УДК 517.548

В. С. Шпаківський, Т. С. Кузьменко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДИН КЛАС КВАТЕРНІОННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

We consider a new class of quaternionic mappings associated with spatial partial differential equations. We obtain a description of all mappings from this class by using four analytic functions of complex variable.

Рассмотрен новый класс кватернионных отображений, имеющих связь с пространственными уравнениями в частных производных. Получено описание всех отображений из этого класса с помощью четырех аналитических функций комплексной переменной.

1. Вступ. Кватерніонний аналіз вже давно сформувався і активно розвивається як окремий напрямок в математиці завдяки його численним застосуванням у різних галузях науки, переважно в математичній фізиці та диференціальних рівняннях (див., наприклад, [1, 2]). Реалізація такого зв'язку полягає у введенні спеціальних класів кватерніонних „диференційовних" функцій, компоненти яких задовольняють певні системи диференціальних рівнянь типу системи Коші — Рімана.

Так, кватерніонний аналіз у просторі $\mathbb{R}^3$ започатковано у роботі Г. Моісіла і Н. Теодореско [3], в якій уперше запропоновано тривимірний аналог системи рівнянь Коші — Рімана. Вони ввели поняття *голоморфного вектора*, як кватерніоннозначної вектор-функції, компоненти якої неперервно диференційовні і задовольняють згадану вище систему, що дістала назву системи Моісіла — Теодореско. В тій же роботі [3] автори довели аналог теореми Морера та аналоги інтегральної теореми та інтегральної формули Коші. Започатковані в [3] дослідження було продовжено в роботі [4], де введено поняття інтеграла типу Коші та досліджено існування його межових значень, а також знайдено його застосування до систем сингулярних інтегральних рівнянь.

Р. Фютер [5] побудував чотиривимірне узагальнення системи Моісіла — Теодореско та для введених ним *регулярних* функцій довів аналоги класичних результатів комплексного аналізу.

Згадані дослідження було узагальнено в роботі [6] і разом із застосуваннями у деяких моделях математичної фізики відображено також в монографії [2]. Слід також відмітити, що так звані *α-голоморфні* функції f, які є об'єктом дослідження в роботі [2], задовольняють тривимірне рівняння Гельмгольца

$$(\Delta_3+\alpha)f:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\alpha f=0,$$

де α — кватерніон.

Останні дослідження у цьому напрямку (див., наприклад, [19 – 21]) полягають в різного роду узагальненнях результатів роботи [2].

Іншим, порівняно новим, напрямком кватерніонного аналізу в $\mathbb{R}^3$ і $\mathbb{R}^4$ є так званий модифікований кватерніонний аналіз, започаткований Г. Льойтвілером на початку 90-х років (див., наприклад, [7 – 9]). У конструкції Г. Льойтвілера в $\mathbb{R}^3$ перші дві компоненти введених ним *гіперголоморфних* функцій $f=u(x,y,z)+iv(x,y,z)+jw(x,y,z)$ (де i, j — базисні кватерніонні одиниці) задовольняють рівняння Лапласа – Бельтрамі

$$z\Delta_3 u-\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

а третя компонента w задовольняє рівняння

$$z^2\Delta_3 w - z\frac{\partial w}{\partial z} + w = 0.$$

В роботі [7] отримано розклад гіперголоморфної функції в ряд по деякій системі кватерніонних поліномів.

На відміну від робіт [2, 3, 5, 6] в підході Г. Льойтвілера гіперголоморфною є степенева функція, а частинні похідні гіперголоморфної функції знову гіперголоморфні. В той же час між описаними вище напрямками існує певний зв'язок (див. [9]).

Ще однією сучасною теорією в кватерніонному аналізі є теорія так званих *s-регулярних* функцій, які введені Г. Джентілі та Д. Струппою в роботі [11] в результаті розвитку ідеї К. Кулліна [10].

Ідея полягає в наступному. Нехай $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k =: x_0 + \operatorname{Im} x$, де x_0, x_1, x_2, x_3 — дійсні числа, а i, j, k — базисні кватерніонні одиниці. Кожен кватерніон $x = x_0 + \operatorname{Im} x$ при $x \neq x_0$ можна подати у вигляді „комплексного числа" з новою уявною одиницею I: $x = x_0 + I\,|\operatorname{Im} x|$, де $I := \dfrac{\operatorname{Im} x}{|\operatorname{Im} x|}$, а $|\cdot|$ — модуль кватерніона. Очевидно, що $I^2 = -1$. У такому ж вигляді можна подати й кватерніоннозначну функцію: $f(x) = U(x_0, |\operatorname{Im} x|) + I\,V(x_0, |\operatorname{Im} x|)$. Тоді функція f називається *s-регулярною* (див. [11]), якщо „комплекснозначна" функція $f = U + IV$ є голоморфною функцією „комплексної" змінної $x = x_0 + I\,|\operatorname{Im} x|$. Очевидно, що s-регулярними є всі кватерніонні поліноми. У наш час теорія s-регулярних функцій продовжує стрімко розвиватися (див. [12, 13]).

