УДК 517.977

А.А. БЕЛОУСОВ

ИМПУЛЬСНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматриваются игровые задачи преследования для линейных систем с общими выпуклыми интегральными ограничениями на управления. Предлагается расширение дифференциальной игры с помощью импульсных управлений. Формулируется аналог условия Л.С. Понтрягина, позволяющий получить достаточные условия решения задачи за некоторое гарантированное время.

Введение. Динамические системы с интегральными ограничениями на управление имеют важное прикладное значение. Неудивительно, что довольно много работ посвящено изучению дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Однако они сосредотачивались главным образом на одном типе ограничений – функций-управлений из гильбертова пространства L_2. Но интерес представляют и более общие типы интегральных ограничений. Отметим статью М.С. Никольского [1], в которой игра обобщается на случай управления преследователя из пространства Орлича. В данной работе рассматривается дифференциальная игра с интегральным ограничением на управление преследователя, которое определяется выпуклым функционалом самого общего вида. В частности, не предполагается конечность ограничивающего функционала и ему сопряженного [2] на всем пространстве, как в [3]. При исследовании систем управления достаточно общего вида (как например, в [4], для управлений из пространства L_1) естественным является привлечение аппарата управлений – мер и обобщенных функций [5, 6], а также обобщение понятий управления и решения. В данной работе рассматривается расширение исходной дифференциальной игры с помощью импульсных управлений. Работа развивает исследования [3, 4].

Динамика игры задается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \quad z(0) = z^0, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^l$, A, B, C – постоянные матрицы.

Терминальное множество M является h-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим π оператор проектирования из $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение к M в $\mathbb{R}^n$.

Управляющие вектор-функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ находятся в распоряжении (соответственно) игрока-преследователя и убегающего игрока. Управления игроков ограничены интегралами:

$$\int_0^\infty \varphi(u(\tau))\,d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \psi(v(\tau))\,d\tau \le 1. \tag{2}$$

Функция φ, $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, предполагается неотрицательной, выпуклой, полунепрерывной снизу на своей эффективной области $\operatorname{dom}\varphi$ [2], $\operatorname{dom}\varphi = \left\{u \in \mathbb{R}^m : \varphi(u) < \infty\right\}$. Обозначим множество уровня функции φ $\Phi(\gamma)$, $\Phi(\gamma) = \left\{u \in \mathbb{R}^m : \varphi(u) \le \gamma\right\}$. Полагаем, что $\varphi(0) = 0$ и множество уровня $\Phi(\gamma)$ ограничено хотя бы для одного неотрицательного γ.

Функция ψ, $\psi: V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^l$, предполагается неотрицательной и полунепрерывной сверху на своей области определения V.

Отметим, что если при изучении игры (1), (2) ограничиться лишь измеримыми (суммируемыми) управлениями, то множество достижимости для системы (1) может быть незамкнутым, хотя и ограниченным. Причина этого явления состоит в том, что множество управлений, удовлетворяющих (2), не ограничено (по норме) в обычном смысле и содержит функции, которые сколь угодно близки к управлениям типа δ-функций. Общим подходом для замыкания множества управлений в *слабой топологии является расширение исходной задачи с помощью функций ограниченной вариации или управлений-мер [5, 6].

Для исследования игровой задачи (1), (2) мы ограничимся привлечением аппарата импульсных управлений. Импульсное воздействие в момент τ описывается с помощью обобщенной функции Дирака $\delta(t-\tau)$ [5–7], которая характеризуется свойством

$$\int_a^b f(t)\delta(t-\tau)\,dt = \begin{cases} f(\tau), & \tau \in [a,b], \\ 0, & \tau \notin [a,b], \end{cases}$$

для любой непрерывной функции $f(t)$. В качестве управлений преследователя и убегающего игрока возьмем обобщенные вектор-функции:

$$U(t) = u(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \delta(t - \eta_i), \quad V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta(t - \theta_j), \quad t \in \mathrm{R}_+ = [0, \infty), \tag{3}$$

$$0 \le \eta_1 < \ldots < \eta_i < \ldots, \quad 0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_j < \ldots, \quad u(t) \in \mathrm{R}^m, v(t) \in \mathrm{R}^l, b_i \in \mathrm{R}^m, c_j \in \mathrm{R}^l,$$

где $u(t)$ и $v(t)$ – измеримые функции; последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ определяют моменты импульсов, векторы b_i и c_j определяют их величины. Полагаем, что последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ не имеют конечных точек сгущения, а значит на любом ограниченном интервале времени число импульсов конечно. Тогда ограничение (2) на управления игроков примет вид [6]

$$\int_0^{\infty} \varphi(u(\tau))\, d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(b_i) \le 1, \quad \int_0^{\infty} \psi(v(\tau))\, d\tau + \sum_{j=1}^{\infty} \psi(c_j) \le 1\,. \tag{4}$$

Управления вида (3), удовлетворяющие условиям (4), будем называть допустимыми.

