Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 96, 2017, с. 125–130

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 96, 2017, pp. 125–130

УДК 519.21

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВИСОКОНАДІЙНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАХИСТОМ У ВИПАДКУ ПУАССОНІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ВІДНОВЛЕННЯ

О. О. КУШНІР, В. П. КУШНІР

Анотація. Наводяться оцінки характеристик надійності високонадійної системи із захистом у припущенні, що процес відновлення є пуассонівським.

Ключові слова і фрази. Процес відновлення, альтернуючий процес, система із захистом, теорема Реньї, напівмарковський процес.

1. Вступ

У [1] наводяться рівномірні оцінки відхилення від функції показникового розподілу розв'язків інтегрального рівняння

$$\Phi = \theta L + (1-\theta)\Phi \star K, \tag{1}$$

де L, K — задані функції розподілу невід'ємних випадкових величин, $\theta \in (0,1)$, $\star$ — згортка функцій розподілу: $\Phi \star K(t) = \int_0^t \Phi(t-x)\,dK(x)$.

Ці оцінки можна використати при дослідженні характеристик надійності системи із захистом [2, с. 75]. У роботах [3, 4, 5] це робилося в загальному вигляді.

Метою роботи є уточнення оцінок цих характеристик та розгляд інших у випадку додаткового припущення, що процес відновлення є пуассонівським. Зокрема оцінюється гарантований час безвідмовної роботи із заданою надійністю, наводяться оцінки функцій розподілу проміжків між відмовами та кількості відмов.

У п. 2 статті сформульовано результати, а в п. 3 наведено їх доведення.

2. Основні умови та результати

Система із захистом [2, с. 75] складається з альтернуючого процесу та незалежного від нього процесу відновлення. Відмова системи наступає в момент відновлення останнього, якщо в цей момент альтернуючий процес перебуває у фазі ремонту.

У цій роботі вважаємо, що процес відновлення — пуассонівський із параметром v.

Будемо позначати $m(F)$, $m_2(F)$ — математичне сподівання та другий початковий момент відповідно випадкової величини з функцією розподілу $F(t)$.

Позначимо функції розподілу фаз безвідмовної роботи та ремонту альтернуючого процесу G та B відповідно, $\hat{\beta}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dB(x)$, показникову функцію розподілу – $E_a(t) = 1 - e^{-at}$, $t \geq 0$.

Назвемо t_0 гарантованим часом безвідмовної роботи системи із захистом із надійністю γ, якщо ймовірність того, що система не відмовить до часу t_0, є не меншою від γ.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K20; Secondary 90B25.

Теорема 2.1. *Гарантований час безвідмовної роботи системи із захистом із надійністю* γ *не менший від* $T\ln\frac{1-\theta}{\gamma+2\theta\varkappa}$, *де* $T=\frac{\hat\beta(v)m(G)}{1-\hat\beta(v)}$, $\theta=1-\hat\beta(v)$,

$$A(t)=\frac{1}{\hat\beta(v)}\int_0^t e^{-vx}\,dB(x),\qquad K(t)=G\star A(t),$$
$$m(A)=\frac{1}{\hat\beta(v)}\int_0^{+\infty} xe^{-vx}\,dB(x)\le m(B),$$
$$\varkappa=\frac{m_2(K)}{2m^2(K)}=\frac{m_2(G)+2m(G)m(A)+m_2(A)}{2\big(m(G)+m(A)\big)^2},$$

причому $m_2(A)\le m_2(B)$.

Функцію розподілу часу безвідмовної роботи системи із захистом позначатимемо $\Phi_1(x)$, якщо в початковий момент часу розпочалася фаза ремонту альтернуючого процесу, і $\Psi_1(x)$, якщо в початковий момент часу розпочалася фаза безвідмовної роботи.

Теорема 2.2. *Для функції розподілу часу безвідмовної роботи системи із захистом при різних початкових умовах виконуються нерівності*

$$E_q(x)-qm(L)-2\varkappa\int_0^x\big(1-B(y)\big)ve^{-vy}\,dy\le\Phi_1(x);$$
$$\Phi_1(x)\le(1-\theta)E_q(x)+(1+2\varkappa)\int_0^x\big(1-B(y)\big)ve^{-vy}\,dy;$$
$$\Psi_1(x)\le(1-\theta)E_q(x)+\theta(1+2\varkappa)G(x);$$
$$\Psi_1(x)\ge E_q(x)-q\left(m(L)+\int_0^x\big(1-G(y)\big)\,dy\right)-2\varkappa\theta G(x),$$

де $r=\frac{\theta}{1-\theta}$, $q=\frac{r}{m(G)+m(A)}\le\frac{r}{m(G)}=\frac{1}{T}$, $m(L)=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x\big(1-B(x)\big)\,dE_v(x)\le\frac{1}{v}$.

