УДК 517.925.7

А. А. Мохонько, А. З. Мохонько (Нац. ун-т „Львов. политехника”)

О ПОРЯДКЕ РОСТА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ

Assume that the coefficients and solutions of the equation $f^{(n)}+p_{n-1}(z)f^{(n-1)}+\ldots+p_{s+1}(z)f^{(s+1)}+\ldots+p_0(z)f=0$ have a branching point at infinity (e.g., a logarithmic singularity) and that the coefficients p_j, $j=s+1,\ldots,n-1$ increase slower (in terms of the Nevanlinna characteristics) than $p_s(z)$. It is proved that this equation has at most s linearly independent solutions of finite order.

Доведено, що якщо у рівнянні $f^{(n)}+p_{n-1}(z)f^{(n-1)}+\ldots+p_{s+1}(z)f^{(s+1)}+\ldots+p_0(z)f=0$, коефіцієнти і розв’язки якого мають точку галуження в ∞ (наприклад, логарифмічну особливу точку), коефіцієнти p_j, $j=s+1,\ldots,n-1$, зростають повільніше, ніж коефіцієнт $p_s(z)$ (у термінах неванліннівських характеристик), то таке рівняння може мати не більше ніж s лінійно незалежних розв’язків скінченного порядку.

Обозначим через A_b кольцо всех аналитических в $G=\{z\colon r_0\leqslant |z|<+\infty\}$ функций, единственной особой точкой которых является ∞. Для функций $f\in A_b$ точка ∞ может быть либо логарифмической особой точкой, либо алгебраической точкой ветвления порядка $n-1$, если в ∞ соединяются n ветвей функции f (в частности, точкой ветвления нулевого порядка, если f — однозначная голоморфная в G функция). Кольцо A_b целостное (без делителей нуля), поэтому его можно погрузить в поле [1, с. 53, 59]. Через M_b обозначим наименьшее поле, такое, что $A_b\subset M_b$. Для функции $f\in M_b$ будет удобно также использовать обозначение $f(z)$, $z\in G$.

Если $f\in M_b$, то кроме точки ветвления в ∞ особыми точками функции f могут быть только полюсы, изолированные на римановой поверхности аналитической функции $f(z)$, $z\in G$.

Пусть $f\in M_b$. Далее только для определенности считаем, что функция f имеет в ∞ логарифмическую особую точку, поскольку для конечнозначных (однозначных) и бесконечнозначных функций определения и обозначения неванлинновских характеристик $T(r,f), S_{\alpha,\beta}(r,f)$ существенно отличаются [2, с. 23, 37].

Выберем произвольные α, β, $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$. Через $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}=\{z=re^{i\theta}\colon \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, r_0\leqslant r<+\infty\}$, обозначим однозначную ветвь функции $f\in M_b$ в угловой области $g_{\alpha,\beta}$ на римановой поверхности аналитической функции $f(z)$, $z\in G$. (Более подробное определение однозначной ветви, а также определения арифметических операций над многозначными функциями см., например, в [3, с. 478]). Неванлинновские характеристики ветви $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, определяются следующим образом [2, с. 40] $\left(k=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha},\ \ln^+x=\max(\ln x,0),\ x\geqslant 0\right)$:

$$A_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{k}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\left[\ln^+|f(te^{i\alpha})|+\ln^+|f(te^{i\beta})|\right]dt,$$

$$B_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^+|f(re^{i\theta})|\sin(k(\theta-\alpha))d\theta, \tag{1}$$

$$C_{\alpha\beta}(r,f) = 2k\int\limits_{r_0}^{r} c_{\alpha\beta}(t,f)\left(\frac{1}{t^{k+1}} + \frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)dt,$$

где $c_{\alpha\beta}(t,f) = c_{\alpha\beta}(t,\infty,f) = \sum_{\substack{r_0<|\rho_n|\leqslant t\\ \alpha\leqslant\psi_n\leqslant\beta}} \sin(k(\psi_n-\alpha))$, а $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюсы функции $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, рассматриваемые с учетом кратности,

$$S_{\alpha\beta}(r,f) = A_{\alpha\beta}(r,f) + B_{\alpha\beta}(r,f) + C_{\alpha\beta}(r,f). \tag{2}$$

Функция $c_{\alpha\beta}(t,f)$ — *считающая функция* полюсов ветви $f(z), z\in g_{\alpha\beta}$.

