УДК 517.5

Т. А. Агошкова (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

АППРОКСИМАЦИЯ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

The direct and converse Jackson- and Bernstein-type theorems are proved for the mean approximations of periodic functions of many variables by piecewise constant functions with uniform segmentation of the period torus in metric spaces with integral metrics defined by a function ψ of the type of continuity modulus.

Для метричних просторів з інтегральною метрикою, визначеною функцією ψ типу модуля неперервності, доведено в багатовимірному випадку пряму та обернену теореми типу Джексона та Бернштейна для усереднених наближень періодичних функцій кусково-сталими функціями з рівномірним розбиттям тора періоду.

1. Введение. Рассмотрим пространство R^m точек $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $m\geq 1$. Пусть $f(x)$ — действительнозначные функции, имеющие период 1 по каждой переменной; $T^m=[0,1)^m$ — основной тор периодов; $L_0\equiv L_0(T^m)$ — множество всех таких функций, которые почти всюду на T^m конечны и измеримы. С помощью функции $\psi(y)=\dfrac{y}{1+y}$, $y\in R^1_+$, в L_0 вводится метрика

$$\rho(f,g) := \int\limits_{T^m}\psi\left(|f(x)-g(x)|\right)dx, \tag{1}$$

порождающая сходимость по мере.

Пусть теперь $\psi(y)$ — функция типа модуля непрерывности, которая определена на R^1_+, т. е. удовлетворяет условиям $\psi(0)=0$, $\psi(y)>0$ для $y>0$; $\psi(y)$ непрерывна; $\psi(y)$ неубывающая; $\psi(x+y)\leq\psi(x)+\psi(y)$ для всех x, $y\in R^1_+$. В таком случае функционал вида (1) удовлетворяет аксиомам метрики. Обозначим полученное метрическое пространство следующим образом:

$$L_\psi \equiv L_\psi(T^m) = \left\{ f\in L_0(T^m):\quad \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m}\psi\left(|f(x)|\right)dx<\infty\right\}.$$

Для $f\in L_\psi$ и $t\in R^m$ положим

$$\Delta_t f(x) = f_t(x)-f(x),\quad \text{где}\quad f_t(x)=f(x+t).$$

Под модулем непрерывности функции f в пространстве L_ψ будем понимать

$$\omega(f, h)_\psi := \sup_{\|t\|_\infty \le h} \|\Delta_t f\|_\psi ,$$

где $t \in R^m$, $\|t\|_\infty := \max_{1\le i\le m} |t_i|$ и $h \in R_+^1$.

На каждой из m координатных осей отрезок $[0, 1)$ разбиваем на отрезки равной длины с помощью n равноотстоящих точек вида

$$\frac{s}{n}, \qquad s = 0, 1, \ldots , n-1 .$$

С их помощью получим разбиение основного тора T^m на n^m кубов $\prod_{i_1,\ldots,i_m;n}$, $i_j = 0, 1, \ldots , n-1$, $j = 1, \ldots , m$, вида

$$\prod_{i_1,\ldots,i_m;n} = \left\{ x \in T^m : \quad \frac{i_j}{n} \le x_j < \frac{i_j+1}{n}, \qquad j = 1, \ldots , m \right\}. \tag{2}$$

Обозначим через $L_{n\ldots n}$ пространство 1-периодических кусочно-постоянных функций $l_{n\ldots n}$, определенных следующим образом:

$$l_{n\ldots n}(x) = \sum_{i_1, i_2,\ldots,i_m = 0}^{n-1} b_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \chi_{\prod_{i_1,\ldots,i_m;n}}(x), \tag{3}$$

где $b_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \in R^1$ и

$$\chi_{\prod_{i_1,\ldots,i_m;n}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \prod_{i_1,\ldots,i_m;n} , \\ 0, & x \notin \prod_{i_1,\ldots,i_m;n} . \end{cases}$$

Пусть $E_{n\ldots n}(f)_\psi = \inf_{l_{n\ldots n}\in L_{n\ldots n}} \|f - l_{n\ldots n}\|_\psi$ — наилучшее приближение на периоде в метрике L_ψ функции f элементами подпространства $L_{n\ldots n}$.

