1+R_k^{(n)}\big)$, *причому виконуються наступні умови:*

(i) $\sup_{1\le k\le n}\big|R_k^{(n)}\big| \stackrel{\mathsf{P}}{\to} 0$, $n\to\infty$;

(ii) *для будь-якого* $a \in (0,1]$

$$\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}_n^*\left(\sum_{1\le k\le n}\left|\mathbb{E}_n^*\left(R_k^{(n)} 1_{|R_k^{(n)}|\le a} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right)\right| \ge C\right)$$

$$= \lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}_n^*\left(\sum_{1\le k\le n}\mathbb{E}_n^*\left(\big(R_k^{(n)}\big)^2 1_{|R_k^{(n)}|\le a} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) \ge C\right) = 0;$$

(iii) *для будь-якого* $\varepsilon > 0$, $a \in (0,1]$

$$\lim_n \mathbb{P}_n^*\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{1\le k\le [\frac{nt}{T}]}\mathbb{E}_n^*\left(R_k^{(n)} 1_{|R_k^{(n)}|\le a} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right| \ge \varepsilon\right) = 0;$$

(iv) *для будь-якого* $\varepsilon > 0$, $a \in (0,1]$

$$\lim_n \mathbb{P}_n^*\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{1\le k\le [\frac{nt}{T}]}\mathbb{E}_n^*\left(\big(R_k^{(n)}\big)^2 1_{|R_k^{(n)}|\le a} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) - \sigma^2 t\right| \ge \varepsilon\right) = 0.$$

Тоді має місце слабка збіжність мір

$$\mathbb{Q}_n \stackrel{\mathrm{W}}{\to} \mathbb{Q}.$$

Позначимо число $R := r - \frac{\sigma^2}{2}$. За допомогою теореми 4.1 доведемо наступний результат.

Теорема 4.2. *Симетрична біноміальна модель задовольняє умови (i)–(iv) теореми 4.1, і значить, має місце слабка збіжність мір*

$$\mathbb{Q}_n \xrightarrow{\mathrm{W}} \mathbb{Q}.$$

Доведення. Нагадаємо, що $R_k^{(n)} = b_n = \exp\{\sigma\sqrt{T/n}\} - 1 = \sigma\sqrt{T/n} + \sigma^2 T/(2n) + o(1/n)$ та $R_k^{(n)} = a_n = \exp\{-\sigma\sqrt{T/n}\} - 1 = -\sigma\sqrt{T/n} + \sigma^2 T/(2n) + o(1/n)$ з імовірностями

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n^*\left\{R_k^{(n)} = b_n\right\} = p_n^* = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n} &= \frac{\sigma\sqrt{T/n} + \frac{RT}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2\sigma\sqrt{T/n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{R\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

та

$$1 - p_n^* = \frac{\sigma\sqrt{T/n} - \frac{RT}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2\sigma\sqrt{T/n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{R\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

відповідно. Виконання умови (i) очевидне. Тепер, для будь-якого $a \in (0, 1]$ починаючи з деякого номера n маємо

$$\left|\mathbb{E}_n^*\left(R_k^{(n)} 1_{|R_k^{(n)}| \le a} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right)\right| = \left|\mathbb{E}_n^*\left(R_k^{(n)} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right)\right| = \left|\mathbb{E}_n^*\left(R_k^{(n)}\right)\right| = \frac{rT}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathbb{E}_n^*\left(\left(R_k^{(n)}\right)^2 1_{|R_k^{(n)}| \le a} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) = \mathbb{E}_n^*\left(\left(R_k^{(n)}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) = \mathbb{E}_n^*\left(R_k^{(n)}\right)^2 = \frac{\sigma^2 T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

тому умова (ii) виконується, і ці обчислення також з очевидністю показують, що виконуються умови (iii) та (iv), що й доводить теорему. □

Зауваження 4.1. Тепер, використовуючи метод Скорохода побудови випадкових процесів на одному ймовірнісному просторі, ми можемо перенести всі випадкові процеси S, S_n на один імовірнісний простір зі збереженням скінченновимірних розподілів, і при цьому будемо мати збіжність допграничних процесів до граничних в кожній точці з імовірністю 1.