Для величин $A_{\alpha\beta}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $B_{\alpha\beta}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $C_{\alpha\beta}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $c_{\alpha\beta}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ условимся использовать более простую запись $A_{\alpha\beta}(r,a)$, $B_{\alpha\beta}(r,a)$, $C_{\alpha\beta}(r,a)$, $c_{\alpha\beta}(r,a)$.

Неванлинновские характеристики имеют такие свойства [2, с. 41, 45]. Пусть $f,g\in M_b$ и $f(z)$, $g(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, — однозначные ветви этих функций в угловой области $g_{\alpha\beta}$. Через $D_{\alpha\beta}(r,f)$ обозначим любую из характеристик $A_{\alpha\beta}(r,f)$, $B_{\alpha\beta}(r,f)$, $C_{\alpha\beta}(r,f)$. Тогда

$$D_{\alpha\beta}(r,f+g) \leqslant D_{\alpha\beta}(r,f) + D_{\alpha\beta}(r,g) + \ln 2,$$

$$D_{\alpha\beta}(r,f\cdot g) \leqslant D_{\alpha\beta}(r,f) + D_{\alpha\beta}(r,g), \tag{3}$$

$$D_{\alpha\beta}(r,f^2) = 2D_{\alpha\beta}(r,f).$$

Каково бы ни было комплексное число $a\neq\infty$, справедливо соотношение

$$A_{\alpha\beta}(r,a) + B_{\alpha\beta}(r,a) + C_{\alpha\beta}(r,a) = S_{\alpha\beta}(r,f) + \varepsilon(r,a), \quad \varepsilon(r,a) = O(1). \tag{4}$$

Символы Ландау $O(\ldots)$, $o(\ldots)$ в статье используются при $r\to+\infty$.

Напомним, что функция $f\in M_b$ имеет конечный порядок роста ρ, если

$$\rho = \sup_{\forall\alpha,\beta}\varlimsup_{r\to+\infty} \ln^+ S_{\alpha\beta}(r,f)/\ln r < +\infty, \quad -\infty<\alpha<\beta<+\infty. \tag{5}$$

Уравнение

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \ldots + p_0(z)f = 0, \qquad z\in G = \{z\colon r_0\leqslant|z|<+\infty\}, \tag{6}$$

с коэффициентами $p_j, j=0,\ldots,n-1,$ — голоморфными в G функциями, имеет n линейно независимых решений вида (см. [4, с. 184])

$$f_m(z) = z^{\lambda}\sum_{t=0}^{k_m} b_{mt}(z)\ln^t z, \quad m=1,\ldots,n, \tag{7}$$

где $b_{mt}(z)$, $z\in G$, — голоморфные функции, для которых, вообще говоря, ∞ является существенно особой точкой. Таким образом, $f_m\in A_b$, $m=1,\ldots,n$, следовательно, любое решение f уравнения (6) принадлежит кольцу $A_b\subset M_b$. Существуют уравнения (6) с коэффициентами $p_j\in M_b$, $j=0,\ldots,n-1$, решения которых f принадлежат M_b. Так, все решения уравнения Гаусса $z(z-1)w'' + (-2+4z)w' + 2w = 0$ являются однозначными мероморфными в $\mathbb{C}$ функциями.

Запишем линейное дифференциальное уравнение более подробно:

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \ldots + p_{s+1}(z)f^{(s+1)} + \ldots + p_0(z)f = 0, \quad p_s \in M_b, \tag{8}$$

$s = 0, \ldots, n-1$, $z \in G = \{z : r_0 \leqslant |z| < +\infty\}$.