Под усредненным приближением будем понимать

$$\overline{E}_{n\ldots n}(f)_\psi = \inf_{l_{n\ldots n}\in L_{n\ldots n}} \int_{T^m} \|f_t - l_{n\ldots n}\|_\psi \, dt .$$

Корректность определения см. в [1].

Пусть $E_0(f)_\psi = \inf\left\{ \|f - c\|_\psi ;\ c \in R^1 \right\}$ — наилучшее приближение на периоде в метрике L_ψ функции f константой.

В работах [1, 2] исследовалась аппроксимация кусочно-постоянными функциями в

$L_\psi(T^1)$ и были получены следующие результаты:

$$\sup_{f\in L_\psi} \frac{E_0(f)_\psi}{\omega(f,1/2)_\psi} = 1, \qquad \sup_{f\in L_\psi} \frac{\inf\limits_t E_n(f_t)_\psi}{\omega(f,1/n)_\psi} = 1,$$

$$\omega\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_\psi \le \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=1}^{n} 2^k\, \overline{E}_{2^k}(f)_\psi . \tag{4}$$

В настоящей работе доказаны аналогичные результаты для приближений периодических функций многих переменных.

2. Прямая теорема Джексона с точной константой.

Теорема 1. *Для любой функции* $f\in L_\psi$ *и* $n=1,2,\ldots$ *имеют место следующие равенства*:

$$\sup_{f\in L_\psi} \frac{\inf\limits_t E_{n\ldots n}(f_t)_\psi}{\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi} = \sup_{f\in L_\psi} \frac{\overline{E}_{n\ldots n}(f)_\psi}{\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi} = 1, \tag{5}$$

$$\sup_{f\in L_\psi} \frac{E_0(f)_\psi}{\omega\left(f,\frac{1}{2}\right)_\psi} = 1. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем сначала равенство (6).

Для оценки сверху учтем, что при вычислении достаточно ограничиться плотным в L_ψ множеством непрерывных функций. Для непрерывной функции f получаем

$$E_0(f)_\psi \le \left\| f(x) - \int_{T^m} f(t)dt \right\|_\psi \le \int_{T^m} \|f(\cdot)-f(t)\|_\psi dt = \int_{T^m}\int_{T^m} \psi(|f(x)-f(t)|)dxdt =$$

$$= \int_{T^m}\int_{T^m} \psi(|f(x+t)-f(t)|)dxdt = \int_{T^m} \|\Delta_t f\|_\psi dt = \int_{\left[-\frac12,\frac12\right)^m} \|\Delta_t f\|_\psi\, dt \le \int_{\left[-\frac12,\frac12\right)^m} \omega(f,|t|)\, dt =$$

$$= 2^m \int_{\left[0,\frac12\right)^m} \omega(f,|t|)\, dt \le \omega\left(f,\frac12\right)_\psi .$$

Установим оценку снизу. Для каждой i-й переменной соответствующий отрезок $[0,1)$

ее изменения разобьем равноотстоящими точками $x_{i;j} = \dfrac{j}{q-1}$, $j = 0,\ 1,\ ...,\ q-1$, где q — простое число. Использовав функции $f_q(y)$, $y \in R^1$, построенные В. А. Юдиным (см. [3]), определим многомерный аналог этих функций. Пусть $F_q(x) = \prod_{i=1}^{m} f_q(x_i)$, где $f_q(x_i) = \dfrac{1}{\sqrt[m]{2}}\left(\dfrac{j}{q}\right)$ при $x_i \in \left[x_{i;j-1}; x_{i;j}\right)$. Под $\left(\dfrac{j}{q}\right)$, $j = 1,...,q-1$, будем понимать символ Лежандра [4, с. 69], $\left(\left(\dfrac{j}{q}\right) = 1\right.$, если существует решение уравнения $x^2 \equiv j \pmod{q}$, $\left(\dfrac{j}{q}\right) = -1$ в противном случае$\Big)$.