5. Допоміжні результати

Почнемо з теореми, яка дозволить відшукати альтернативне зображення для $\Delta_k^{(n)}$, більш зручне для дослідження збіжності, ніж (4). Згідно із зауваженням 4.1, всі цінові процеси вважаємо заданими на одному ймовірнісному просторі. Це дозволяє опустити випадкову величину $S_{k-1}^{(n)}$ в означенні $\Delta_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)})$ і розглядати збіжність $\Delta_k^{(n)}(x_n)$ за умови, що числова послідовність x_n збігається до деякого фіксованого $x > 0$. Спочатку розглянемо $\Delta_k^{(n)}(x)$ при кожному фіксованому $x > 0$.

Теорема 5.1. *Для кожного $x > 0$ знайдеться такий номер $n = n(x)$, починаючи з якого існують такі цілі числа $m_a = m_a(x)$ та $m_b = m_b(x)$, що $0 \le m_a(x) \le m_b(x) \le n - k_t^n$ та $0 < p_n^1 < 1$, і такі, що дельта-хедж для Європейського опціону купівлі допускає зображення*

$$\Delta_{k_t^n}^{(n)}(x) = P\left(n - k_t^n, m_a(x), p_n^1\right) + M_{k_t^n}^{(n)}(x, p_n^*) 1\{m_a(x) \ne m_b(x)\}, \tag{7}$$

де $p_n^1 = \frac{\hat{b}_n}{(1+r_n)} p_n^*$, $P(L,l,p)$ — *ймовірність* l *та більше успіхів у* L *випробуваннях Бернуллі з параметром* p, *і*

$$M_k^{(n)}(x,p) = \frac{\left(x\hat{b}_n^{m_b+1}\hat{a}_n^{n-m_b-k} - K\right)}{(1+r_n)^{n-k}} C_{n-k}^{m_b} p^{m_b}(1-p)^{n-m_b-k}. \tag{8}$$

Доведення. З (5) легко бачити, що ненульові доданки в сумах, що фігурують у визначенні (4) як $v_k^{(n)}(x\hat{a}_n)$ і $v_k^{(n)}(x\hat{b}_n)$, розташовуються послідовно і з'являються, тільки починаючи з деяких номерів $m_a(x)$ і $m_b(x)$, відповідно. Знайдемо ці номери. Спочатку відзначимо, що найбільший доданок, який відповідає значенню індексу сумування $i = n - k_t^n$, має порядок

$$x \exp\{\sigma\sqrt{nT}(1-t/T)\} \to \infty \quad \text{при } n \to \infty,$$

отже знайдеться номер $n(x)$, починаючи з якого число доданків ненульове. Далі, для надходження доданків в першу суму має виконуватись нерівність

$$\left(x\hat{b}_n^{m_b+1}\hat{a}_n^{n-k-m_b} - K\right)^+ > 0.$$

Запишемо її в еквівалентному вигляді

$$x\hat{b}_n^{m_b+1}\hat{a}_n^{n-k-m_b} > K$$

і перетворимо при $k = k_t^n$:

$$(m_b+1)\ln\hat{b}_n + (n-k_t^n-m_b)\ln\hat{a}_n + \ln x > \ln K,$$

або

$$m_b \ln\left(\hat{b}_n/\hat{a}_n\right) > \ln K - (n-k_t^n)\ln\hat{a}_n - \ln x - \ln\hat{b}_n.$$

Зауважимо, що $\ln\hat{b}_n = \sigma\sqrt{T}/\sqrt{n}$, $\ln\hat{a}_n = -\sigma\sqrt{T}/\sqrt{n}$ та $\ln\hat{b}_n/\hat{a}_n = 2\sigma\sqrt{T}/\sqrt{n}$, звідки

$$m_b > \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n-k_t^n-1).$$

Таким чином, можна покласти

$$m_b = 0 \vee \left(\left[\frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n-k_t^n-1)\right] + 1\right) \tag{9}$$

