Теорія оптимальних рішень

Рассматривается эмпирическая оценка неизвестного параметра двумерного случайного поля с сильным перемешиванием. Приведены условия, при которых имеет место сильная состоятельность данной оценки.

УДК 519.21

Д.А. ГОЛОЛОБОВ

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ С СИЛЬНЫМ ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

Введение. В данной работе рассмотрена задача оценивания неизвестного параметра двумерного случайного поля с непрерывным временем и сильным перемешиванием. Цель работы – доказать строгую состоятельность этой оценки.

Постановка задачи. Пусть $\xi(\vec{t})=\xi(\vec{t},\omega)=$ $=\xi(t_1,t_2,\omega), \vec{t}\in \mathrm{R}$ – однородное в узком смысле случайное поле

$$\xi:(\Omega,\mathrm{G},P)\to(Y,\mathrm{B}(Y)).$$

Пусть также I – замкнутое подмножество множества $\mathrm{R}^l, l\ge 1$, возможно, $I=\mathrm{R}^l$; $f: X\times Y\to \mathrm{R}^2$ – неотрицательная функция, которая удовлетворяет условиям:

1) $f(\vec{u},z)\in I$ непрерывна для всех $z\in Y$;

2) для всех $\vec{u}\in I$ отображение $f(\vec{u},z)$, $z\in Y$ является $\mathrm{B}(Y)$-измеримым.

Рассмотрим наблюдения:

$$\left\{\xi(\vec{t}), t_1\in[0,T_1], t_2\in[0,T_2]; T_1,T_2>0\right\}.$$

Задача состоит в следующем:

$$\min_{\vec{u}\in I}\left\{f\left(\vec{u},\xi(\vec{0})\right)\right\}=\min_{\vec{u}\in I}F(\vec{u}).$$

Данная задача аппроксимируется следующей:

$$\min_{\vec{u}\in I}\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left\{f\left(\vec{u},t_1,t_2,\xi(t_1,t_2)\right)\right\}dt_1dt_2=$$

$$=\min_{\vec{u}\in I}F_{T_1T_2}\left(\vec{u}\right).$$

Вспомогательные сведения.

Теорема 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ – полное вероятностное пространство, K – компактное подмножество некоторого банахового пространства с нормой $\|\bullet\|$ [1]. Допустим, что $\mathcal{U}_{\vec{T}}, \vec{T} \in \mathrm{R}_+^m(\mathrm{N}^m)$ – семейство σ-алгебр, причем $\mathcal{U}_{\vec{T}} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_{\vec{T}} \subset \mathcal{U}_{\vec{S}}, \vec{T} < \vec{S}$, $\left\{Q_{\vec{T}}(s) = Q_{\vec{T}}(s, \omega) : (s, \omega) \in K \times \Omega, \vec{T} \in \mathrm{R}_+^m(\mathrm{N}^m)\right\}$ – семейство действительных функций, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) для фиксированных $\vec{T}$ и ω функция $Q_{\vec{T}}(s, \omega), s \in K$ – непрерывна;

2) для фиксированного $\vec{T}$ для каждого $s \in K$ функция $Q_{\vec{T}}(s, \omega)$ является $\mathcal{U}_{\vec{T}}$-измеримой;

3) для некоторого элемента $s_0 \in K$ и для каждого $s \in K$

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{\vec{T} \to \infty} Q_{\vec{T}}(s, \omega) = \Phi(s; s_0)\right\} = 1,$$

где $\Phi(s; s_0), s \in K$ – действительная функция, которая непрерывна на K и удовлетворяет условию

$$\Phi(s; s_0) > \Phi(s_0; s_0), s \neq s_0;$$

4) для любого $\delta > 0$ существует $\gamma_0 > 0$ и функция $c(\gamma) > 0, \gamma > 0$, $c(\gamma) \to 0, \gamma \to 0$ такие, что для всякого элемента $s' \in K$ и для любого $\gamma : 0 < \gamma < \gamma_0$

$$\mathrm{P}\left\{\overline{\lim_{\vec{T} \to \infty}} \sup_{\left\{\|s - s'\| < \gamma, \|s - s_0\| \geq \delta\right\}} \left|Q_{\vec{T}}(s) - Q_{\vec{T}}(s')\right| < c(\gamma)\right\} = 1.$$