Вычислим $E_0\left(F_q\right)_\psi$. Для любой константы $c \in R^1$, так как число вычетов равно числу невычетов, имеем

$$\left\|F_q - c\right\|_\psi = \int\limits_{T^m} \psi\left(\left|F_q(x) - c\right|\right)dx = \underbrace{\int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1}_{m-1} \left(\sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{x_{1;j-1}}^{x_{1;j}} \psi\left(\left|\prod_{i=1}^{m} f_q(x_i) - c\right|\right)dx_1\right)dx_2 \ldots dx_m =$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1}_{m-1} \left(\frac{1}{q-1}\left(\frac{q-1}{2}\psi\left(\left|\frac{1}{\sqrt[m]{2}}\prod_{i=2}^{m} f_q(x_i) - c\right|\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{q-1}{2}\psi\left(\left|\frac{1}{\sqrt[m]{2}}\prod_{i=2}^{m} f_q(x_i) + c\right|\right)\right)\right)dx_2 \ldots dx_m =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1}_{m-1} \left(\psi\left(\left|\frac{1}{\sqrt[m]{2}}\prod_{i=2}^{m} f_q(x_i) - c\right|\right) + \psi\left(\left|\frac{1}{\sqrt[m]{2}}\prod_{i=2}^{m} f_q(x_i) + c\right|\right)\right)dx_2 \ldots dx_m = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2^m}\left(2^{m-1}\psi\left(\left|\frac{1}{2} - c\right|\right) + 2^{m-1}\psi\left(\left|\frac{1}{2} + c\right|\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\psi\left(\left|\frac{1}{2} - c\right|\right) + \psi\left(\left|\frac{1}{2} + c\right|\right)\right).$$

В результате $\left\|F_q - c\right\|_\psi = \dfrac{1}{2}\left(\psi\left(\left|\dfrac{1}{2} - c\right|\right) + \psi\left(\left|\dfrac{1}{2} + c\right|\right)\right)$ и, следовательно,

$$\left\|F_q - c\right\|_\psi = \left\|F_q + c\right\|_\psi. \tag{7}$$

Поэтому, учитывая (7), получаем

$$2\left\|F_q - c\right\|_\psi = \left\|F_q - c\right\|_\psi + \left\|F_q + c\right\|_\psi \geq \left\|F_q - c + F_q + c\right\|_\psi = \left\|2F_q\right\|_\psi =$$

$$= \int\limits_{T^m} \psi\left(\left|2\left(\frac{1}{\sqrt[m]{2}}\right)^m\right|\right) dx_1 \ldots dx_m = \psi(1).$$

Значит, $\left\|F_q - c\right\|_\psi \geq \dfrac{1}{2}\psi(1)$. Далее,

$$\left\|F_q \pm \frac{1}{2}\right\|_\psi = \frac{1}{2}\left(\psi\left(\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|\right) + \psi\left(\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right|\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\psi(0) + \psi(1)\right) = \frac{1}{2}\psi(1).$$

Поэтому

$$E_0\left(F_q\right)_\psi = \inf_c \left\|F_q - c\right\|_\psi = \left\|F_q \pm \frac{1}{2}\right\|_\psi = \frac{1}{2}\psi(1). \tag{8}$$

Вычислим $\omega\left(F_q, \dfrac{1}{2}\right)_\psi$. Поскольку $\left\|\Delta_t F_q\right\|_\psi$ — кусочно-линейная функция по каждой переменной t_i, $i = 1, \ldots, m$, с узлами в точках разбиения, то

$$\omega\left(F_q, \frac{1}{2}\right)_\psi = \sup_{\|t\|_\infty \leq \frac{1}{2}} \left\|\Delta_t F_q\right\|_\psi = \sup_{t_k} \left\|\Delta_{t_k} F_q\right\|_\psi, \tag{9}$$

где $t_k = \left(t_{1;k_1}, t_{2;k_2}, \ldots, t_{m;k_m}\right)$, $t_{i;k_i} = \dfrac{k_i}{q-1}$, $k_i = 0, 1, \ldots, q-1$, $i = 1, \ldots, m$.

