УДК 519.1

Г.А. ШУЛИНОК

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ РЕГУЛЯРНЫХ NM-ГРАФОВ

Впервые рассматриваются регулярные NM-графы с произвольным числом образующих. Проведена первичная классификация регулярных NM-графов. Полностью решена проблема изоморфизма регулярных NM-графов с двумя образующими. Предпринята попытка перечисления изоморфных регулярных NM-графов.

Введение. Структура NM-графов (натуральных модульных графов) как отдельного подкласса числовых графов достаточно изучена [1-3]. В последнее время особый интерес вызывают вопросы изоморфизма числовых графов [4-5]. Данная работа является продолжением [5], которой дан исчерпывающий ответ на вопрос об изоморфизме NM-графов с двумя образующими. В работе делается попытка обосновать общий подход к проблеме изоморфизма произвольных NM-графов. При этом особое внимание уделяется регулярным NM-графам в предположении, что решение задачи об изоморфизме этих графов даст необходимые и достаточные условия для решения классической задачи изоморфизма в применении к числовым графам.

Пусть заданы две матрицы инцидентности вершин графов, из которых A_1 соответствует графу G_1, а A_2 - графу G_2. Эти графы будут изоморфными $(G_1 \cong G_2)$, если найдется такая перестановочная матрица P, для которой справедливо

$$A_2 = PA_1P^T .$$

Матрице P соответствует перестановка $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, такая, что если на множестве вершин графа G_2 сделать перестановку p, то полученный граф станет полной копией графа G_1. Рассмотрим матрицу образующих полного NM-графа.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Каждой образующей $1 \le u \le n-1$ в матрице A соответствует две последовательности чисел u, расположенных параллельно над и под главной диагональю, состоящей из нулей. Матрица образующих произвольного NM-графа отличается от матрицы (1) тем, что на месте несуществующих образующих стоят нули. Поэтому степень i-й вершины s_i в таких графах равна количеству ненулевых элементов в i-й строке (столбце) матрицы образующих. Построим график степеней вершин графа исходя из указанных свойств матрицы образующих:
1) если $2u \le n-1$, то образующая u добавляет к степени вершины j величину

$$\Delta_j(u)=\begin{cases} 1, & \text{для} \quad 1 \le j \le u; \\ 2, & \text{для} \quad u+1 \le j \le n-u; \\ 1, & \text{для} \quad n-u+1 \le j \le n; \end{cases} \qquad (2)$$

2) если $2u > n-1$, то образующая u добавляет к степени вершины j величину

$$\Delta_j(u)=\begin{cases} 1, & \text{для} \quad 1 \le j \le n-u; \\ 0, & \text{для} \quad n-u+1 \le j \le u; \\ 1, & \text{для} \quad u+1 \le j \le n. \end{cases} \qquad (3)$$

Единственная образующая при $n \equiv 0 \pmod 2$, которая добавляет всегда единицу к степени произвольной вершины , это $u=\frac{n}{2}$. Построим на рис. 1 графики

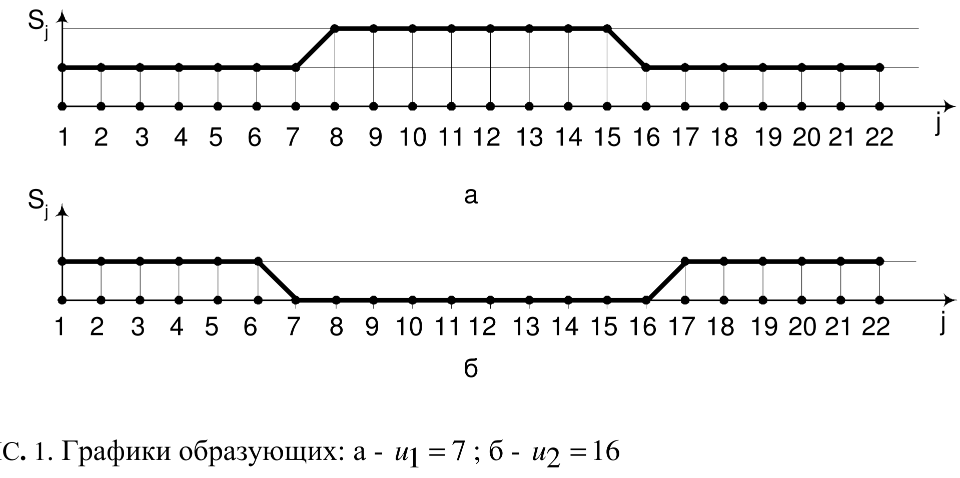

РИС. 1. Графики образующих: а - $u_1 = 7$; б - $u_2 = 16$

образующих используя (2) - (3) для $n = 22$, $U = \{7, 16\}$. Граф с множеством образующих $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ имеет вектор степеней $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где