Для каждого $\vec{T} \in \mathrm{R}_+^m(\mathrm{N}^m)$ и $\omega \in \Omega$ элемент $s(\vec{T}) = s(\vec{T}, \omega)$ определяется соотношением

$$Q_{\vec{T}}(s(\vec{T})) = \min_{s \in K} Q_{\vec{T}}(s).$$

Такой элемент всегда существует. Может существовать более одной точки минимума функции $Q_{\vec{T}}$. В этом случае $s(\vec{T})$ – это любая точка минимума. По теореме 1 элемент $s(\vec{T})$ может быть выбран $\mathcal{U}_{\vec{T}}$-измеримым.

Тогда

$$\mathrm{P}\left\{\left\|s(\vec{T}) - s_0\right\| \to 0, \vec{T} \to \infty\right\} = 1.$$

Основной результат. Далее рассмотрим условия, необходимые для сильной состоятельности оценки и докажем состоятельность нашей оценки.

Теорема 2. Пусть случайная функция $f\left(\vec{u}, t_1, t_2, \xi(t_1, t_2)\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для всех $\vec{u} \in I$ существует функция $F\left(\vec{u}\right)$, такая, что

$$F\left(\vec{u}\right) = \lim_{\substack{T_1 \to \infty \\ T_2 \to \infty}} \mathrm{E} F_{T_1 T_2}\left(\vec{u}\right)$$

и точка $\vec{u}^* \in I$, такая, что, $F\left(\vec{u}^*\right) < F\left(\vec{u}\right)$, если $\vec{u}^* \neq \vec{u}$;

2) если I неограниченна, то, $f\left(\vec{u}, t_1, t_2, \xi(t_1, t_2)\right) \to \infty$ при $\left\|\vec{u}\right\|_p \to \infty$ для всех фиксированных t_1, t_2 и $\xi(t_1, t_2)$;

3) для всех δ существует $\gamma_0 > 0$ и функция $c(\gamma) > 0, \gamma > 0$; $c(\gamma) \to \infty$, $\gamma \to \infty$ такие, что для всех $s' \in K$ и $\gamma : 0 < \gamma < \gamma_0$:

$$\mathrm{P}\left\{ \lim_{\vec{T} \to \infty} \frac{1}{\vec{T}} \int\limits_{\left[\vec{0}, \vec{T}\right]} \sup_{\left\|\vec{u} - \vec{u}'\right\| < \gamma, \left\|\vec{u} - \vec{u}^*\right\|_p > \delta} \left| f\left(\vec{u}, \vec{t}, \xi\left(\vec{t}\right)\right) - f\left(\vec{u}', \vec{t}, \xi\left(\vec{t}\right)\right) \right| < c(\gamma) \right\} = 1$$

(см. теорему 1);

4) выполняется условие сильного перемешивания для поля $\xi\left(\vec{t}\right)$:

$$\sup_{\substack{A_1 \in \mathcal{F}(S_1) \\ A_2 \in \mathcal{F}(S_2)}} \left| P(A_1 \cap A_2) - P(A_1) P(A_2) \right| \le \Psi(d) = O\left(d^{-2-\varepsilon}\right) \le \frac{c}{1 + d^{2+\varepsilon}},$$

где S_1, S_2 – произвольные множества из R^2; $\mathcal{F}(S)$ – порожденная случайным полем σ алгебра; $d \to \infty, \varepsilon > 0$;

5) $\mathrm{E}\left\{\left\| \xi(\vec{t}) \right\|^{2+\delta}\right\} < \infty$ для всех $\varepsilon\delta > 4$; $\left\|\vec{u}\right\|_p < \infty$.