Если в уравнении (8) коэффициент

$$p_j(z) = (c_j + o(1))z^{a_j}(\ln z)^{b_j}, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad a_j,\, b_j \in \mathbb{R}, \quad p_j \in M_b, \tag{9}$$

например $p_j(z)$ — рациональная функция или $p_j(z) = \sin \dfrac{1}{\sqrt{z}} \ln z \sim z^{-1/2} \ln z$, $z \to \infty$, то его неванлинновские характеристики $\left(k = \dfrac{\pi}{\beta - \alpha} > 0\right)$ таковы:

$$A_{\alpha\beta}(r, p_j) + B_{\alpha\beta}(r, p_j) \overset{(1)}{=} \frac{k}{\pi} \int\limits_{r_0}^{r} \left(\frac{1}{t^{k+1}} - \frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right) \Big[\ln^+ |p_j(te^{i\alpha})| + \ln^+ \left|p_j(te^{i\beta})\right|\Big] dt +$$

$$+ \frac{2k}{\pi r^k} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \ln^+ \left|p_j(re^{i\theta})\right| \sin\big(k(\theta - \alpha)\big) d\theta \overset{(9)}{=} O(1).$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (8) *коэффициенты* p_j *принадлежат* M_b, $j = 0, \ldots, n-1$, *причем* $A_{\alpha\beta}(r, p_j) + B_{\alpha\beta}(r, p_j) = O(1)$, $j = s+1, \ldots, n-1$, *а для коэффициента* $p_s(z)$ *выполняется* $A_{\alpha\beta}(r, p_s) + B_{\alpha\beta}(r, p_s) \neq O(1)$. *В этих условиях уравнение* (8) *может иметь не больше* s *линейно независимых решений* $f \in M_b$ *конечного порядка.*

Замечание. Для случая, когда коэффициенты $p_j(z)$, $j = s+1, \ldots, n-1$, уравнения (8) — многочлены, коэффициент $p_s(z)$ — целая трансцендентная функция и $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — однозначное целое решение, эта теорема доказана М. Фрей [6]. Аргументацию статьи [6] нельзя применить к мероморфным либо многозначным решениям. Новым моментом в доказательстве является использование леммы 1.

Условие $A_{\alpha\beta}(r, p_j) + B_{\alpha\beta}(r, p_j) = O(1)$, $j = s+1, \ldots, n-1$, $A_{\alpha\beta}(r, p_s) + B_{\alpha\beta}(r, p_s) \neq O(1)$ означает, что коэффициент $p_s(z)$ растет быстрее коэффициентов $p_j \in M_b$, $j = s+1, s+2, \ldots, n-1$ (в терминах неванлинновских характеристик), например $p_j \in M_b$, $j = s+1, s+2, \ldots, n-1$, — рациональные функции, $p_s(z)$ — трансцендентная функция.

Выводы сохраняются, если в теореме предположить, что

$$A_{\alpha\beta}(r, p_s) + B_{\alpha\beta}(r, p_s) \neq O\left(\sum_{j=s+1}^{n-1} A_{\alpha\beta}(r, p_j) + B_{\alpha\beta}(r, p_j) + 1\right), \quad p_j \in M_b, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Нам понадобятся следующие леммы [7].

Лемма 1. *Если* $f \in M_b$, f *имеет конечный порядок роста, то для любой однозначной ветви* $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, *выполняется*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1). \tag{10}$$

Лемма 2. *Если $f \in M_b$, f имеет конечный порядок роста, то и производная f' имеет конечный порядок роста. Для любой однозначной ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, выполняется*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O(1), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, и $p_j(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, $j = 0, \ldots, n-1$, — однозначные ветви функции $f \in M_b$ и коэффициентов p_j уравнения (8), такие, что при подстановке $f(z)$, $p_j(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, в (8) вместо, соответственно, f, $p_j(z)$, образуется тождество в $g_{\alpha\beta}$.

Пусть сначала в уравнении (8) $s = 0$, т. е. $A_{\alpha\beta}(r, p_j) + B_{\alpha\beta}(r, p_j) = O(1),\ j = 1, \ldots, n-1$, а для коэффициента $p_0(z)$ выполняется $A_{\alpha\beta}(r, p_0) + B_{\alpha\beta}(r, p_0) \neq O(1)$. Предположим, что решение $f \in M_b$ уравнения (8) имеет конечный порядок. Выполняется тождество

$$-p_0(z) \equiv \frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} + p_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}(z)}{f(z)} + \ldots + p_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in g_{\alpha\beta},$$

из которого, учитывая лемму 2 и свойства (3), получаем

$$A_{\alpha\beta}(r, p_0) + B_{\alpha\beta}(r, p_0) \overset{(3)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n} \left(A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \left(A_{\alpha\beta}(r, p_j) + B_{\alpha\beta}(r, p_j)\right) \overset{(11)}{=} O(1),$$

что противоречит предположению. Таким образом, если $s = 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то все возможные решения $f \in M_b$ уравнения (8) имеют бесконечный порядок.