У цій роботі розглядається спеціальний клас відображень в алгебрі комплексних кватерніонів, який не охоплюється згаданими вище теоріями. Зазначимо, що комутативна алгебра бікомплексних чисел (або комутативних кватерніонів Сегре [14]) є підалгеброю алгебри комплексних кватерніонів. У цій підалгебрі виділяється тривимірний дійсний підпростір і розглядаються відображення, які визначені в області цього підпростору і набувають значень у всій алгебрі комплексних кватерніонів. Такі відображення, які є неперервними і диференційовними за Гато, назвемо *G-моногенними*. Вони і є основним об'єктом дослідження.

Встановлено, що G-моногенними є не лише кватерніонні поліноми, а й кватерніонні степеневі ряди. Більш того, в роботі наведено конструктивний опис усіх G-моногенних відображень за допомогою чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної. Як наслідок, похідна Гато G-моногенного відображення в свою чергу є G-моногенним відображенням. Крім того, досліджено зв'язок G-моногенних відображень з просторовими рівняннями з частинними похідними. Зокрема, наведено застосування моногенних відображень до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа.

2. Алгебра комплексних кватерніонів. Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів I, J, K, для яких виконуються такі правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, розклад елементів якого в базисі $\{1, I, J, K\}$ має вигляд

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \qquad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \qquad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \qquad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

де i — уявна комплексна одиниця. Таблиця множення в новому базисі набирає вигляду

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|} \cdot & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline\hline e_1 & e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ \hline e_2 & 0 & e_2 & 0 & e_4 \\ \hline e_3 & 0 & e_3 & 0 & e_1 \\ \hline e_4 & e_4 & 0 & e_2 & 0 \\ \hline \end{array}\,. \tag{1}$$

Норма кватерніона $a = \sum_{k=1}^{4} a_k e_k,\ a_k \in \mathbb{C}$, визначається рівністю

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{4} |a_k|^2}\,, \tag{2}$$

а одиниця алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ в цьому базисі є сумою ідемпотентів: $1 = e_1 + e_2$. Очевидно також, що комутативна підалгебра з базисом $\{e_1, e_2\}$ є згаданою вище алгеброю бікомплексних чисел або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре [14].

Нагадаємо (див., наприклад, [15, с. 64]), що підмножина $\mathcal{I} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називається *лівим* (або *правим*) *ідеалом*, якщо з умови $x \in \mathcal{I}$ випливає $yx \in \mathcal{I}$ (або $xy \in \mathcal{I}$) для довільного $y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Зазначимо, що алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить два правих максимальних ідеали

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}$$

і два лівих максимальних ідеали

$$\widehat{\mathcal{I}}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 : \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}, \qquad \widehat{\mathcal{I}}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_4 e_4 : \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}.$$

Очевидно, що радикал алгебри складається лише з нульового елемента, тобто алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є напівпростою.

Наслідком очевидних рівностей

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cap \widehat{\mathcal{I}}_2 = 0, \qquad \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cup \widehat{\mathcal{I}}_2 = \mathbb{H}(\mathbb{C})$$

є розклад у пряму суму:

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Введемо в розгляд лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, поклавши

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$

$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0,$$

при цьому очевидно $f_1(\mathcal{I}_1) = f_2(\mathcal{I}_2) = 0$.

Визначимо також лінійні функціонали $\widehat{f}_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f}_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ рівностями

$$\widehat{f}_1(e_1) = \widehat{f}_1(e_4) = 1, \qquad \widehat{f}_1(e_2) = \widehat{f}_1(e_3) = 0,$$

$$\widehat{f}_2(e_2) = \widehat{f}_2(e_3) = 1, \qquad \widehat{f}_2(e_1) = \widehat{f}_2(e_4) = 0,$$

для яких очевидно $\widehat{f}_1(\widehat{\mathcal{I}}_1) = \widehat{f}_2(\widehat{\mathcal{I}}_2) = 0$.

3. Ліво-G-моногенні та право-G-моногенні відображення. Нехай

$$i_1 = 1, \qquad i_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \qquad i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2 \tag{3}$$

при $a_k, b_k \in \mathbb{C}, \ k = 1, 2,$ — трійка лінійно незалежних векторів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ (див. [16, с. 223]). Це означає, що рівність

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжену векторами i_1, i_2, i_3. Області Ω тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область $\Omega_\zeta := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3.

Введемо позначення

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = \widehat{f}_1(\zeta) = x + y a_1 + z b_1,$$
$$\xi_2 := f_2(\zeta) = \widehat{f}_2(\zeta) = x + y a_2 + z b_2.$$

Тепер елемент $\zeta \in E_3$ можна подати у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, і згідно з визначенням (2)

$$\|\zeta\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}. \tag{4}$$

Зауважимо, що в подальшому істотним є припущення $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, де $f_k(E_3)$ при $k = 1, 2$ — образ множини E_3 при відображенні f_k. Очевидно, що воно має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Скажемо, що деякий функціонал $f : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *правомультиплікативний* (або *лівомультиплікативний*), якщо для довільних $x \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $y \in E_3$ справджується рівність $f(yx) = f(y)f(x)$ $\big($або $f(xy) = f(x)f(y)\big)$.