Обозначим

$$\vec{U}_{T_1 T_2} = \underset{\vec{u} \in I}{\operatorname{argmin}} F_{T_1 T_2}\left(\vec{u}\right).$$

Тогда

$$\mathrm{P}\left\{ \lim_{\substack{T_1 \to \infty \\ T_2 \to \infty}} \left\| \vec{U}_{T_1 T_2} - \vec{u}^* \right\|_p = 0 \right\} = 1.$$

Доказательство. Согласно условия 2) существует $r > 0$, такое, что элемент $\vec{U}_{T_1T_2}$ принадлежит шару:

$$K = \left\{ \vec{u} : \left\| \vec{u} \right\|_p \le r \right\}$$

с вероятностью 1.

Согласно условиям 4, 5 теоремы 2 и лемме 3 из [3, с. 89], имеем:

$$\Big| \mathrm{E} f\left(\vec{u}, t_1, t_2, \xi(t_1, t_2)\right) f\left(\vec{u}, t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2, \xi(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2)\right) -$$

$$- \mathrm{E} f\left(\vec{u}, t_1, t_2, \xi(t_1, t_2)\right) \mathrm{E} f\left(\vec{u}, t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2, \xi(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2)\right) \Big| \le \frac{1}{1 + d^{2+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$.

Обозначим $\eta_{t_1t_2} = F_{T_1T_2}\left(\vec{u}\right) - \mathrm{E}F_{T_1T_2}\left(\vec{u}\right)$ и оценим $\mathrm{E}\eta^2_{t_1t_2}\left(\vec{u}\right)$.

$$\mathrm{E}\eta^2_{t_1t_2}\left(\vec{u}\right) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{T_1T_2} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} f\left(\vec{u}, t_1, t_2, \xi(t_1, t_2)\right) dt_1 dt_2 - \right.$$

$$\left. - \mathrm{E}\left(\frac{1}{T_1T_2} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} f\left(\vec{u}, t_1, t_2, \xi(t_1, t_2)\right) dt_1 dt_2 \right) \right]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left\{ \frac{1}{T_1^2T_2^2} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \left(f\left(\vec{u}, t_1', t_2', \xi(t_1', t_2')\right) - \mathrm{E} f\left(\vec{u}, t_1', t_2', \xi(t_1', t_2')\right) \right) \times \right.$$

$$\times f\left(\vec{u}, t_1'', t_2'', \xi(t_1'', t_2'')\right) - \mathrm{E} f\left(\vec{u}, t_1'', t_2'', \xi(t_1'', t_2'')\right) dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{T_1^2T_2^2} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \mathrm{E} y_1 y_2 dt_1 dt_2,$$

где $y_i = f\left(\vec{u}, t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \xi\left(t_1^{(i)}, t_2^{(i)}\right)\right)$.

Из условий 4) и 5) теоремы 2 мы получаем

$$\left| \mathrm{E} y_1 y_2 \right| \le \frac{c}{1 + \left| t_1' - t_2' + t_1'' - t_2'' \right|^{1+\varepsilon_1}},$$

где $\varepsilon_1 > 0$.

Поэтому

$$\frac{1}{T_1^2T_2^2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\mathrm{E}y_1y_2dt_1dt_2\le\frac{c}{T}.$$

Выбрав $T=T(n)=T_1T_1=n^2$ по лемме Бореля – Кантелли, получаем

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{\vec{T}\to\infty}\eta_{T(n)}(x)=0\right\}=1.$$

Запишем

$$\varsigma_n=\sup_{T(n)\le T\le T(n+1)}\left|\eta_{T(x)}(x)-\eta_{T(n)}(x)\right|..$$