Допустим, что для $s = m-1$ и $n \in \mathbb{N}$ утверждение доказано; докажем его для $s = m \geqslant 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Предположим противное, что в уравнении (8)

$$\begin{gathered} A_{\alpha\beta}(r, p_j) + B_{\alpha\beta}(r, p_j) = O(1), \quad j = m+1, \ldots, n-1, \\ A_{\alpha\beta}(r, p_m) + B_{\alpha\beta}(r, p_m) \neq O(1), \end{gathered} \tag{12}$$

и (8) имеет $m+1$ линейно независимых решений $w_1, \ldots, w_m, w_{m+1} \in M_b$, конечного порядка. С помощью замены $f(z) = u(z)w_1(z)$ придем к уравнению

$$v^{(n-1)} + b_{n-2}(z)v^{(n-2)} + \ldots + b_0(z)v = 0, \quad v(z) = u'(z), \tag{13}$$

$$b_j = C_n^{n-j-1}\frac{w_1^{(n-j-1)}}{w_1} + C_{n-1}^{n-j-2}p_{n-1}\frac{w_1^{(n-j-2)}}{w_1} + \ldots$$

$$\ldots + C_{j+2}^{1}p_{j+2}\frac{w_1'}{w_1} + p_{j+1}, \quad j = 0, \ldots, n-2. \tag{14}$$

Замена $f(z) = u(z)w_1(z)$ переводит линейно независимые решения $w_2, \ldots, w_m,\ w_{m+1} \in M_b$, уравнения (8) в линейно независимые решения $v_j = \left(\dfrac{w_j}{w_1}\right)' \in M_b,\ j = 2, \ldots, m,\ m+1$, уравнения (13). Поскольку решения $w_1, \ldots, w_m,\ w_{m+1}$ имеют конечный порядок роста, то из свойств (3), (4) и леммы 1 следует, что решения $v_j = \left(\dfrac{w_j}{w_1}\right)'$, $j = 2, \ldots, m, m+1$, тоже имеют конечный порядок.

Из (12), (14) получаем

$$A_{\alpha\beta}(r, b_j) + B_{\alpha\beta}(r, b_j) = O(1), \quad j = m, m+1, \ldots, n-1. \tag{15}$$

При $j = m-1$ соотношение (14) можно записать в виде $p_m = b_{m-1} - C_n^{n-m}\dfrac{w_1^{(n-m)}}{w_1} - C_{n-1}^{n-m-1}p_{n-1}\dfrac{w_1^{(n-m-1)}}{w_1} - \ldots - C_{m+1}^{1}p_{m+1}\dfrac{w_1'}{w_1}$. Из этого равенства и из (3), (11), (12) следует

$$O(1) \neq A_{\alpha\beta}(r, p_m) + B_{\alpha\beta}(r, p_m) \leqslant A_{\alpha\beta}(r, b_{m-1}) + B_{\alpha\beta}(r, b_{m-1}) + O(1) \Rightarrow$$

$$A_{\alpha\beta}(r, b_{m-1}) + B_{\alpha\beta}(r, b_{m-1}) \neq O(1).$$

Значит, из предположения, что уравнение (8) при $s = m \geqslant 1$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет $m+1$ линейно независимых решений $w_1, \ldots, w_m,\ w_{m+1} \in M_b$ конечного порядка, следует, что для уравнения (13) выполняются условия $A_{\alpha\beta}(r, b_j) + B_{\alpha\beta}(r, b_j) = O(1)$, $j = m, m+1, \ldots, n-1$, $A_{\alpha\beta}(r, b_{m-1}) + B_{\alpha\beta}(r, b_{m-1}) \neq O(1)$, и оно имеет m линейно независимых решений конечного порядка, что противоречит предположению индукции.

Теорема доказана.