для першої суми і аналогічно

$$m_a = 0 \vee \left(\left[\frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n-k_t^n+1)\right] + 1\right)$$

для другої. Очевидно, що для $n \geq n(x)$ можливий один з двох випадків: $m_a > m_b$ або $m_a = m_b = 0$. У будь-якому разі $\Delta_{k_t^n}^{(n)}(x)$ міститиме ненульові елементи обох сум на значеннях i від m_a до $n - k_t^n$. Розглянемо випадок $m_a > m_b$. Елементи першої суми будуть ненульовими на значеннях i від m_b до m_a. Проте виявляється, що існує лише одне таке значення (і тому воно рівне m_b). Дійсно,

$$m_a - m_b = \left[\frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n-k_t^n+1)\right] - \left[\frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n-k_t^n-1)\right] = 1.$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{k_t^n}^{(n)}(x) &= \frac{\sum_{i=m_a}^{n-k_t^n} C_{n-k_t^n}^i (p_n^*)^i (1-p_n^*)^{n-i-k_t^n} x \hat{a}_n^{n-k_t^n-i} \hat{b}_n^i (\hat{b}_n - \hat{a}_n)}{(1+r_n)^n x (\hat{b}_n - \hat{a}_n)} (1+r_n)^{k_t^n} \\
&\quad + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\} \\
&= \sum_{i=m_a}^{n-k_t^n} \frac{C_{n-k_t^n}^i (p_n^*)^i (1-p_n^*)^{n-i-k_t^n} \hat{a}_n^{n-i-k_t^n} \hat{b}_n^i}{(1+r_n)^{n-k_t^n}} + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\} \\
&= \sum_{i=m_a}^{n-k_t^n} C_{n-k_t^n}^i \left(\frac{\hat{b}_n}{(1+r_n)} p_n^* \right)^i \left(\frac{\hat{a}_n}{(1+r_n)} (1-p_n^*) \right)^{n-k_t^n-i} \\
&\quad + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\} \\
&= \sum_{i=m_a}^{n-k_t^n} C_{n-k_t^n}^i (p_n^1)^i (1-p_n^1)^{n-k_t^n-i} + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\} \\
&= P\left(n-k_t^n, m_a(x), p_n^1\right) + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\},
\end{aligned} \tag{10}
$$

де $p_n^1 = \frac{\hat{b}_n}{(1+r_n)} p_n^*$, $1-p_n^1 = \frac{\hat{a}_n}{(1+r_n)}(1-p_n^*)$ (цей запис є коректним, оскільки $p_n^* = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n} = \frac{r_n - \hat{a}_n + 1}{\hat{b}_n - \hat{a}_n}$, і тому $\frac{\hat{b}_n}{(1+r_n)} p_n^* + \frac{\hat{a}_n}{(1+r_n)}(1-p_n^*) = 1$). □

Далі нам також знадобиться певний аналог нерівності Ессеєна, який ми наведемо нижче без доведення (див. [8], ст. 111).

Теорема 5.2. *Нехай Y_j^n, $j = 1, \ldots, n$, — незалежні випадкові величини. Нехай для $\mathsf{E}\, Y_j^n = 0$, $\mathsf{E}\left(Y_j^n\right)^2 = \sigma_j{}^2 > 0$, $\mathsf{E}\left|Y_j^n\right|^3 < \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Покладемо $B_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$, $F_n(x) = \mathsf{P}\big(B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n Y_j^n < x\big)$, $L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^n \mathsf{E}\left|Y_j^n\right|^3$.*

Тоді

$$
\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq A L_n, \tag{11}
$$

де A — деяка додатна стала, $\Phi(x)$ — функція стандартного нормального розподілу.

6. Збіжність $\Delta_k^{(n)}$ до $\Delta(x, T-t)$

Теорема 5.1 дозволяє розглянути збіжність компонент дискретного греку $\Delta_k^{(n)}$ окремо. Далі всюди припускаємо, що $0 < t < T$, тому що при $t = 0$ та $t = T$ висновки аналогічні, але доведення простіші. Спершу доведемо наступний результат.