Если $a = \pm 1$ или 0, то $\psi\left(|a|\right) = \psi(1)\, a^2$, поэтому

$$\left\|\Delta_{t_k} F_q\right\|_\psi = \left\|\Delta_{t_{1;k_1}, \ldots, t_{m;k_m}} F_q\right\|_\psi = \psi(1) \int\limits_{T^m} \left|\prod_{i=1}^m f_q(x_i + t_{i;k_i}) - \prod_{i=1}^m f_q(x_i)\right|^2 dx_1 \ldots dx_m =$$

$$= \psi(1)\left(\int\limits_{T^m} \left|\prod_{i=1}^m f_q(x_i + t_{i;k_i})\right|^2 dx_1 \ldots dx_m - 2\int\limits_{T^m} \prod_{i=1}^m f_q(x_i + t_{i;k_i})\, f_q(x_i)\, dx_1 \ldots dx_m + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{T^m} \left|\prod_{i=1}^m f_q(x_i)\right|^2 dx_1 \ldots dx_m \right) =$$

$$= 2\psi(1)\left(\left(\left(\frac{1}{\sqrt[m]{2}}\right)^m\right)^2 - \int\limits_{T^m}\prod_{i=1}^m f_q(x_i + t_{i;\,k_i})\, f_q(x_i)\; dx_1 \ldots dx_m\right) =$$

$$= 2\psi(1)\left(\frac{1}{4} - \int\limits_{T^m}\prod_{i=1}^m f_q(x_i + t_{i;\,k_i})\, f_q(x_i)\, dx_1 \ldots dx_m\right) =:\ 2\psi(1)\left(\frac{1}{4} - I\right). \qquad (10)$$

Для вычисления интеграла I в (10) используем свойства символов Лежандра [4, с. 82]

$$\sum_{j=0}^{q-1}\left(\frac{j+p}{q}\right)\left(\frac{j}{q}\right) = -1\,,\ p = 1,\ldots,q-1\,.$$

Тогда

$$I\ =\ \left(\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{x_{1;\,j-1}}^{x_{1;\,j}}\left(\frac{1}{\sqrt[m]{2}}\right)^2\left(\frac{j+k_1}{q}\right)\left(\frac{j}{q}\right)dx_1\right)\int\limits_{T^{m-1}}\prod_{i=2}^m f_q(x_i + t_{i;\,k_i})\, f_q(x_i)\, dx_2 \ldots dx_m =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2/m}(-1)\frac{1}{q-1}\int\limits_{T^{m-1}}\prod_{i=2}^m f_q(x_i + t_{i;\,k_i})\, f_q(x_i)\, dx_2 \ldots dx_m\ =\ \ldots$$

$$\ldots\ =\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2/m}(-1)\frac{1}{q-1}\right)^m\ =\ \frac{(-1)^m}{4\,(q-1)^m}\,.$$

Пусть R^m — пространство нечетной размерности, тогда интеграл I в (10)

$$I\ =\ \frac{-1}{4\,(q-1)^m}\,.$$

В результате имеем

$$\left\|\Delta_t F_q\right\|_\psi\ =\ \frac{1}{2}\psi(1)\left(1 + \frac{1}{(q-1)^m}\right). \qquad (11)$$