$$s_j = \sum_{u \in U} \Delta_j(u); \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Путем наложения таких графиков для каждой образующей получим суммарный график функции степеней вершин, которую обозначим $S(G)$. Очевидно, что если графики образующих имеют центральную ось симметрии, то и график $S(G)$ тоже будет симметричным. Поэтому все свойства таких графиков будут изучаться только для их левой половины. Графики образующих для (2) имеют подъем в точке $j = u$, а для образующих (3) – спуск в точке $j = n - u$. При построении графика функции $S(G)$ некоторые подъемы могут накладываться на спуски и нейтрализовать друг друга. Это возможно только в случае, если $u_k + u_l = n \quad (k \neq l)$. Если таких образующих нет, то число подъемов функции $S(G)$ будет равно числу образующих типа (2), а число спусков – числу образующих типа (3). В качестве примера рассмотрим график $S(G)$ на рис. 2.

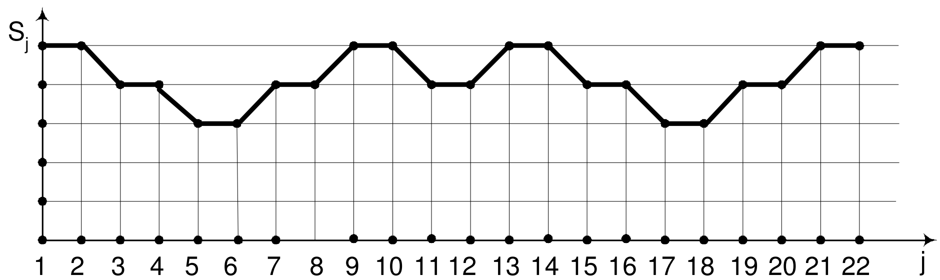

РИС. 2**.** График функции степеней вершин

Подсчитав число подъемов и спусков графика (напоминаем, что все делается для левой половины графика, т.е. $1 \le j \le 11$), находим, что оно равно 5 (три спуска и два подъема). Это означает, что должно быть не меньше 5 образующих. Так как $\min S(G) = 3$, а $\max S(G) = 5$, то число образующих должно быть в этих пределах, что определяет окончательно число образующих, равное 5. Подъемы на графике имеются в точках $j = 6, 8$, что соответствует образующим $u_1 = 6, \quad u_2 = 8$, а спуски - в точках $j = 2, 4, 10$. Это соответствует отношениям $n - u_3 = 10$, $n - u_4 = 4$, $n - u_5 = 2$, откуда $u_3 = 12$, $u_4 = 18$ и $u_5 = 20$. Непосредственно можно убедиться, что эти образующие соответствуют данному графику.

Вектор степеней графа $S=(3^4,4^{10},5^8)$, где верхний индекс указывает число вершин с данной степенью. Если вектор считать одним из инвариантов графа, то этому вектору соответствует много NM-графов. Назовем график функции $S(G)$ для заданного вектора S каноническим, если он является монотонно возрастающим, построим его на рис. 3.