Теорема 6.1. *Послідовність $M_{k_t^n}^{(n)}(x, p_n^*) \to 0$, $n \to \infty$ рівномірно по будь-якій обмеженій множині значень $x > 0$.*

Доведення. Зауважимо, що з міркувань, викладених у доведенні теореми 5.1, з рівності $m_a > m_b$ випливає, що $m_a > 0$, і тому функцію максимуму з означення m_a можна опустити. Зазначимо, що

$$
m_a > m_b \geq \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \to \infty.
$$

при $n \to \infty$, і $m_b = m_a - 1 \to \infty$. Більше того, при $n \to \infty$

$$
n - k_t^n - m_b \approx \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2} n \left(1 - \frac{t}{T}\right) \to \infty.
$$

Для застосування локальної теореми Муавра–Лапласа (див. [9, ст. 67]) залишається довести рівномірну обмеженість по n послідовності

$$\alpha(m_b, n) := \frac{m_b - (n-k_t^n)p_n^*}{\sqrt{(n-k_t^n)p_n^*(1-p_n^*)}}.$$

Застосуємо формули (6) та (9) і запишемо цю послідовність у такому вигляді:

$$\alpha(m_b, n) = \frac{\frac{\sqrt{n}\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{T}} - (n-k_t^n)\frac{R\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{n}} + O(1)}{\sqrt{n(1-\frac{t}{T})(\frac{1}{4} - \frac{R^2T}{4\sigma^2 n}) + O(1)}} \to \frac{\ln(K/x) - (T-t)R}{\sqrt{T-t}}. \tag{12}$$

Отже, при кожному $x > 0$ послідовність $\alpha(m_b, n)$, $n \geq 1$ є обмеженою. Таким чином, всі умови локальної теореми Муавра–Лапласа виконуються, і для достатньо великих n має місце рівність

$$M_{k_t^n}^{(n)}(x, p_n^*) = \frac{\left(x\hat{b}_n^{m_b+1}\hat{a}_n^{n-m_b-k_t^n} - K\right)}{(1+r_n)^{n-k_t^n}} \frac{e^{-\varphi(n)}}{\sqrt{n-k_t^n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{13}$$

де $\varphi(n) \geq 0$, $n \geq 1$ — деяка функція (точний її вигляд нас не цікавить, проте у ([9]) докладно показаний спосіб його визначення).

нехай $x \leq C$. Перший дріб у зображенні (13) перетворимо наступним чином:

$$0 \leq \frac{\left(x\hat{b}_n^{m_b+1}\hat{a}_n^{n-m_b-k_t^n} - K\right)}{(1+r_n)^{n-k_t^n}} \leq C\exp\left\{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}(2m_b + 1 - (n-k_t^n))\right\} \leq K + o(1).$$

Отже, $M_{k_t^n}^{(n)}(x, p_n^*) \to 0$ при $n \to \infty$ рівномірно по будь-якій обмеженій множині значень x. □

Сформулюємо та доведемо основний результат.

Теорема 6.2. *Нехай дограничная модель є симетричною біноміальною, а гранична є моделлю Блека–Шоулса. Тоді дельта-хедж для Європейського опціону купівлі у дограничній моделі слабко збігається до дельти Європейського опціону купівлі у моделі Блека–Шоулса, коли кількість періодів у дискретній моделі прямує до нескінченності, тобто*

$$\Delta_k^{(n)}\left(S_{k_t^n}^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Delta(S(t), T-t), \qquad n \to \infty.$$

Доведення. З попереднього зрозуміло, що нам достатньо перевірити, що

$$\Delta_k^{(n)}(x_n) \to \Delta(x, T-t), \qquad n \to \infty$$

за умови, що $x_n \to x > 0$. Застосуємо зображення (7) з теореми 5.1. За теоремою 6.1, в цьому зображенні $M_{k_t^n}^{(n)}(x_n, p_n^*) \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, для доведення шуканої збіжності $\Delta_k^{(n)}(x_n)$ до $\Delta(x, T-t)$ тепер достатньо показати збіжність до $\Delta(x, T-t)$ виразу $P(n-k_t^n, m_a(x_n), p_n^1)$ з (10), де замість фіксованого x підставлено x_n. З метою технічного спрощення будемо позначати просто m_a замість $m_a(x_n)$.