Учитывая (8) – (11), для пространств нечетной размерности получаем

$$\frac{E_0\left(F_q\right)_\psi}{\omega\left(F_q,\, \frac{1}{2}\right)_\psi}\ =\ 1 - \frac{1}{1 + (q-1)^m}\ \underset{q\to\infty}{\rightarrow}\ 1\,.$$

Для пространства четной размерности R^m интеграл I в (10)

$$I = \frac{1}{4(q-1)^m}$$

и

$$\left\| \Delta_{t_k} F_q \right\|_\psi = \frac{1}{2}\psi(1)\left(1 - \frac{1}{(q-1)^m}\right). \tag{12}$$

Пусть $t_k = \left(t_{1;k_1}, t_{2;k_2}, \ldots, t_{m;k_m}\right)$ такое, что $2p-1$, $p = 1, 2, \ldots, m/2$, — количество $t_{i;k_i}$, не равных нулю. Тогда

$$I = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2/m}(-1)\frac{1}{q-1}\right)^{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2/m)(m-2p+1)} = \frac{-1}{4(q-1)^{2p-1}},$$

$$\left\| \Delta_{t_k} F_q \right\|_\psi = 2\psi(1)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4(q-1)^{2p-1}}\right) = \frac{\psi(1)}{2}\left(1 + \frac{1}{(q-1)^{2p-1}}\right). \tag{13}$$

Учитывая (9), (12), (13), получаем

$$\omega\left(F_q, \frac{1}{2}\right)_\psi = \frac{\psi(1)}{2}\left(1 + \frac{1}{q-1}\right).$$

Следовательно, для пространств четной размерности

$$\frac{E_0\left(F_q\right)_\psi}{\omega\left(F_q, \frac{1}{2}\right)_\psi} = 1 - \frac{1}{1+(q-1)} \underset{q\to\infty}{\to} 1.$$

Таким образом, соотношение (6) доказано.

Докажем равенства (5). Поскольку

$$\inf_t E_{n\ldots n}(f_t)_\psi = \inf_t \inf_{l_{n\ldots n}\in L_{n\ldots n}} \| f_t - l_{n\ldots n} \|_\psi \le \inf_{l_{n\ldots n}\in L_{n\ldots n}} \int\limits_{T^m} \| f_t - l_{n\ldots n} \|_\psi \, dt = \overline{E}_{n\ldots n}(f)_\psi,$$

$$\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_\psi = \sup_{\|t\|_\infty \le \frac{1}{n}} \| \Delta_t f \|_\psi \ge n^m \int\limits_{\left[0; \frac{1}{n}\right)^m} \| \Delta_u f \|_\psi \, du,$$

то

$$\sup_{f\in L_\psi} \frac{\inf\limits_t E_{n\ldots n}(f_t)_\psi}{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_\psi} \le \sup_{f\in L_\psi} \frac{\overline{E}_{n\ldots n}(f)_\psi}{n^m \int\limits_{[0;1/n)^m} \| \Delta_u f \|_\psi \, du}. \tag{14}$$

Для оценки сверху правой части (14) достаточно ограничиться всюду плотным в L_ψ множеством непрерывных функций. В качестве аппроксимирующей функции выберем определенную функцию $l_{n\ldots n}(f,x)$ из $L_{n\ldots n}$ следующим образом:

$$l_{n\ldots n}(f,x) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} f\left(\frac{i_1}{n},\ldots,\frac{i_m}{n}\right)\chi_{\Pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m;n}}(x),$$

$$\overline{E}_{n\ldots n}(f)_\psi = \inf_{l_{n\ldots n}\in L_{n\ldots n}} \int_{T^m} \|f_t - l_{n\ldots n}\|_\psi\, dt \le \int_{T^m} \|f_t - l_{n\ldots n}(f_t)\|_\psi\, dt =$$

$$= \int_{T^m}\int_{T^m} \psi\left(\left|f_t(x) - l_{n\ldots n}(f_t,x)\right|\right) dx\,dt =$$