Лема 1. *Функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ неперервні і правомультиплікативні, а функціонали $\widehat{f}_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f}_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ неперервні і лівомультиплікативні.*

Доведення. Відповідна мультиплікативність всіх функціоналів встановлюється безпосередньою перевіркою, а неперервність випливає з їх обмеженості, а саме, якщо $a = \sum_{k=1}^{4} a_k e_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, то, наприклад, для f_1 маємо

$$\frac{|f_1(a)|}{\|a\|} \le \frac{|a_1| + |a_3|}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2}} \le 2.$$

Аналогічно доводиться неперервність інших функціоналів.

Лему доведено.

Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ (або $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$) називається *право-$G$-моногенним* $\big($або *ліво-G-моногенним*$\big)$ в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ $\big($або $\widehat{\Phi}\big)$ диференційовне за Гато у кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує такий елемент $\Phi'(\zeta)$ $\big($або $\widehat{\Phi}'(\zeta)\big)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \Big(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\Big)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3 \tag{5}$$

$$\left(\text{або } \lim_{\varepsilon \to 0+0} \Big(\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)\Big)\, \varepsilon^{-1} = \widehat{\Phi}'(\zeta)h \quad \forall h \in E_3\right). \tag{6}$$

При цьому $\Phi'(\zeta)$ назвемо *правою похідною Гато* в точці ζ, а $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ — *лівою похідною Гато* в точці ζ.

Теорема 1. *Відображення* $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *вигляду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} U_k(x,y,z)e_k, \quad x,y,z \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $U_k\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — *диференційовні функції в області* Ω, *є ліво-*G*-моногенним або право-*G*-моногенним в області* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *тоді і тільки тоді, коли виконуються відповідно умови*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_2}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_3}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_4}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_4}{\partial x},\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_2}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_3}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_4}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_4}{\partial x}
\end{aligned} \tag{8}$$

або

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_2}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_3}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_4}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_4}{\partial x},\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_2}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_3}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad &&\frac{\partial U_4}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_4}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо відображення (7) право-G-моногенне в області Ω_ζ, то при $h = i_1$ рівність (5) набирає вигляду

$$\Phi'(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\, e_k, \qquad \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta.$$

Тепер, покладаючи в рівності (5) спочатку $h = i_2$, а потім $h = i_3$, з урахуванням правил множення для базисних елементів отримуємо умови (8) для компонент право-G-моногенного відображення (7).

Достатність. Нехай $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta$, $h := h_1i_1 + h_2i_2 + h_3i_3$, де $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ і додатне число ε таке, що $\zeta + \varepsilon h \in \Omega_\zeta$. Враховуючи умови (8), маємо

$$\begin{aligned}
&\Big(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\Big)\varepsilon^{-1} - h\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\, e_k = \\
&= \varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{4}\Big(U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z)\Big)e_k - \\
&- \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}h_1 + a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}h_2 + b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}h_3\right)e_1 - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}h_1 + a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}h_2 + b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}h_3\right)e_2 - \\
&- \left(\frac{\partial U_3}{\partial x}h_1 + a_1\frac{\partial U_3}{\partial x}h_2 + b_1\frac{\partial U_3}{\partial x}h_3\right)e_3 - \left(\frac{\partial U_4}{\partial x}h_1 + a_2\frac{\partial U_4}{\partial x}h_2 + b_2\frac{\partial U_4}{\partial x}h_3\right)e_4 = \\
&= \varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{4}\Bigg(U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z) - \\
&- \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,\varepsilon h_1 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\,\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\,\varepsilon h_3\Bigg)e_k.
\end{aligned} \tag{10}$$

Внаслідок диференційовності функцій U_k в області Ω справджуються співвідношення

$$U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z) - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\varepsilon h_1 -$$
$$-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\varepsilon h_3 = o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0, \quad k=\overline{1,4}.$$

Тому, перейшовши до границі в рівності (10) при $\varepsilon \to 0$, отримаємо рівність (5). У випадку ліво-G-моногенного відображення доведення аналогічне.

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що умови (8) і (9) є аналогами умов Коші — Рімана і у згорнутому вигляді можуть бути записані так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = i_2\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = i_3\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{11}$$

для право-G-моногенного відображення і

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x}\,i_2, \qquad \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x}\,i_3 \tag{12}$$

для ліво-G-моногенного відображення.

Розглянемо приклади право- і ліво-G-моногенних відображень. Враховуючи подання елемента ζ у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ і таблицю множення алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, маємо $\zeta^n = \xi_1^n\, e_1 + \xi_2^n\, e_2$. Шляхом перевірки умов (11), (12) легко переконатися в тому, що відображення $\Phi(\zeta) = \zeta^n$ є одночасно право- і ліво-G-моногенним у всьому просторі E_3. Аналогічно перевіряється, що відображення

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \zeta^k\, c_k, \quad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}), \tag{13}$$

є право-G-моногенним в E_3, а відображення

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, \zeta^k, \quad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}),$$

— ліво-G-моногенним в E_3.

4. Конструктивний опис право-G-моногенних і ліво-G-моногенних відображень.