Теорема 2.3. *Якщо у початковий момент часу розпочалася фаза безвідмовної роботи альтернуючого процесу, то для розподілу кількості відмов системи із захистом* ξ *виконується нерівність*

$$\mathsf{P}(\xi\ge n)\le\theta+(1-\theta)\bar p_n(t)+2\varkappa\theta\min\{n,1+qt\},$$

де

$$\begin{aligned}\bar p_{n+1}(t)=&\left(1-\sum_{k=1}^n\tau_k\right)E_q(t)+\sum_{k=1}^n\tau_k\left(1-\sum_{i=1}^{n-k}\tau_i\right)E_q^{\star2}(t)+\\&+\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\sum_{i=1}^{n-k}\tau_i\left(1-\sum_{j=1}^{n-k-i}\tau_j\right)E_q^{\star3}(t)+\cdots\\&\cdots+\big(\tau_1^{n-1}(1-\tau_1)+(n-1)\tau_1^{n-2}\tau_2\big)E_q^{\star n}(t)+\tau_1^nE_q^{\star(n+1)}(t),\quad n\ge0;\end{aligned}$$
$$\theta_n=\int_0^{+\infty}\frac{(vx)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-vx}\,dB(x)=\int_0^{+\infty}\left(E_v^{\star(n-1)}(x)-E_v^{\star n}(x)\right)dB(x),\quad n\ge1;$$
$$\tau_k=\frac{\theta_{k+1}}{\theta},\quad k\ge1;$$

зокрема

$$\mathsf{P}(\xi\ge1)=\Psi_1(t)\le\theta+(1-\theta)E_q(t)+2\varkappa\theta;$$
$$\mathsf{P}(\xi\ge2)\le\theta+(1-\theta)\left(\frac{\theta_2}{\theta}E_q^{\star2}(t)+\frac{\theta-\theta_2}{\theta}E_q(t)\right)+2\varkappa\theta\big(1+E_q(t)\big).$$

Зауваження 2.1. Розподіл $p_n(t) = \bar{p}_n(t) - \bar{p}_{n+1}(t)$, $n \geq 1$, $p_0(t) = 1 - \bar{p}_1(t)$ є розподілом кількості подій стаціонарного потоку без післядії на проміжку часу $(0,t)$ і має твірну функцію $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n = e^{qt(\omega(x)-1)}$, де $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{n+1}}{\theta}\, x^n$ [7, с. 42].

Зауваження 2.2. Якщо в початковий момент часу розпочалася фаза ремонту альтернуючого процесу, то середній час безвідмовної роботи системи із захистом дорівнює $T + \frac{1}{v}$, а якщо фаза закінчилася, то $T + \frac{1}{v} + \frac{1}{m(G)}$.

3. Доведення

Доведення теореми 2.1. Якщо в початковий момент часу розпочалася фаза ремонту альтернуючого процесу, то функція розподілу часу безвідмовної роботи системи із захистом $\Phi_1(t)$ є розв'язком рівняння (1) із $K(t) = G \star A(t)$, де

$$A(t) = \frac{1}{\hat{\beta}(v)} \int_0^t e^{-vx}\, dB(x), \qquad L(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^t \big(1 - B(x)\big)\, dE_v(x).$$

Позначимо $\Phi(t)$ розв'язок рівняння (1) із $L(t) = K(t)$, для якого, згідно з [1, теорема 2], виконуються рівномірні оцінки

$$|\Phi(t) - E_q(t)| \leq 2r\varkappa. \tag{2}$$

Функція $\Phi_1(t)$ подається через $\Phi(t)$ формулою

$$\Phi_1(t) = L \star \big(\theta + (1-\theta)\Phi(t)\big). \tag{3}$$

Із (2), (3) отримуємо

$$\Psi_1(t) \leq \Phi_1(t) \leq (1-\theta)E_q(t) + \theta(1 + 2\varkappa). \tag{4}$$

Якщо прирівняти праву частину цієї нерівності до $1-\gamma$, то можна виразити гарантований час безвідмовної роботи (потім використовуємо нерівність $\frac{1}{q} \geq T$).

Нерівності $m(A) \leq m(B)$, $m_2(A) \leq m_2(B)$ випливають із того, що при всіх $t > 0$ $A(t) \geq B(t)$, що, у свою чергу, отримується з такої леми.