При подстановке управлений (3) в уравнение (1) получается так называемое дифференциальное уравнение с толчками [7]. Решением этого уравнения является функция $z(t)$, которая абсолютно непрерывна всюду, кроме моментов импульсов, и имеет вид

$$z(t) = e^{At} z^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left[Bu(\tau) - Cv(\tau)\right] d\tau + \sum_{\eta_i \le t} e^{A(t-\eta_i)} Bb_i - \sum_{\theta_j \le t} e^{A(t-\theta_j)} Cc_j\,, \tag{5}$$

где суммирование осуществляется по всем моментам импульсов не большим t.

Определение. Будем говорить, что игра может быть закончена в момент $T = T(z^0)$, если для любого допустимого управления убегающего игрока $V(t)$ существует допустимое управление преследователя $U(t)$, которое гарантирует приведение решения уравнения (5) $z(t)$, соответствующего управлениям $(U(t), V(t))$ и начальному положению z^0, на терминальное множество в момент $T : z(T) \in M$. Считаем, что при построении своего управления $U(t)$ преследователь в момент t может использовать информацию об управлении противника $V(t)$ в тот же момент времени. Таким образом, преследователь строит свое управление в классе контрстратегий.

Условие (аналог условия Л.С. Понтрягина). Существует такое число λ, $0 \le \lambda < 1$, что для всех положительных t и векторов v из области определения функции ψ, $v \in V$, выполняется включение

$$\pi e^{At} Cv \in \pi e^{At} B\Phi(\lambda\psi(v))\,. \tag{6}$$

Лемма. При сделанных предположениях о свойствах функции φ множество уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma \ge 0$, является полунепрерывным сверху выпуклозначным и компактозначным многозначным отображением.

Доказательство. Выпуклость и компактность множества уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ – следствие полунепрерывности снизу выпуклой функции φ и ограниченности множества $\Phi(\gamma)$ для какого-либо числа γ [2].

Отметим, что множества уровня образуют возрастающую по включению совокупность множеств: $\Phi(\gamma) \subset \Phi(\gamma+\delta)$ для всех неотрицательных γ и δ. Поэтому, для доказательства полунепрерывности сверху $\Phi(\gamma)$ достаточно показать, что для любых γ и ε, $\gamma \geq 0$, $\varepsilon > 0$, существует число δ, $\delta > 0$, такое, что $\Phi(\gamma+\delta) \subset \Phi(\gamma) + \varepsilon D$, где D – единичный шар в $\mathbb{R}^m$, $D = \{u \in \mathbb{R}^m : u \leq 1\}$.

Обозначим Γ границу выпуклого компакта $\Phi(\gamma)+\varepsilon D$. Множество Γ является компактом. Рассмотрим множество $G = \Gamma \cap \Phi(\gamma+1)$. Если это множество пусто, то ясно, что $\Phi(\gamma+1) \subset \Phi(\gamma)+\varepsilon D$ и можно положить $\delta = 1$. Если же $G \neq \varnothing$, то это множество является компактом и можно положить $\delta = \min\{\varphi(u) : u \in G\} - \gamma$. Покажем, что для этого δ выполняется требуемое включение.

Предположим, что существует вектор w, $w \in \Phi(\gamma+\delta)$, такой, что $\rho = \min\{\|w-u\| : u \in \Phi(\gamma)\} > \varepsilon$. Так как множество $\Phi(\gamma)$ является выпуклым компактом, то существует единственный вектор p, $p \in \Phi(\gamma)$, такой, что $\rho = \|w - p\|$. Рассмотрим вектор $u = p + \frac{\varepsilon}{\rho}(w-p) \in \Gamma$. Для этого вектора выполняются соотношения:

$$\varphi(u) = \varphi\left(\frac{\varepsilon}{\rho} w + \left(1-\frac{\varepsilon}{\rho}\right) p\right) \leq \frac{\varepsilon}{\rho}\varphi(w) + \left(1-\frac{\varepsilon}{\rho}\right)\varphi(p) \leq \frac{\varepsilon}{\rho}(\gamma+\delta) + \left(1-\frac{\varepsilon}{\rho}\right)\gamma = \gamma + \frac{\varepsilon}{\rho}\delta .$$

Данные соотношения противоречат выбору δ, что и завершает доказательство.

Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1), (2) на терминальное множество M из начального положения z^0 с помощью импульсных управлений (3), (4). Напомним, что $\mathrm{co}(N)$ обозначает выпуклую оболочку множества N [2].

Теорема. Полагаем, что выполнено условие (6) на параметры игры (1), (2). Предположим, что существует момент $T = T(z^0)$ такой, что

$$-\pi e^{AT} z^0 \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{0 \leq t \leq T} \pi e^{At} B \Phi(1-\lambda)\right). \tag{7}$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T.