Лема 2. *Розклад резольвенти має вигляд*

$$(t-\zeta)^{-1} = \frac{1}{t-\xi_1}\, e_1 + \frac{1}{t-\xi_2}\, e_2 \quad \forall t \in \mathbb{C}, \quad t \neq \xi_1, \quad t \neq \xi_2. \tag{14}$$

Доведення. Встановимо, при яких $t \in \mathbb{C}$ в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ існує елемент $(t-\zeta)^{-1}$, і знайдемо коефіцієнти A_k його розкладу за базисом

$$(t-\zeta)^{-1} = \sum_{k=1}^{4} A_k\, e_k.$$

Враховуючи подання (3) елементів i_1, i_2, i_3 за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ і таблицю множення алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, маємо

$$1 = (t-\zeta)(t-\zeta)^{-1} = \Big((t-\xi_1)e_1 + (t-\xi_2)e_2\Big)\sum_{k=1}^{4} A_k\, e_k =$$
$$= (t-\xi_1)A_1e_1 + (t-\xi_1)A_3e_3 + (t-\xi_2)A_2e_2 + (t-\xi_2)A_4e_4 = e_1 + e_2.$$

Тепер, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних базисних одиницях, отримуємо розклад (14).

Лему 2 доведено.

Із рівності (14) випливає, що точки $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in E_3$, лежать на прямих

$$L_1 : x + y\,\mathrm{Re}\; a_1 + z\,\mathrm{Re}\; b_1 = 0, \qquad y\,\mathrm{Im}\; a_1 + z\,\mathrm{Im}\; b_1 = 0,$$
$$L_2 : x + y\,\mathrm{Re}\; a_2 + z\,\mathrm{Re}\; b_2 = 0, \qquad y\,\mathrm{Im}\; a_2 + z\,\mathrm{Im}\; b_2 = 0$$

у просторі $\mathbb{R}^3$.

Область $\Omega\in\mathbb{R}^3$ називають *опуклою в напрямку прямої* L, якщо вона містить кожен відрізок, який паралельний прямій L і з'єднує дві точки цієї області.

Лема 3. *Нехай область $\Omega\in\mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ право-G-моногенне в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x,y,z)\in L_1\}$, то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_1. \tag{15}$$

Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x,y,z)\in L_2\}$, то

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_2. \tag{16}$$

Співвідношення (15) доводиться за схемою доведення леми 1 з роботи [17], в якому замість прямої L необхідно використати пряму L_1, а замість функціонала f — функціонал f_1. Аналогічно доводиться співвідношення (16) з заміною L_1 і f_1 відповідно на L_2 і f_2. При цьому використовується лема 1 цієї роботи.

Повністю аналогічно доводиться і наступне твердження.

Лема 4. *Нехай область $\Omega\in\mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\widehat{\Phi}\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ ліво-G-моногенне в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \colon (x,y,z)\in L_1\}$, то*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1) - \widehat{\Phi}(\zeta_2) \in \widehat{\mathcal{I}}_1.$$

Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \colon (x,y,z)\in L_2\}$, то

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1) - \widehat{\Phi}(\zeta_2) \in \widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Теорема 2. *Кожне право-G-моногенне в області Ω_ζ відображення $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ має вигляд*

$$\Phi(\zeta) = \Phi_{10}(\zeta) + \Phi_{20}(\zeta),$$

де $\Phi_{10}\colon \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$, $\Phi_{20}\colon \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ — деякі право-G-моногенні в області Ω_ζ відображення зі значеннями у правих максимальних ідеалах $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$, а кожне ліво-G-моногенне в області Ω_ζ відображення має вигляд

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{\Phi}_{10}(\zeta) + \widehat{\Phi}_{20}(\zeta), \tag{17}$$

де $\widehat{\Phi}_{10} : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$, $\widehat{\Phi}_{20} : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ — *деякі ліво-*G*-моногенні в області* Ω_ζ *відображення зі значеннями в лівих максимальних ідеалах* $\widehat{\mathcal{I}}_1, \widehat{\mathcal{I}}_2$.

Доведення. Із розкладу одиниці $1 = e_1 + e_2$ випливає, що довільне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ має вигляд

$$\Phi = e_1\Phi + e_2\Phi$$

і при цьому $e_1\Phi \in \mathcal{I}_2$, а $e_2\Phi \in \mathcal{I}_1$.

Введемо позначення $\Phi_{10} := e_2\Phi$, $\Phi_{20} := e_1\Phi$. Покажемо, що відображення Φ_{10}, Φ_{20} право-G-моногенні в області Ω_ζ. Для цього рівність (5) помножимо зліва на e_1:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} e_1\Big(\Phi(\zeta+\varepsilon h) - \Phi(\zeta)\Big)\varepsilon^{-1} = e_1 h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3. \tag{18}$$

Оскільки елементи e_1 та h належать комутативній підалгебрі з базисом $\{e_1, e_2\}$, то $e_1 h = h e_1$, і тому з рівності (18) випливає рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \Big(e_1\Phi(\zeta+\varepsilon h) - e_1\Phi(\zeta)\Big)\varepsilon^{-1} = h e_1\Phi'(\zeta),$$

яка і доводить, що відображення Φ_{20} право-G-моногенне в області Ω_ζ. Аналогічно доводиться право-G-моногенність відображення Φ_{10}.

Аналогічно доводиться зображення (17).

Теорему 2 доведено.

В наступній теоремі описано всі право- та ліво-G-моногенні відображення зі значеннями відповідно в ідеалах $\mathcal{I}_1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_1$ за допомогою аналітичних функцій відповідної комплексної змінної.

Позначимо через D_k область комплексної площини $\mathbb{C}$, на яку область Ω_ζ відображається функціоналом f_k, $k = 1, 2$.