$$= \int_{T^m} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} \int_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \ldots \int_{\frac{i_m}{n}}^{\frac{i_m+1}{n}} \psi\left(\left|f_t(x_1,\ldots,x_m) - f_t\left(\frac{i_1}{n},\ldots,\frac{i_m}{n}\right)\right|\right) dx_1\ldots dx_m dt =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} \int_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \ldots \int_{\frac{i_m}{n}}^{\frac{i_m+1}{n}} \left(\int_{T^m} \psi\left(\left|f\left(t_1+x_1-\frac{i_1}{n},\ldots,t_m+x_m-\frac{i_m}{n}\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-f(t_1,\ldots,t_m)\right|\right) dt\right) dx_1\ldots dx_m =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} \int_{\left[0;\frac{1}{n}\right)^m} \left(\int_{T^m} \psi\left(\left|f_x(t) - f(t)\right|\right) dt\right) dx = n^m \int_{\left[0;\frac{1}{n}\right)^m} \|\Delta_x f\|_\psi\, dx.$$

Необходимая оценка сверху для правой части (14) установлена.

Для оценки левой части (14) снизу используем введенную выше функцию F_q и произвольную $l_{n\ldots n} \in L_{n\ldots n}$, определенную в (3).

Для произвольного t, учитывая (8), для функции $F_q(nx)$ получаем оценку приближения снизу:

$$\left\|F_{q,t}(nx) - l_{n\ldots n}(x)\right\|_\psi = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} \int_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \ldots \int_{\frac{i_m}{n}}^{\frac{i_m+1}{n}} \psi\left(\left|\prod_{j=1}^{m} f_{q,t_{j,k}}(nx_j) - b_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|\right) dx_1\ldots dx_m =$$

$$= \frac{1}{n^m} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{n-1} \int_{i_1}^{i_1+1} \ldots \int_{i_m}^{i_m+1} \psi\left(\left| \prod_{j=1}^{m} f_{q,t_{j,k}}\left(x_j\right) - b_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right| \right) dx_1 \ldots dx_m =$$

$$= \frac{1}{n^m} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{n-1} \int_{[0;1)^m} \psi\left(\left| F_{q,t}(x) - b_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right| \right) dx \ \geq \ \frac{1}{n^m} n^m E_0\left(F_{q,t}\right)_\psi \ = \ \frac{1}{2} \psi(1) .$$

Следовательно,

$$E_{n \ldots n}\left(F_{q,t}\left(n\,\cdot\right)\right)_\psi \ = \ \left\| F_{q,t}\left(n\,\cdot\right) \pm \frac{1}{2} \right\|_\psi \ = \ \frac{\psi(1)}{2} ,$$

и для m-мерного пространства четной размерности при $q \to \infty$ получаем

$$\frac{\inf\limits_t E_{n \ldots n}\left(F_{q,t}\left(n\,\cdot\right)\right)_\psi}{\omega\left(F_q\left(n\,\cdot\right), 1/n\right)_\psi} \ = \ \frac{\psi(1)/2}{(\psi(1)/2)\left(1 + 1/(q-1)^m\right)} \ = \ \frac{(q-1)^m \pm 1}{(q-1)^m + 1} \ = \ 1 - \frac{1}{1 + (q-1)^m} \ \to \ 1 .$$

Для m-мерного пространства нечетной размерности при $q \to \infty$ имеем

$$\frac{\inf\limits_t E_{n \ldots n}\left(F_{q,t}\left(n\,\cdot\right)\right)_\psi}{\omega\left(F_q\left(n\,\cdot\right), 1/n\right)_\psi} \ = \ \frac{\psi(1)/2}{(\psi(1)/2)\left(1 + 1/(q-1)\right)} \ = \ 1 - \frac{1}{q} \ \to \ 1 .$$

Теорема 1 доказана.