Розглянемо суму $P(n-k, m_a, p_n^1) = \sum_{i=m_a}^{n-k} C_{n-k}^i \left(p_n^1\right)^i \left(1-p_n^1\right)^{n-i-k}$, яка дорівнює ймовірності m_a або більше успіхів у схемі з $n-k$ випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху p_n^1 у кожному випробуванні. Тобто

$$\sum_{i=m_a}^{n-k} C_{n-k}^i \left(p_n^1\right)^i \left(1-p_n^1\right)^{n-i-k} = 1 - \mathsf{P}\left(\nu_n < m_a\right),$$

де

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n-k} X_i^n, \qquad X_i^n = \begin{cases} 0 & \text{з йм. } q_n^1, \\ 1 & \text{з йм. } p_n^1, \end{cases} \qquad q_n^1 := 1 - p_n^1.$$

Таким чином, треба довести, що

$$\mathsf{P}(\nu_n < m_a) \to 1 - \Phi(d_+(x, T-t)) = \Phi\left(\frac{\ln(K/x) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Наступним кроком доведення є застосування до нашої суми теореми 5.2. Враховуючи, що $\mathsf{E}\, X_j^n = p_n^1$, центруємо доданки, тобто покладемо $Y_j^n = X_j^n - p_n^1$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді

$$Y_j^n = \begin{cases} -p_n^1 & \text{з йм. } q_n^1, \\ 1 - p_n^1 & \text{з йм. } p_n^1, \end{cases} \qquad \mathsf{E}\, Y_j^n = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Визначимо другий і третій моменти:

$$\mathsf{E}\left(Y_j^n\right)^2 = p_n^1\left(1 - p_n^1\right)^2 + \left(p_n^1\right)^2 q_n^1 = \left(1 - p_n^1\right)\left(p_n^1\left(1 - p_n^1\right) + \left(p_n^1\right)^2\right) = q_n^1 p_n^1,$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left|Y_j^n\right|^3 &= \left(1 - p_n^1\right)^3 p_n^1 + \left(p_n^1\right)^3\left(1 - p_n^1\right) \\ &= p_n^1 - 3\left(p_n^1\right)^2 + 3\left(p_n^1\right)^3 - \left(p_n^1\right)^4 + \left(p_n^1\right)^3 - \left(p_n^1\right)^4 \\ &= p_n^1\left(2\left(p_n^1\right)^3 - 4\left(p_n^1\right)^2 + 3p_n^1 - 1\right). \end{aligned}$$

Очевидно, що $\mathsf{E}\left|Y_j^n\right|^3 < \infty$, $B_n = \sum_{j=1}^{n-k} p_n^1 q_n^1 = (n-k)p_n^1 q_n^1$.

Отже, умови теореми 5.2 виконуються, і нерівність (11) для розглядуваної суми має місце. Розглянемо величину L_n, враховуючи, що $k = k_t^n$:

$$\begin{aligned} L_n &= B_n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n-k}\mathsf{E}\left|Y_j^n\right|^3 = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} p_n^1\left(2\left(p_n^1\right)^3 - 4\left(p_n^1\right)^2 + 3p_n^1 - 1\right)}{\sqrt{\left((n-k)p_n^1 q_n^1\right)^3}} \\ &= -\frac{(n-k)p_n^1\left(2\left(p_n^1\right)^3 - 4\left(p_n^1\right)^2 + 3p_n^1 - 1\right)}{\sqrt{\left((n-k)p_n^1 q_n^1\right)^3}} = -\frac{2\left(p_n^1\right)^3 - 4\left(p_n^1\right)^2 + 3p_n^1 - 1}{\sqrt{(n-k)p_n^1\left(q_n^1\right)^3}} \\ &= \frac{\left(1 - p_n^1\right)\left(2\left(p_n^1\right)^2 - 2p_n^1 + 1\right)}{\sqrt{(n-k)p_n^1\left(q_n^1\right)^3}} = \frac{2\left(p_n^1\right)^2 - 2p_n^1 + 1}{\sqrt{(n-k)p_n^1 q_n^1}} \to 0. \end{aligned}$$