Теорема 3. *Нехай область* Ω *опукла в напрямку прямої* L_2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi_{10} : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$ *має вигляд*

$$\Phi_{10}(\zeta) = F_{12}(\xi_2)e_2 + F_{14}(\xi_2)e_4 \quad \forall \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{19}$$

а ліво-G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi}_{10} : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$ *записується у вигляді*

$$\widehat{\Phi}_{10}(\zeta) = F_{11}(\xi_2)e_2 + F_{13}(\xi_2)e_3 \quad \forall \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{20}$$

де $F_{12}, F_{14}, F_{11}, F_{13}$ — *деякі аналітичні в області* D_2 *функції змінної* $\xi_2 := x + ya_2 + zb_2$.

Доведення. Оскільки Φ_{10} набуває значень в ідеалі $\mathcal{I}_1$, то справджується рівність

$$\Phi_{10}(\zeta) = V_2(x,y,z)e_2 + V_4(x,y,z)e_4, \tag{21}$$

де $V_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ і $V_4 : \Omega \to \mathbb{C}$.

Для відображення Φ_{10} виконуються умови право-G- моногенності (11) при $\Phi = \Phi_{10}$, з яких після підстановки в них виразів (3), (21), з урахуванням однозначності розкладу елементів алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, отримаємо систему для знаходження функцій V_2, V_4:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_2}{\partial y} &= a_2\frac{\partial V_2}{\partial x},\\ \frac{\partial V_4}{\partial y} &= a_2\frac{\partial V_4}{\partial x},\\ \frac{\partial V_2}{\partial z} &= b_2\frac{\partial V_2}{\partial x},\\ \frac{\partial V_4}{\partial z} &= b_2\frac{\partial V_4}{\partial x}.\end{aligned} \tag{22}$$

З першого і третього рівнянь системи (22) знайдемо функцію V_2. Для цього виділимо дійсну і уявну частини змінної ξ_2:

$$\xi_2 = (x + y\,\mathrm{Re}\,a_2 + z\,\mathrm{Re}\,b_2) + i(y\,\mathrm{Im}\,a_2 + z\,\mathrm{Im}\,b_2) := \tau_2 + i\eta_2$$

і зазначимо, що наслідком вказаних рівнянь є рівності

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta_2}\,\mathrm{Im}\,a_2 = i\frac{\partial V_2}{\partial \tau_2}\,\mathrm{Im}\,a_2, \qquad \frac{\partial V_2}{\partial \eta_2}\,\mathrm{Im}\,b_2 = i\frac{\partial V_2}{\partial \tau_2}\,\mathrm{Im}\,b_2. \tag{23}$$

Оскільки з $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ випливає, що хоча б одне з чисел $\mathrm{Im}\,a_2$ або $\mathrm{Im}\,b_2$ відмінне від нуля, то з (23) отримуємо рівність

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} = i\frac{\partial V_2}{\partial \tau_2}.$$

Тепер так, як і при доведенні теореми 2 з [17], з використанням леми 3 і теореми 6 з [18] доводиться рівність $V_2(x_1,y_1,z_1) = V_2(x_2,y_2,z_2)$ для точок $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \Omega$ таких, що відрізок, який з'єднує ці точки, паралельний прямій L_2. Звідси випливає, що функція V_2 вигляду $V_2(x,y,z) := F_{12}(\xi_2)$, де F_{12} — довільна аналітична функція в області D_2, є загальним розв'язком системи, яка складається з першого і третього рівнянь системи (22).

Тепер з другого і четвертого рівнянь системи (22) аналогічно встановлюємо, що функція V_4 має вигляд $V_4(x,y,z) := F_{14}(\xi_2)$, де F_{14} — довільна аналітична в області D_2 функція.

Повністю аналогічно доводиться рівність (20).

Теорему 3 доведено.

В наступній теоремі, яка доводиться повністю аналогічно до теореми 3, описано всі право- та ліво-G-моногенні відображення зі значеннями відповідно в ідеалах $\mathcal{I}_2$ та $\widehat{\mathcal{I}}_2$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою аналітичних функцій відповідної комплексної змінної.

Теорема 4. *Нехай область Ω опукла в напрямку прямої L_1 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi_{20} : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ має вигляд*

$$\Phi_{20}(\zeta) = F_{21}(\xi_1)e_1 + F_{23}(\xi_1)e_3 \quad \forall \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{24}$$

а ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi}_{20} : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ записується у вигляді

$$\widehat{\Phi}_{20}(\zeta) = F_{22}(\xi_1)e_1 + F_{24}(\xi_1)e_4 \quad \forall \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{25}$$

де $F_{21}, F_{23}, F_{22}, F_{24}$ — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної $\xi_1 := x + ya_1 + zb_1$.

З урахуванням теореми 2 та рівностей (19), (24) доведено наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай область Ω опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, а $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ має вигляд*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4 \quad \forall \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{26}$$

де F_1 і F_3 — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної $\xi_1 := x + ya_1 + zb_1$, а F_2 і F_4 — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної $\xi_2 := x + ya_2 + zb_2$.