Лема 3.1. *Нехай $V(t)$ — невід'ємна монотонна функція, $F(t)$ — функція розподілу невід'ємної випадкової величини, $\theta = \int_0^\infty V(x)\, dF(x)$, $L(t) = \frac{1}{\theta}\int_0^t V(x)\, dF(x)$. Тоді, якщо $V(t)$ — неспадна, то при всіх $t > 0$ виконується нерівність $L(t) \leq F(t)$, а якщо $V(t)$ — незростаюча, то нерівність $F(t) \leq L(t)$.*

Доведення леми 3.1. Якщо $V(t)$ — неспадна, то функція $F - L$ зростає від 0, поки $V(x) < \theta$, а потім спадає до 0 на нескінченності. Тому вона — невід'ємна. Аналогічно розглядається випадок незростаючої $V(t)$.

Лему 3.1 доведено. □

Теорему 2.1 доведено. □

Доведення теореми 2.2. Верхні оцінки одержано в (4), а для отримання нижніх використовується таке твердження.

Лема 3.2. $E_q \star L(t) \geq E_q(t) - q\int_0^t \big(1 - L(x)\big)\, dx$.

Доведення.

$$E_q \star \big(1 - L(t)\big) = q\int_0^t \big(1 - L(t-x)\big)e^{-qx}\, dx \leq q\int_0^t \big(1 - L(t-x)\big)\, dx = q\int_0^t \big(1 - L(x)\big)\, dx.$$

Лему 3.2 доведено. □

Теорему 2.2 доведено. □

Доведення теореми 2.3. Функції $\mathsf{P}(\xi \geq n) = \Psi_n(t)$ є мінімальними розв'язками рівняння типу відновлення

$$\Psi_n(t) = \sum_{k=2}^{n} \theta_k A_k \star G \star \Psi_{n+1-k}(t) + \left(\theta - \sum_{k=2}^{n} \theta_k\right) L_n \star G(t) + (1-\theta) A \star G \star \Psi_n(t).$$

Оскільки $\frac{(vx)^{n-1}}{(n-1)!}$ — зростаюча функція, то, за лемою 3.1, при всіх $t > 0$ виконується нерівність $A_k(t) \leq A(t)$, тому

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{\theta_k}{\theta} \Phi \star \Psi_{n+1-k}(t) + \left(\theta - \sum_{k=2}^{n} \theta_k\right) \left(1 + \frac{1-\theta}{\theta} \Phi(t)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \Phi \star \Psi_{n-k}(t) + \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k\right) \big(\theta + (1-\theta)\Phi(t)\big), \end{aligned} \tag{5}$$

де $\Phi(t)$ — розв'язок рівняння (1) із $L(t) = K(t)$.

Зауважмо, що $\bar{p}_n(t)$ задовольняє рекурентне співвідношення

$$\bar{p}_n(t) = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k\right) E_q(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \bar{p}_{n-k} \star E_q(t). \tag{6}$$

Методом математичної індукції при $n \geq 1$ доведемо нерівність

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) \leq \theta + (1-\theta)\bar{p}_n(t) + 2\varkappa\theta \Bigg(& 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k E_q(t) + \sum_{k=1}^{n-2} \tau_k \sum_{i=1}^{n-1-k} \tau_i E_q^{\star 2}(t) + \\ & + \sum_{k=1}^{n-3} \tau_k \sum_{i=1}^{n-2-k} \tau_i \sum_{j=1}^{n-1-k-i} \tau_j E_q^{\star 3}(t) + \cdots \\ & \cdots + \left(\tau_1^{n-2} + (n-2)\tau_1^{n-3}\tau_2\right) E_q^{\star(n-2)}(t) + \tau_1^{n-1} E_q^{\star(n-1)}(t) \Bigg). \end{aligned} \tag{7}$$

Доведення нерівності (7). При $n = 1$ нерівність (7) випливає з (4).

Замінимо в (7) n на $n-k$ і згорнемо з $\Phi(t)$. Врахувавши, що згідно з (2),

$$(1-\theta)\bar{p}_{n-k} \star \Phi(t) \leq (1-\theta)\bar{p}_{n-k} \star E_q(t) + 2\varkappa\theta\bar{p}_{n-k}(t),$$