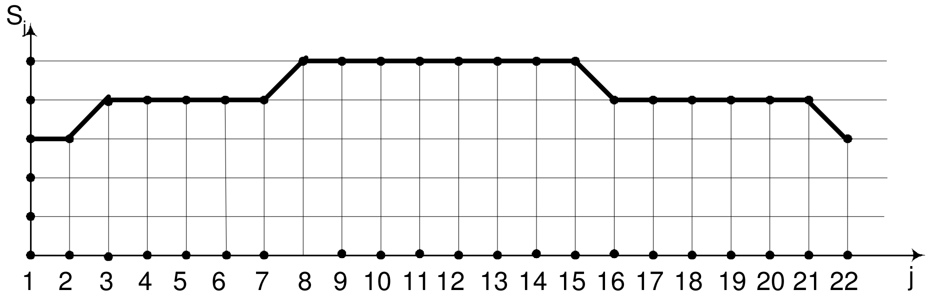

РИС. 3. Канонический график функции степеней вершин

Граф, соответствующий каноническому графику функции $S(G)$, назовем каноническим. Здесь число подъемов равно два, а спусков не будет никогда по правилу построения. Но число образующих должно быть, по крайней мере, три. Третья образующая не должна иметь ни подъемов, ни спусков, и такая образующая существует для четных n и имеет вид $u_3=\frac{n}{2}$. Таким образом, канонический график $S(G)$ строится единственным образом с помощью трех образующих $u_1=2$ (точка подъема $j=2$), $u_2=7$ (точка подъема $j=7$) и $u_3=11$. Очевидно, что число образующих канонического графа равно $\min S(G)$. Если значения графика увеличить всюду на единицу, то тогда пришлось бы использовать четыре образующих, хотя подъемов было бы по-прежнему два. В этом случае две образующие в сумме должны не допускать ни подъемов, ни спусков. Такие образующие существуют и имеют вид u_3 и $u_4=n-u_3$, но при этом канонический график строится не единственным образом. Все полученные результаты можно подытожить в виде утверждений.

Утверждение 1. Для изоморфных NM-графов число образующих не является инвариантом.

Утверждение 2. Канонический граф, реализующий заданный вектор степеней $S=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, содержит наименьшее число образующих.

В процессе исследования проблемы изоморфизма NM-графов приходится пользоваться графиком степеней вершин, при этом часть графика может принадлежать образующей $u=\frac{n}{2}$ (для четных n) или набору пар образующих типа u и $n-u$. Остальные образующие являются надстройкой над ними. Пары образующих, отдельно взятые в различных комбинациях, представляют собой регулярные графы. Действительно, для них любой график степеней вершин не содержит ни подъемов, ни спусков, т.е. является константой, что и есть определением регулярности графа. Тем самым доказана

Лемма 1. Все регулярные NM-графы степени $2k$ имеют множество образующих вида $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_k,n-u_k,\ldots,n-u_2,n-u_1\}$, где $1\le u_1\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$, $(i=1,2,\ldots,k)$. Регулярный NM-граф степени $2k+1$ возможен лишь при четном числе вершин и отличается от графа степени $2k$ дополнительной образующей $u=\frac{n}{2}$.

Отсюда вытекает, что регулярный граф с одной образующей существует только для четного числа вершин. Рассмотрим регулярные графы степени 2, множества образующих которых представляются в виде $U=\{u,n-u\}$, где $1\le u\le n-1$. Таких множеств $\left\lfloor\frac{u-1}{2}\right\rfloor$, но некоторые из них могут соответствовать изоморфным графам. Известно [5], что если u_1 и u_2 взаимно просты, а также $u_1+u_2=n$, то такой граф является гамильтоновым циклом.

Лемма 2. Число NM-графов с двумя образующими, являющихся гамильтоновыми циклами, равно $\frac{\varphi(n)}{2}$, где $\varphi(n)$ - функция Эйлера.

Доказательство. Очевидно, что если $\text{НОД}(u,n-u)=1$, то и $\text{НОД}(u,n)=1$, а всего таких значений u равно $\varphi(n)$. Среди пар $(u,n-u)$ всегда $u<n-u$, поэтому таких пар, обе образующие которых взаимно просты, равно $\frac{\varphi(n)}{2}$. Покажем, что существует такая перестановочная матрица P, которая переводит любой гамильтонов цикл с образующими $U=\{u,n-u\}$ в такой же цикл с образующими $U=\{1,n-1\}$. Этой матрице для $k=1,2,\ldots,n$ соответствует перестановка $p=\begin{pmatrix}1+(k-1)u\\ k\end{pmatrix}$. Действительно, любая линейная форма $u(k-1)+1$ при $\text{НОД}(u,n)=1$ пробегает все вычеты по $\bmod u$, если k пробегает значения от 1 до n.

Теперь можно полностью описать структуру регулярных графов с двумя образующими.

Теорема. Граф $G_n(u_1,\ u_2)$ - плоский граф; если $n \geq u_1 + u_2$, то он состоит из $n - u_1 - u_2 + k$ циклов, из которых k циклов имеют длину $\frac{u_1 + u_2}{k}$ и $n - u_1 - u_2$ циклов имеют длину 4, где $k = \text{НОД}(u_1, u_2)$.

Доказательство. Если $n < u_1 + u_2$, то граф является подграфом фактор-графа, поэтому он плоский. Пусть $n \geq u_1 + u_2$.