Очевидно, що відображення (13) буде право-G-моногенним в E_3, оскільки для нього функції F_1, F_2, F_3, F_4 будуть поліномами. Але тепер можна сказати й більше. А саме, право-G-моногенним у відповідній області відображенням буде не тільки поліном вигляду (13), а й ряд вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k c_k, \quad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}), \tag{27}$$

для якого комплексні степеневі ряди, що відіграють роль аналітичних функцій F_1, F_2, F_3, F_4, є збіжними.

Тепер, згідно з рівностями (20) і (25), справедливим є твердження для ліво-G-моногенного відображення.

Теорема 6. *Нехай область Ω опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, а $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне ліво-$G$-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ має вигляд*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_2)e_3 + F_4(\xi_1)e_4 \quad \forall \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{28}$$

де F_1 і F_4 — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної $\xi_1 := x + ya_1 + zb_1$, а F_2 і F_3 — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної $\xi_2 := x + ya_2 + zb_2$.

Аналогічно до (27) відображення

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k, \quad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}), \tag{29}$$

є ліво-G-моногенним.

Очевидно, що формула (26) дає можливість побудувати всі право-G-моногенні відображення $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, а формула (28) — усі ліво-G-моногенні відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою чотирьох аналітичних функцій відповідної комплексної змінної. Зауважимо, що в роботі [22] за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної побудовано так звані *A_t-гіперголоморфні* функції в довільній алгебрі Келі – Діксона A_t над полем $\mathbb{R}$.

Порівнюючи праві частини рівностей (26) і (28), приходимо до висновку, що відображення $\Psi(\zeta)$ буде одночасно право- і ліво-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд $\Psi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + c_3e_3 + c_4e_4$, де $c_3, c_4 \in \mathbb{C}$. Тепер очевидно, що відображення $\Psi(\zeta) = \zeta^n = \xi_1^n\, e_1 + \xi_2^n\, e_2$ одночасно право- і ліво-G-моногенне в E_3.

Безпосереднім наслідком зображень (26), (28) є той факт, що множини всіх право- і ліво-G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ утворюють функціональні алгебри в областях їх визначення. Тобто добуток двох, наприклад, право-G-моногенних відображень знову є право-G-моногенним відображенням.

З урахуванням розкладу (14) і правил множення (1) одержуємо інтегральні зображення право- і ліво-G-моногенних відображень:

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}(t-\zeta)^{-1}\Big(F_1(t)e_1+F_3(t)e_3\Big)dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}(t-\zeta)^{-1}\Big(F_2(t)e_2+F_4(t)e_4\Big)dt,$$

$$\widehat{\Phi}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\Big(F_1(t)e_1+F_4(t)e_4\Big)(t-\zeta)^{-1}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\Big(F_2(t)e_2+F_3(t)e_3\Big)(t-\zeta)^{-1}dt,$$

де замкнені жорданові спрямлювані криві Γ_k лежать у відповідних областях D_k, охоплюють відповідні точки ξ_k і не містять точок ξ_n, $k,n=1,2$, при $k\neq n$.

Зазначимо також, що похідні Гато право-G-моногенного відображення $\Phi(\zeta)$ і ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$ виражаються відповідно формулами

$$\Phi'(\zeta)=F_1'(\xi_1)e_1+F_2'(\xi_2)e_2+F_3'(\xi_1)e_3+F_4'(\xi_2)e_4 \tag{30}$$

і

$$\widehat{\Phi}'(\zeta)=F_1'(\xi_1)e_1+F_2'(\xi_2)e_2+F_3'(\xi_2)e_3+F_4'(\xi_1)e_4.$$

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівностей (26) і (28), праві частини яких є відповідно право- і ліво-G-моногенними відображеннями в області $\Pi_\zeta:=\{\zeta\in E_3:f_1(\zeta)\in\in D_1,\ f_2(\zeta)\in D_2\}$.

Теорема 7. *Нехай область Ω опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$, відображення $\Phi\colon\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ право-G-моногенне, а $\widehat{\Phi}\colon\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ліво-G-моногенне в області Ω_ζ. Тоді Φ і $\widehat{\Phi}$ продовжуються до відображень, які є відповідно право- і ліво-G-моногенними в області Π_ζ.*

Теорема 7 дає можливість легко знайти область право-G-моногенності відображення (27) і ліво-G-моногенності відображення (29).

Принциповим наслідком рівностей (26) та (28) є наступне твердження, справедливе для право- і ліво-G-моногенних відображень в довільній області Ω_ζ.

Теорема 8. *Нехай $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$, відображення $\Phi\colon\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ право-G-моногенне, а $\widehat{\Phi}\colon\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ліво-G-моногенне в області Ω_ζ. Тоді похідні Гато всіх порядків відображень Φ і $\widehat{\Phi}$ є відповідно право- і ліво-G-моногенними відображеннями в області Ω_ζ.*

Доведення. Оскільки куля $\mho$ (яка повністю міститься в області Ω) з центром у довільній точці $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ є опуклою множиною в напрямку прямих L_1 і L_2, то в околі $\mho_\zeta:=\{\zeta=xi_1+yi_2+zi_3\colon(x,y,z)\in\mho\}$ точки $\zeta_0=x_0i_1+y_0i_2+z_0i_3$ справджуються рівності (26) і (30). Але при цьому компоненти розкладу (30) є аналітичними функціями відповідних комплексних змінних, тобто вираз для $\Phi'(\zeta)$ має вигляд рівності (26), а це і означає праву-G-моногенність відображення $\Phi'(\zeta)$. Для похідної Гато довільного порядку і для ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$ доведення аналогічне.