***Пример* 1.** Рассмотрим уравнение $f' - f\left(e^z + \dfrac{1}{z\ln z}\right) = 0$. Это уравнение вида $f' + p_0(z)f = 0$, $p_0(z) = -e^z - \dfrac{1}{z\ln z}$. Возьмем $\alpha = -\pi$, $\beta = \pi$, $k = \dfrac{\pi}{\beta - \alpha} = \dfrac{1}{2}$. Оценим характеристику $A_{-\pi,\pi}(r, p_0) + B_{-\pi,\pi}(r, p_0)$. Имеем $\left|p_0(re^{i\theta})\right| = \left|e^{re^{i\theta}} + \dfrac{1}{re^{i\theta}\ln(re^{i\theta})}\right| = e^{r\cos\theta} + o(1)$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Поэтому с учетом того, что $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$, $x \geqslant 0$, характеристика

$$B_{-\pi,\pi}(r, p_0) = \frac{1}{\pi r^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|p_0(re^{i\theta})|\sin\left(\frac{1}{2}(\theta+\pi)\right)d\theta \sim \frac{1}{\pi r^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}d\theta =$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right]d\theta = \frac{4\sqrt{2r}}{3\pi}, \quad r \to +\infty.$$

Поскольку

$$\left|p_0(te^{i\theta})\right|\big|_{\theta=-\pi,\pi} = \left(e^{t\cos\theta} + o(1)\right)\big|_{\theta=-\pi,\pi} = \frac{1}{e^t} + o(1) < 1, \quad t > t_1,$$

то $\ln^+|p_0(te^{i\theta})|_{\theta=-\pi,\pi} = 0$, $t > t_1$, следовательно,

$$A_{-\pi,\pi}(r, p_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{r}\right)\left[\ln^+\left|p_0(te^{-i\pi})\right| + \ln^+\left|p_0(te^{i\pi})\right|\right]dt = O(1).$$

Из предыдущего получаем $A_{-\pi,\pi}(r, p_0) + B_{-\pi,\pi}(r, p_0) = \big(1 + o(1)\big)\dfrac{4\sqrt{2r}}{3\pi} \neq O(1)$. Учитывая выводы теоремы, это означает, что рассматриваемое уравнение не имеет решений $f \in M_b$ конечного порядка. Действительно, его решением является функция $f(z) = \exp\exp z \cdot \ln z$, $z \in \{z : 2 \leqslant |z| < +\infty\}$, бесконечного порядка роста.

***Пример* 2.** Функции $f_1(z) = \exp(\exp z)$ и $f_2(z) \equiv 1$, $z \in \mathbb{C}$, являются линейно независимыми решениями уравнения $f'' - (e^z + 1)f' = 0$. Это уравнение вида $f'' + p_1(z)f' = 0$, $p_1(z) = -e^z - 1$. Возьмем $\alpha = -\pi$, $\beta = \pi$, $k = \dfrac{\pi}{\beta - \alpha} = \dfrac{1}{2}$. Оценим характеристику $A_{-\pi,\pi}(r, p_1) + B_{-\pi,\pi}(r, p_1)$. Имеем $|p_1(re^{i\theta})| = |e^{re^{i\theta}} + 1| = e^{r\cos\theta} + O(1)$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Поэтому аналогично предыдущему примеру $A_{-\pi,\pi}(r, p_1) + B_{-\pi,\pi}(r, p_1) = (1 + o(1))\dfrac{4\sqrt{2r}}{3\pi} \neq O(1)$. С учетом выводов теоремы это означает, что рассматриваемое уравнение имеет не более одного решения $f \in M_b$ конечного порядка. Как показано выше, таким решением является $f_2(z) \equiv 1$, $z \in \mathbb{C}$. Решение $f_1(z) = \exp\exp z$ имеет бесконечный порядок.

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. *Мохонько А. А.* Теорема Мальмквиста для решений дифференциальных уравнений в окрестности логарифмической особой точки // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 476 – 483.
4. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтас, 1972. – 468 с.
5. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
6. *Frei M.* Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten // Comment. math. helv. – 1961. – **35**. – P. 201 – 222.
7. *Мохонько А. А., Мохонько А. З.* Дефектные значения решений дифференциальных уравнений с точкой ветвления // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 7. – С. 939 – 957.
8. *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
9. *Мохонько А. З.* Поле алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 3. – С. 213 – 218.
10. *Мохонько А.З.* Оценка модуля логарифмической производной функции, мероморфной в угловой области, и ее применение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 839 – 843.

Получено 20.03.12,
после доработки — 19.11.13