Рассмотрим подграф $G_{u_1+u_2}(u_1,u_2)$ графа $G_n(u_1,u_2)$. Он состоит из k циклов $C_i(1,2,\ldots,k)$, где $k = \text{НОД}(u_1,u_2)$. Цикл C_i состоит из последовательности вершин $(i + tu_1)\left[\text{mod}(u_1 + u_2)\right]$, где $t = 0,1,\ldots,\frac{u_1 + u_2}{k} - 1$. Каждая новая вершина с номером $j + u_1 + u_2$, $(j \geq 1)$ добавляется к внешней стороне цикла C_i $\left(j \equiv i \left(\text{mod}\,[u_1 + u_2]\right)\right)$ и окружает вершину j, образуя новый цикл длиной 4 с вершинами $(j + u_1 + u_2,\ j + u_1,\ j,\ j + u_2)$. В результате длина внешнего цикла C_i не изменится, а вершина j закроется вершиной $j + u_1 + u_2$. Этот процесс может быть продолжен для всех циклов C_i, пока j не достигнет $n - u_1 - u_2$. В итоге получаем k циклов длиной $\frac{u_1 + u_2}{k}$ и $n - u_1 - u_2$ циклов длиной 4.

Пример. $U = \{6, 9\}$**.** Для $n = 15$ получим (рис. 4, ребра выделены полужирным) три цикла длиной 5. Добавляя вершины (увеличивая n) до 25 получаем

вершина 16 окружает вершину 1, образуя цикл (16, 7, 1, 10);
вершина 17 окружает вершину 2, образуя цикл (17, 8, 2, 10);
… … …
вершина 25 окружает вершину 10, образуя цикл (25, 16, 10, 19).

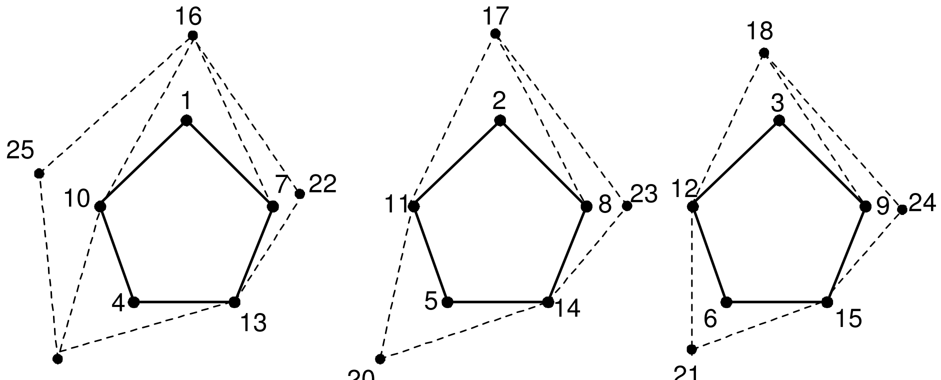

РИС. 4. Циклы в графе с двумя образующими: $U = \{6, 9\}$, $n = 25$

Таким образом, получаем еще $25-15=10$ четырехвершинных циклов.

Теорема позволяет построить алгоритм плоской укладки NM-графа с двумя образующими.

Заключение. В данной работе заложены основы для определения достаточных условий изоморфности регулярных NM-графов. Из-за ограничения на объем статьи в ней представлены не все полученные результаты. В дальнейшем планируется в двух-трех статьях представить полное и подробное решение этой проблемы.

Г.О. Шулінок

ПРО ІЗОМОРФІЗМ РЕГУЛЯРНИХ МОДУЛЬНИХ ГРАФІВ

Розглядаються регулярні NM-графи з довільним числом твірних. Проведена первинна класифікація регулярних NM-графів. Повністю розв’язана задача ізоморфізму регулярних NM-графів з кількістю твірних до 2. Виконана спроба переліччення ізоморфних регулярних NM-графів.

G.A. Shulinok

ISOMORPHIZM OF REGULAR NM-GRAPHS

Regular natural modular graphs with arbitrary number of generatices are considered. The first classification of regular NM-graphs is made. For NM-graphs with two generatrices an isomorphizm problem is solved completely. The paper tries to enumerate isomorphic regular NM-graphs.

1. *Шулинок И.Э.* Об одном классе числовых графов // Теория и приложения методов оптимизации. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1998. – С. 24–29.
2. *Шулинок И.Э.* О связности натуральных модульных графов // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 5. – С. 50–53.
3. *Шулинок И.Э.* О связности и цикломатическом числе натуральных модульных графов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1999. – С. 51–57.
4. *Донец Г.А, Шулинок Г.А.* Об изоморфизме натуральных арифметических графов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2003. – С. 47–53.
5. *Шулінок Г.О.* Про ізоморфізм натуральних модульних графів // Теорія оптимальних рішень. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2004. – С. 69–73.

Получено 23.03.2005