Теорему 8 доведено.

5. Зв'язок право- і ліво-G-моногенних відображень з рівняннями в частинних похідних. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних із сталими коефіцієнтами:

$$\mathcal{L}_nU(x,y,z):=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n}C_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial^nU}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}=0,\quad C_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathbb{R}. \tag{31}$$

Якщо відображення $\Phi(\zeta)$ є n разів праводиференційовним за Гато, а відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$ — n разів ліводиференційовним за Гато, то наслідком рівностей (5) і (6) є відповідно рівності

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = i_1^\alpha\, i_2^\beta\, i_3^\gamma\, \Phi^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta) = i_2^\beta\, i_3^\gamma\, \Phi^{(n)}(\zeta)$$

і

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\widehat{\Phi}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \widehat{\Phi}^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta)\, i_1^\alpha\, i_2^\beta\, i_3^\gamma = \widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta)\, i_2^\beta\, i_3^\gamma.$$

Тому внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_n\Phi(\zeta) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, i_2^\beta\, i_3^\gamma\ \Phi^{(n)}(\zeta) \tag{32}$$

кожне n разів праводиференційовне за Гато відображення Φ при виконанні умов $\Phi^{(n)}(\zeta) \neq 0$ і

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, i_2^\beta\, i_3^\gamma = 0 \tag{33}$$

задовольняє рівняння $\mathcal{L}_n\Phi(\zeta) = 0$. Аналогічно внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_n\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta) \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, i_2^\beta\, i_3^\gamma \tag{34}$$

кожне n разів ліводиференційовне за Гато відображення $\widehat{\Phi}$ при виконанні умов $\widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta) \neq 0$ і (33) задовольняє рівняння $\mathcal{L}_n\widehat{\Phi}(\zeta) = 0$. Відповідно, всі дійснозначні компоненти розкладу відображень Φ і $\widehat{\Phi}$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4, ie_1, ie_2, ie_3, ie_4\}$ є розв'язками рівняння (31).

Таким чином, задача про побудову розв'язків рівняння (31) у вигляді компонент право- або ліводиференційовних за Гато відображень зводиться до відшукання в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ трійки лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів (3), які задовольняють характеристичне рівняння (33).

Зауважимо, що якщо обидва функціонали f_1, f_2 набувають значень в $\mathbb{C}$, то згідно з теоремою 8 кожне право- і ліво-G-моногенне відображення задовольняє рівність (32).

Очевидно, що співвідношення

$$f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C} \tag{35}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Якщо рівняння (31) має особливий вигляд, то можна вказати достатні умови для виконання співвідношень (35). Для цього введемо позначення

$$P(a,b) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a^\beta\, b^\gamma. \tag{36}$$

Теорема 9. *Нехай в алгебрі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *існує трійка лінійно незалежних над полем* $\mathbb{R}$ *векторів вигляду* (3), *які задовольняють рівність* (33). *Тоді якщо* $P(a,b) \neq 0$ *при всіх дійсних значеннях* a, b, *то виконуються співвідношення* (35).

Доведення. Використовуючи таблицю множення алгебри, маємо рівності

$$i_2^\beta = a_1^\beta e_1 + a_2^\beta e_2, \qquad i_3^\gamma = b_1^\gamma e_1 + b_2^\gamma e_2.$$

Тепер рівність (33) набирає вигляду

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\left(a_1^\beta\, b_1^\gamma\, e_1 + a_2^\beta\, b_2^\gamma\, e_2\right) = 0,$$

або в рівносильній формі

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_k^\beta\, b_k^\gamma = 0, \quad k = 1, 2. \tag{37}$$

Оскільки розв’язок системи (37) існує (за умовою теореми) і $P(a, b) \neq 0$ при всіх дійсних a, b, то рівності (37) можуть виконуватися лише тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить множині $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Теорему 9 доведено.

Тепер зауважимо, що з умови теореми $P(a, b) \neq 0$ випливає, що завжди $C_{n,0,0} \neq 0$, оскільки в іншому випадку при $a = b = 0$ було б $P(a, b) = 0$. Крім того, оскільки функція $P(a, b)$ неперервна на $\mathbb{R}^2$, то умова $P(a, b) \neq 0$ по суті означає одне з двох: $P(a, b) > 0$ або $P(a, b) < 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$.

Очевидно також, що рівняння вигляду (31) еліптичного типу завжди задовольняє умову $P(a, b) \neq 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$. Але водночас існують рівняння вигляду (31), для яких $P(a, b) > 0$ і які не є еліптичними. Таким, наприклад, є рівняння

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial z^4} = 0.$$

6. Приклад. Покажемо зв’язок право- і ліво-G-моногенних відображень з тривимірним рівнянням Лапласа

$$\Delta_3 U(x, y, z) := \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{38}$$

Для рівняння (38) характеристичне рівняння (33) набирає вигляду

$$1 + i_2^2 + i_3^2 = 0. \tag{39}$$

Подібно до [23], трійку лінійно назалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів $i_1 = 1$, i_2, i_3 назвемо *гармонічною трійкою*, якщо має місце рівність (39) і виконуються умови $i_2^2 \neq 0$, $i_3^2 \neq 0$.