3. Обратная теорема Джексона. Докажем аналог обратной теоремы Джексона (4) для усредненных приближений функций многих переменных.

Теорема 2. *Для* $m > 1$, *любой функции* $f \in L_\psi$ *и всех* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$\omega\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_\psi \ \leq \ \frac{C_m}{2^{n-2}} \sum_{k=1}^{n} 2^k \, \overline{E}_{2^k \ldots 2^k}\left(f\right)_\psi , \tag{15}$$

где константа C_m *зависит только от* m.

При доказательстве использован стандартный метод получения таких неравенств, основанный на неравенствах типа С. Н. Бернштейна для аппроксимирующих функций.

Лемма 1. *Для любой функции* $l_{n \ldots n}$ *из* $L_{n \ldots n}$ *при* $h \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$ *и для* $\|t\|_\infty \leq h$ *выполняется неравенство*

$$\|\Delta_t l_{n \ldots n}\|_\psi \ \leq \ C_m n h \|l_{n \ldots n}\|_\psi .$$

Доказательство. Пусть $l_{n \ldots n} \in L_{n \ldots n}$. Тогда

$$\| l_{n\ldots n}(x)\|_\psi = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} \int\limits_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \ldots \int\limits_{\frac{i_m}{n}}^{\frac{i_m+1}{n}} \psi\left(\left|b_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|\right) dx_1\ldots dx_m =$$

$$= \frac{1}{n^m} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} \psi\left(\left|b_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|\right). \tag{16}$$

Поскольку $h \le 1/n$, то

$$\|\Delta_t l_{n\ldots n}(x)\|_\psi = \int\limits_{T^m} \psi\left(\left|l_{n\ldots n}(x+t) - l_{n\ldots n}(x)\right|\right) dx \le$$

$$\le \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} \psi\left(\left|b_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|\right) \mu\left(\Pi_{i_1+nt_1\ldots t_m+nt_m;n} / \Pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m;n}\right),$$

где $\mu(A)$ — m-мерная мера Лебега множества A.

Из определения равномерного разбиения (2) получаем

$$\mu\left(\Pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m;n}\right) = \frac{1}{n^m}.$$

Тогда

$$\mu\left(\Pi_{i_1+nt_1\ldots i_m+nt_m;n} / \Pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m;n}\right) = \frac{1}{n^m} - \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - t_j\right) = \frac{1}{n^m}\left(1 - \prod_{j=1}^{m}\left(1 - nt_j\right)\right) \le$$

$$\le \frac{1}{n^m}\left(1 - (1-nh)^m\right) \le \frac{1}{n^m} C_m nh. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует

$$\|\Delta_t l_{n\ldots n}(x)\|_\psi \le \frac{1}{n^m} C_m nh \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{n-1} \psi\left(\left|b_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|\right) = C_m nh \|l_{n\ldots n}(x)\|_\psi.$$

Лемма 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Зафиксируем n. Из леммы 1 для $k \le n$ имеем

$$\omega\left(l_{2^k\ldots 2^k} - l_{2^{k-1}\ldots 2^{k-1}}, \frac{1}{2^n}\right)_\psi \le C_m 2^k \frac{1}{2^n}\left\| l_{2^k\ldots 2^k} - l_{2^{k-1}\ldots 2^{k-1}}\right\|_\psi = C_m 2^{k-n}\left\| l_{2^k\ldots 2^k} - l_{2^{k-1}\ldots 2^{k-1}}\right\|_\psi.$$

Для заданной f и произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $l_{2^k\ldots 2^k}$, $k = 1,\ldots,n$, удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_{T^m} \left\| f_t - l_{2^k\ldots 2^k}\right\|_\psi dt < \overline{E}_{2^k\ldots 2^k}(f)_\psi + \varepsilon.$$