а в інших доданках $\Phi(t) \leq 1$, дістанемо

$$\begin{aligned} \Psi_{n-k} \star \Phi(t) \leq \theta + (1-\theta)\bar{p}_{n-k} \star E_q(t) + 2\varkappa\theta \Bigg(& 1 + \bar{p}_{n-k}(t) + \sum_{i=1}^{n-k-1} \tau_i E_q(t) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-k-2} \tau_i \sum_{j=1}^{n-k-1-i} \tau_j E_q^{\star 2}(t) + \cdots \\ & + \left(\tau_1^{n-k-2} + (n-k-2)\tau_1^{n-k-3}\tau_2\right) E_q^{\star(n-k-2)}(t) + \\ & + \tau_1^{n-k-1} E_q^{\star(n-k-1)}(t) \Bigg) = \end{aligned}$$

$$= \theta + (1-\theta)\bar{p}_{n-k} \star E_q(t) + 2\varkappa\theta \Bigg(1 + E_q(t) + \sum_{i=1}^{n-k-1} \tau_i E_q^{\star 2}(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n-k-2} \tau_i \sum_{j=1}^{n-k-1-i} \tau_j E_q^{\star 3}(t) + \cdots \\ + \left(\tau_1^{n-k-2} + (n-k-2)\tau_1^{n-k-3}\tau_2\right) E_q^{\star(n-k-1)}(t) + \\ + \tau_1^{n-k-1} E_q^{\star(n-k)}(t) \Bigg). \tag{8}$$

Підставимо (8) у праву частину (5) разом із нерівністю

$$\theta + (1-\theta)\Phi(t) \le \theta(1+2\varkappa) + (1-\theta)E_q(t),$$

яка отримується з (2). Використавши (6), дістанемо (7).

Нерівність (7) доведено. □

Оскільки всі суми в (7) не перевищують 1, то

$$\Psi_n(t) \le \theta + (1-\theta)\bar{p}_n(t) + 2\varkappa\theta \left(1 + E_q(t) + E_q^{\star 2}(t) + \cdots + E_q^{\star(n-1)}(t) \right),$$

звідки отримуємо результат теореми 2.3, бо всі доданки в дужках не перевищують 1, а $1 + E_q(t) + E_q^{\star 2}(t) + \cdots = 1 + qt$. □

Твердження зауваження 2.2 можна отримати інтегруванням (3) та (1).

Автори вдячні рецензентові за суттєві зауваження, що дозволили покращити рівень викладу.

Список літератури

1. N. V. Kartashov, *Inequalities in the Rényi theorem*, Teor. Veroyatnost. Mat. Stat. **45** (1991), 27–33; English transl. in Theory Probab. Math. Statist. **45** (1992), 23–28.
2. V. S. Korolyuk, *Stochastic Models of Systems*, "Lybid'", Kyiv, 1993. (Ukrainian)
3. O. O. Kushnir, *A study of a highly reliable system with protection by the Rényi theorem*, Teor. Imovir. Mat. Stat. **55** (1996), 117–124; English transl. in Theory Probab. Math. Statist. **55** (1997), 121–128.
4. O. O. Kushnir, *A quantitative lower bound for the expected value of the failure time of a highly reliable system with protection in a nonstationary regime*, Teor. Imovir. Mat. Stat. **61** (1999), 91–96; English transl. in Theory Probab. Math. Statist. **61** (2000), 95–100.
5. O. O. Kushnir, *A logarithmic lower bound for the expected value of the time of failure-free operation of a highly reliable system with protection in a nonstationary mode*, Teor. Imovir. Mat. Stat. **65** (2001), 104–109; English transl. in Theory Probab. Math. Statist. **65** (2002), 115–121.
6. D. J. Daley, *Tight bounds for the renewal function of a random walk*, Ann. Probab. **8** (1980), no. 3, 615–621.
7. A. Ya. Khinchin, *Works on Mathematical Queueing Theory*, Fizmatgiz, Moscow, 1963. (Russian)

Кафедра вищої математики, Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, м. Рівне, Україна, 33028

Адреса електронної пошти: kuchniroo@gmail.com

Кафедра вищої математики, Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, м. Рівне, Україна, 33028

Адреса електронної пошти: a_vp_kushnir@meta.ua

Стаття надійшла до редколегії 30.04.2016

A STUDY OF CHARACTERISTICS OF A HIGHLY RELIABLE SYSTEM WITH PROTECTION ASSUMING THAT THE RENEWAL PROCESS IS POISSON

O. O. KUSHNIR, V. P. KUSHNIR

Abstract. We assess reliability characteristics of a highly reliable system of protection assuming that the renewal process is Poisson.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ВЫСОКОНАДЕЖНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАЩИТОЙ В СЛУЧАЕ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

О. О. КУШНИР, В. П. КУШНИР

Аннотация. Приводятся оценки характеристик надежности высоконадежной системы с защитой в предположении, что процесс восстановления — пуассоновский.