Тобто $L_n \to 0$, $n \to \infty$, звідки отримуємо, що

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|F_n(y) - \Phi(y)\right| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{15}$$

Згадаємо, що

$$F_n(y) = \mathsf{P}\left(B_n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n-k} Y_j^n < y\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n-k} X_j^n - (n-k)p_n^1}{\sqrt{(n-k)p_n^1 q_n^1}} < y\right)$$

за визначенням Y_j^n. Очевидно, що $F_n(\alpha_{m_a}) = \mathsf{P}(\nu_n < m_a)$, де

$$\alpha_{m_a} := \frac{m_a - (n - k_t^n)p_n^1}{\sqrt{(n - k_t^n)p_n^1 q_n^1}}.$$

Отже, треба довести, що

$$F_n(\alpha_{m_a}) \to \Phi\left(\frac{\ln(K/x) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

З цією метою перетворимо α_{m_a}. Спочатку використаємо розклад (6) і перетворимо ймовірності:

$$p_n^1 = \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{1 + \frac{rT}{n}} p_n^* = \frac{1}{2}\left(1 + (\sigma + \frac{R}{\sigma})\sqrt{\frac{T}{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

звідки випливає аналогічний асимптотичний розклад для q_n^1. Аналогічно до (12), маємо

$$\alpha_{m_a} = \frac{m_a(x_n) - (n - k_t^n)p_n^1}{\sqrt{(n - k_t^n)p_n^1 q_n^1}} = \frac{\ln(K/x_n) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad (16)$$

Позначимо

$$d(x) = \frac{\ln(K/x) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

і оцінимо

$$\left|F_n\left(d(x_n) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - \Phi(d(x))\right|$$
$$\le \sup_{y\in\mathbb{R}} |F_n(y) - \Phi(y)| + \left|\Phi(d(x)) - \Phi\left(d(x_n) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| \to 0$$

при $n \to \infty$, чим і завершується доведення теореми. $\square$

7. Висновок

В симетричної біноміальної моделі Кокса–Росса–Рубінштейна утворено аналог грецького символу "дельта" — функціоналу від ціни Європейського опціону у моделі Блека–Шоулса. Встановлено, що аналогом найуживанішого у моделях ринку Блека–Шоулса грецького символа "дельти" є так званий дельта-хедж у біноміальній моделі. Із застосуванням модифікації нерівності Ессеєна доведено, що при спрямуванні кількості періодів в моделях з дискретним часом до нескінченності послідовності цих аналогів збігаються до значень самих греків у граничній моделі.

Література

1. L.-B. Chang and K. Palmer, *Smooth convergence in the Binomial model*, Finance And Stochastics **11** (2007), 91–105.
2. R. J. Elliott, *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, 1982.
3. J. C. Cox, S. A. Ross, M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics **7**, **3** (1979), 229–263.
4. H. Föllmer, A. Schied, *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, Second revised and extended edition, Studies in Mathematics, vol. 27, Walter de Gruyter, 2004.
5. S. Heston and G. Zhou, *On the rate of convergence of discrete-time contingent claims*, Mathematical Finance **10**, (2000), no. 1, 53–75.
6. C.-C. Hsia, *On binomial option pricing*, Journal of Financial Research, **6** (1983), no. 1, 41–46.
7. Y. Mishura, *Diffusion approximation of recurrent schemes for financial markets, with application to Ornstein–Uhlenbeck process*, Opuscula Math. **35**, (2015), no. 1, 99—116.
8. V. V. Petrov, *Sums of Independent Random Variables*, Springer-Verlag, 1975.
9. В. П. Чистяков, *Курс теории вероятностей*, Москва, 1982.
10. A. N. Shiryaev, *Probability*, vol. 1, 2, Springer, 2011.

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: kuchuk.iatsenko@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко- математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Надійшла 01/10/2014