Тогда

$$\omega\left(f,\frac{1}{2^n}\right)_\psi = \int\limits_{T^m}\omega\left(f_t,\frac{1}{2^n}\right)_\psi dt \le \int\limits_{T^m}\omega\left(f_t-l_{2^n\ldots2^n},\frac{1}{2^n}\right)_\psi dt+\omega\left(l_{2^n\ldots2^n},\frac{1}{2^n}\right)_\psi =$$

$$=\int\limits_{T^m}\omega\left(f_t-l_{2^n\ldots2^n},\frac{1}{2^n}\right)_\psi dt+\omega\left(l_{1\ldots1}+\sum_{k=1}^{n}\left(l_{2^k\ldots2^k}-l_{2^{k-1}\ldots2^{k-1}}\right),\frac{1}{2^n}\right)_\psi \le$$

$$\le 2\left(\overline{E}_{2^n\ldots2^n}(f)_\psi+\varepsilon\right)+\sum_{k=1}^{n}\omega\left(l_{2^k\ldots2^k}-l_{2^{k-1}\ldots2^{k-1}},\frac{1}{2^n}\right)_\psi \le$$

$$\le 2\overline{E}_{2^n\ldots2^n}(f)_\psi+2\varepsilon+\frac{C_m}{2^n}\sum_{k=1}^{n}2^k\int\limits_{T^m}\left\|\left(l_{2^k\ldots2^k}-f_t\right)+\left(f_t-l_{2^{k-1}\ldots2^{k-1}}\right)\right\|_\psi dt \le$$

$$\le 2\varepsilon+2C_m\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}2^k 2\left(\overline{E}_{2^k\ldots2^k}(f)_\psi+\varepsilon\right) \le$$

$$\le 4C_m\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}2^k\overline{E}_{2^k\ldots2^k}(f)_\psi+2(4C_m+1)\varepsilon,$$

и в силу произвольности ε отсюда следует (15).

Теорема 2 доказана.

В терминах усредненных приближений для функций многих переменных можно получить конструктивную характеристику классов Липшица.

Следствие. *Для любой функции* $f\in L_\psi$ *и любого* $\alpha\in(0,1)$ *имеет место эквивалентность*

$$f\in\Lambda_\psi^\alpha \iff \overline{E}_{2^k\ldots2^k}(f)_\psi \le A\left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha, \quad k=1,2,\ldots,$$

где

$$\Lambda_\psi^\alpha = \left\{f\in L_\psi:\ \exists K,\ \omega(f,h)_\psi\le Kh^\alpha,\ h\in(0,1/2)\right\},$$

A, K *— константы, не зависящие от* k, f.

Доказательство. *Необходимость.* Согласно прямой теореме Джексона получаем

$$\overline{E}_{2^k\ldots2^k}(f)_\psi \le \omega\left(f,\frac{1}{2^k}\right)_\psi \le K\left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha, \quad k=1,2,\ldots.$$

Достаточность. Из обратной теоремы Джексона следует

$$\omega\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_\psi \le \frac{C_m}{2^{n-2}} \sum_{k=1}^{n} 2^k \overline{E}_{2^k \ldots 2^k}(f)_\psi \le \frac{C_m A}{4} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k \left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha =$$

$$= \frac{C_m A}{4} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \left(2^{1-\alpha}\right)^k \le \frac{C_m A}{4} \frac{1}{2^n} 2^{n(1-\alpha)} = \frac{C_m A}{4} \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha .$$

Автор выражает благодарность С. А. Пичугову, под руководством которого выполнена эта работа.

1. *Пичугов С. А.* Аппроксимация измеримых периодических функций по мере кусочно-постоянными функциями // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 711 – 715.
2. *Пичугов С. А.* Приближение константой периодических функций в метрических пространствах $\varphi(L)$ // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1095 – 1098.
3. *Пичугов С. А.* Константа Юнга пространства L_p // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 5. – С. 604 – 614.
4. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

Получено 25.09.12,
после доработки — 24.02.13