Очевидно, что

$$\varsigma_n\le\frac{T(n+1)-T(n)}{T^2(n)}\left|\eta_{T(x)}\right|+$$

$$+\frac{1}{T^2(n)}\max_{T(n)\le T\le T(n+1)}\left|\int_{T(n)}^{T}\left[f\left(\vec{u},\vec{t},\xi\left(\vec{t}\right)\right)-\mathrm{E}f\left(\vec{u},\vec{t},\xi\left(\vec{t}\right)\right)\right]\right|.$$

Первое слагаемое последней формулы сходится к нулю с вероятностью 1. Используя условия 4), 5) теоремы 2 и лемму Бореля – Кантелли подобным образом можно доказать, что второе слагаемое сходится к нулю с вероятностью 1.

Таким образом,

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{\vec{T}\to\infty}F_{\vec{T}}(x)=F(x)\right\}=1.$$

Используя теорему 7 [2] проверим следующее условие: для любых $\delta>0$ существует $\gamma_0>0$ и функция $c(\gamma)>0,\gamma>0$ такая, что $c(\gamma)\to 0,$ и для $\gamma\to 0$ каждого элемента $x^{'}\in K$ и для любых $0<\gamma<\gamma_0$:

$$\mathrm{P}\left\{\overline{\lim_{\vec{T}\to\infty}}\sup_{\|x-x_1\|<\gamma,\|x-x^*\|>\delta}\left|F_{\vec{T}}(x)-F(x^{'})\right|<c(\gamma)\right\}=1\,.$$

Аналогично доказательству теоремы 7 [2], используя условия 3) –5), получаем

$$\overline{\lim_{\vec{T}\to\infty}}\sup_{\|x-x^{'}\|<\gamma,\|x-x^*\|>\delta}\left|F_{\vec{T}}(x)-F_{\vec{T}}(x^{'})\right|\le$$

$$\le\lim_{\vec{T}\to\infty}\frac{1}{\vec{T}}\int_{\left[\vec{0},\vec{T}\right]}\sup_{\left\|\vec{u}-\vec{u}^{'}\right\|<\gamma,\left\|\vec{u}-\vec{u}^{*}\right\|_p>\delta}\left|f\left(\vec{u},\vec{t},\xi\left(\vec{t}\right)\right)-f\left(\vec{u}^{'},\vec{t},\xi\left(\vec{t}\right)\right)\right|dt=\frac{1}{2}c(\gamma).$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}\left\{ \overline{\lim_{\vec{T}\to\infty}} \sup_{\|x-x^1\|<\gamma, \|x-x^*\|>\delta} \left| F_{\vec{T}}(x) - F(x^{'}) \right| < c(\gamma) \right\} = 1.$$

Теорема доказана.

Заключение. В результате проведенного исследования получены условия, при которых имеет место сильная состоятельность оценки неизвестного параметра однородного в узком смысле двумерного случайного поля с непрерывным временем и сильным перемешиванием.

Д.О. Гололобов

КОНЗИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ НЕВІДОМОГО ПАРАМЕТРА ОДНОРІДНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ З СИЛЬНИМ ПЕРЕМІШУВАННЯМ

Розглядається емпірична оцінка невідомого параметра двовимірного випадкового поля з сильним перемішуванням. Наведено умови, за яких має місце строго конзистентність даної оцінки.

D.A. Gololobov

CONSISTENCY OF ESTIMATION OF THE UNKNOWN PARAMETER FOR GOMOGENOUS RANDOM FIELD WITH CONTINUOUS TIME

Empirical estimation of unknown parameter for two-dimensional random field with strong mixing is considered. Conditions, under which strong consistency of this estimation holds, are established.

1. *Knopov P.S., Kasitskaya E.J.* Empirical estimates in stochastic optimization and identification. – Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 250 p.
2. *Дороговцев А.Я.* Теория оценок параметров случайных процессов. – Киев: Вища школа, 1982. – 190 с.
3. *Кнопов П.С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем. – Киев: Наукова думка, 1981. – 151 с.

Получено 28.02.2013