Після підстановки рівностей (3) в умови (39) приходимо до наступного твердження: *гармонічними трійками в алгебрі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є вектори* $1, i_2, i_3$, *розклад яких за базисом* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *має вигляд* (3), *і комплексні числа* a_k, b_k, $k = 1, 2$, *задовольняють систему рівнянь*

$$1 + a_1^2 + b_1^2 = 0, \qquad 1 + a_2^2 + b_2^2 = 0. \tag{40}$$

Систему (40) задовольняють, зокрема, вирази $a_1 = i \sin t$, $b_1 = i \cos t$, $a_2 = i \sin \tau$, $b_2 = i \cos \tau$, t, $\tau \in \mathbb{C}$, яким відповідають

$$\xi_1 = x + iy \sin t + iz \cos t, \qquad \xi_2 = x + iy \sin \tau + iz \cos \tau, \quad t, \tau \in \mathbb{C}. \tag{41}$$

Оскільки для рівняння Лапласа $P(a, b) = 1 + a^2 + b^2 > 0$, то умови теореми 9 виконуються, а отже, кожне право- і ліво-G-моногенне відображення задовольняє рівняння (38). Зображення (26) і (28), в яких ξ_1, ξ_2 визначено рівностями (41), визначають моногенні відображення в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, пов’язані з рівнянням (38). Звідси випливає, що розв’язками рівняння (38) є дійсна і уявна частини функції $U(x, y, z) = F(x + iy \sin t + iz \cos t)$, де $t \in \mathbb{C}$ і F — довільна аналітична функція.

Література

1. *Gürlebeck K., Sprössig W.* Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers. – John Wiley and Sons, 1997.
2. *Kravchenko V. V., Shapiro M. V.* Integral representations for spatial models of mathematical physics // Pitman Research Notes in Mathematics. – Addison Wesley Longman Inc, 1996.
3. *Moisil G. C., Theodoresco N.* Functions holomorphes dans l'espace // Mathematica (Cluj). – 1931. – **5**. – P. 142 – 159.
4. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966.
5. *Fueter R.* Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen // Comment. math. helv. – 1935. – **7**. – P. 307 – 330.
6. *Sudbery A.* Quaternionic analysis // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1979. – **85**. – P. 199 – 225.
7. *Leutwiler H.* Modified quaternionic analysis in $\mathbb{R}^3$ // Complex Variables Theory Appl. – 1992. – **20**. – P. 19 – 51.
8. *Hempfling Th., Leutwiler H.* Modified quaternionic analysis in $\mathbb{R}^4$ // Clifford Algebras and their Appl. in Math. Physics. – Aachen; Dordrecht: Kluwer, 1998. – P. 227 – 238.
9. *Eriksson-Bique S.-L.* A correspondence of hyperholomorphic and monogenic functions in $\mathbb{R}^4$ // Clifford Analysis and its Applications. NATO Sci. Ser. – 2001. – **25**. – P. 71 – 80.
10. *Cullen C. G.* An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions // Duke Math. J. – 1965. – **32**. – P. 139–148.
11. *Gentili G., Struppa D. C.* A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable // Comptes Rend. Math. – 2006. – **342**, № 10. – P. 741 – 744.
12. *Colombo F., Sabadini S., Struppa D. C.* Noncommutative functional calculus: theory and applications of slice hyperholomorphic functions // Progr. Math. – 2011. – **289**.
13. *Gentili G., Stoppato C., Struppa D.* Regular functions of a quaternionic variable // Springer Monogr. Math. – 2013.
14. *Segre C.* The real representations of complex elements and extension to bicomplex systems // Math. Ann. – 1892. – **40**. – P. 413 – 467.
15. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Мир, 1976.
16. *Plaksa S. A., Pukhtaevich R. P.* Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra // An. şti. Univ. Ovidius Constanţa. – 2014. – **22**, № 1. – P. 221 – 235.
17. *Plaksa S. A., Shpakovskii V. S.* Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank // Ukr. Math. J. – 2011. – **62**, № 8. – P. 1251 – 1266.
18. *Толстов Г. П.* О криволинейном и повторном интеграле // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1950. – **35**. – С. 3 – 101.
19. *Herus O. F.* On hyperholomorphic functions of the space variable // Ukr. Math. J. – 2011. – **63**, № 4. – P. 530 – 537.
20. *Gerus O. F., Shapiro M.* On the boundary values of a quaternionic generalization of the Cauchy-type integral in $\mathbb{R}^2$ for rectifiable curves // J. Natur. Geom. – 2003. – **24**, № 1–2. – P. 121 – 136.
21. *Schneider B.* Some properties of a Cauchy-type integral for the Moisil-Theodoresco system of partial differential equations // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 1. – P. 105 – 112.
22. *Flaut C., Shpakivskyi V.* Holomorphic functions in generalized Cayley – Dickson algebras // Adv. Appl. Clifford Alg. – 2015. – **25**, № 1. – P. 95 – 112.
23. *Ketchum P. W.* Analytic functions of hypercomplex variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**, № 4. – P. 641 – 667.

Одержано 16.12.14,
після доопрацювання — 15.02.15