Доказательство. Зафиксируем момент T, удовлетворяющий предположениям теоремы. По теореме Каратеодори о выпуклой оболочке [2] существует не более $n-h+1$ векторов b_k, моментов времени χ_k, $0 \le \chi_1 \le \ldots \le \chi_k \le \ldots \le T$, неотрицательных чисел β_k, $k=1,\ldots,n-h+1$, $h=\dim M$, таких, что

$$-\pi e^{AT} z^0 = \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_\kappa \pi e^{A(T-\chi_k)} B b_k, \quad \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_\kappa = 1, \quad b_k \in \Phi(1-\lambda). \tag{8}$$

Из леммы, учитывая полунепрерывность сверху функции $\psi(v)$, $v \in V$, следует полунепрерывность сверху многозначного отображения $\Phi(\lambda\psi(v))$.

По теореме об измеримом селекторе Куратовского и Рыль – Нардзевского [8, 9] получаем, что у включения (6) существует измеримый по Борелю селектор, т. е. измеримое по Борелю отображение $w(t,v) \in \Phi(\lambda\psi(v))$, такое, что $\pi e^{At} C v = \pi e^{At} B w(t,v)$ для всех $(t,v) \in \mathrm{R}_+ \times V$.

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0,T]$ произвольное допустимое управление $V(t)$ вида (3)

$$V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{N} c_j \delta(t-\theta_j), \quad 0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_j < \ldots < \theta_N \le T,$$

которое удовлетворяет ограничению (4).

Тогда управление игрока-преследователя на интервале $[0,T]$ положим

$$U(t) = w(T-t, v(t)) + \sum_{\theta_j \le t} w(T-\theta_j, c_j)\delta(t-\theta_j) + \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_k b_k \delta(t-\chi_k). \tag{9}$$

Такой закон выбора управлений преследователя является контруправлением.

Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией [5]. Поэтому для любой измеримой функции $v(t)$ функция $w(T-t, v(t))$ в (9) будет измерима по Лебегу.

Покажем, что при таком выборе управления преследователя решение (5) попадет на терминальное множество в момент T:

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^0 + \int_0^T \pi e^{A(T-t)} \left[B w(T-t, v(t)) - C v(t) \right] dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \pi e^{A(T-\theta_j)} \left[B w(T-\theta_j, c_j) - C c_j \right] + \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_\kappa \pi e^{A(T-\chi_k)} B b_k = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу выбора (8) и $\pi e^{At} C v = \pi e^{At} B w(t,v)$.

Проверим, что управление (9) удовлетворяет ограничению (4):

$$\int_0^T \varphi(w(T-t, v(t)))\, dt + \sum_{j=1}^{N} \varphi(w(T-\theta_j, c_j)) + \sum_{k=1}^{n-h+1} \varphi(\beta_k b_k) \le$$

$$\le \lambda \left[\int_0^T \psi(v(t))\,dt + \sum_{j=1}^{N} \psi(c_j) \right] + (1-\lambda) \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_k \le 1,$$

где $\varphi(\beta_k b_k) = \varphi((1-\beta_k)\cdot 0 + \beta_k b_k) \le \beta_k \cdot \varphi(b_k) \le \beta_k (1-\lambda)$.

О.А. Бєлоусов

ІМПУЛЬСНІ КЕРУВАННЯ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГРАХ
З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Розглядаються ігрові задачі переслідування для лінійних систем із загальними опуклими інтегральними обмеженнями на керування. Пропонується розширення диференціальної гри за допомогою імпульсних керувань. Формулюється аналог умови Л.С. Понтрягіна, який дозволяє отримати достатні умови вирішення задачі за певний гарантований час.

A.A. Belousov

IMPULSE CONTROLS IN DIFFERENTIAL GAMES UNDER INTEGRAL CONSTRAINS

Linear systems under general convex integral constraints on controls are discussed in this paper. It is proposed the generalization of differential games by means of impulse controls. Analog of Pontryagin’s Condition is formulated. On its basis sufficient conditions of the game termination in a certain guaranteed time are obtained.

1. *Никольский М.С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 1972. – **8**, № 6. – С. 964–971.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
3. *Белоусов А.А.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями общего вида // Теорія оптимальних рішень. – 2012. – № 11. – С. 3–8.
4. *Белоусов А.А.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления в норме L_1 // Теорія оптимальних рішень. – 2011. – № 10. – С. 3–9.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
6. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. – М.: Наука, 2005. – 429 с.
7. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
8. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.
9. *Kisielewicz M***.** Differential Inclusions and Optimal Control // Mathematics and Its Applications. – Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – **44**. – 260 p.

Получено 25.03.2013