

ФУНКЦІЇ З НЕВИРОДЖЕНИМИ КРИТИЧНИМИ ТОЧКАМИ НА МЕЖІ ПОВЕРХНІ

We prove an analog of the Morse theorem in the case where the critical point belongs to the boundary of an n -dimensional manifold and find the least number of critical points for the Morse functions defined on the surfaces whose critical points coincide with the critical points of their restriction to boundary.

Доказан аналог теореми Морса в случае, когда критическая точка лежит на границе n -мерного многообразия. Найдено минимальное число критических точек для функций Морса на поверхности, у которых критические точки совпадают с критическими точками их ограничения на границу поверхности.

1. Вступ. У просторі всіх функцій з C^∞ -топологією на замкненому многовиді множина функцій Морса утворює відкриту скрізь щільну множину. Ці функції є структурно стійкими. На многовидах з межею від функцій Морса природно вимагають, щоб їх обмеження на внутрішність було функцією Морса. Проте в залежності від поставлених цілей поведінка на межі може бути різною. Так, у класичній теорії Морса [1] функції Морса є сталими на кожній компоненті межі. Якщо не накладати ніяких обмежень на поведінку на межі, то функція в загальному положенні не має критичних точок на межі і її обмеження на межу є функцією Морса. Такі функції часто називають m -функціями [2]. Третім типом функцій є функції з критичними точками на межі, які розглядаються у цій статті. Зауважимо, що є наукові роботи, де під функціями Морса розуміють функції кожного з трьох типів.

Топологічна класифікація є провідною задачею топологічних досліджень. Класичними роботами по дослідженню топологічних властивостей функцій є роботи [1, 3–5]. Г. Ріб та А. С. Кронрод побудували граф, що дозволяє класифікувати прості функції Морса на поверхнях. О. В. Болсинов та А. Т. Фоменко [6], досліджуючи гамільтонову механіку, розглядали пошарову еквівалентність функцій Морса на поверхні, ввівши для цього поняття атомів та молекул.

На поверхнях з межею С. І. Максименко [7] та О. О. Пришляк [8] отримали топологічну класифікацію m -функцій.

Часто виникають ситуації, коли потрібно розглядати функції, інваріантні при деяких відображеннях, симетриях тощо. Нехай W — замкнений 2-вимірний многовид, на якому задано інволюцію $\varphi: W \rightarrow W$, множина нерухомих точок $fix(\varphi)$ відображення φ є гладким одновимірним підмноговидом, $M = W/\sim$, де $x \sim \varphi(x)$, $x \in W$. Тоді $fix(\varphi) = \partial M$. Нехай f — така функція Морса на W , що $f|_{fix(\varphi)}$ теж є функцією Морса і критичні точки f належать множині $fix(\varphi)$. Таким чином, виникає функція на поверхні M , всі критичні точки якої належать $\partial M = fix(\varphi)$.

Основною метою роботи є дослідження топологічних властивостей функцій, критичні точки яких є невикорисаними та збігаються з критичними точками обмеження цих функцій на межу двовимірного многовиду і є невикорисаними для цього обмеження.

* Підтримано Австрійською академією наук у рамках проекту між Австрійською академією наук та НАН України „Нові математичні методи в астрофізиці елементарних частинок і квантовій фізиці (2015–2017)”.

2. Функції на n -вимірних многовидах з межею. Нехай M — многовид розмірності n з межею ∂M , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функція, що визначена на многовиді M . Локально межу можна записати у вигляді $\partial M = \{x_1, x_2, \dots, x_n | x_n = 0\}$ для деякої системи координат (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Нехай p_0 — критична точка функції f , (x_1, x_2, \dots, x_n) — локальна система координат в околі p_0 . Нагадаємо, що критична точка p_0 функції f називається невинродженою, якщо $\det H_f(x_1, x_2, \dots, x_n)(p_0) \neq 0$, де $H_f(x_1, x_2, \dots, x_n)(p_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)_{i,j=1}^n (p_0)$ — гессіан функції f у точці p_0 . Гладка функція $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ називається *функцією Морса*, якщо всі її критичні точки є невинродженими.

Рівнем $c \in \mathbb{R}$ функції $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ називається множина $\{f^{-1}(c)\} = \{p \in M | f(p) = c\}$. Функцію $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, визначену на многовиді, називатимемо *простою*, якщо на кожному рівні вона має не більше однієї критичної точки. Далі будемо розглядати лише прості функції.

Теорема 1. Нехай $p_0 \in \partial M$ — така невинроджена критична точка функції f і невинроджена критична точка обмеження $f|_{\partial M}$ функції f на ∂M , що $f(p_0) = 0$. Тоді існує система координат (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_n \geq 0$, в околі p_0 , для якої $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$ і функція f має локальне зображення

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2 \quad (1)$$

для деякого $\delta \in \{-1, +1\}$.

Доведення. Виберемо довільну локальну систему координат (u_1, u_2, \dots, u_n) в околі критичної точки p_0 таку, що $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$ і $u_n \geq 0$. Тоді межа задається рівністю $u_n = 0$.

Як і при доведенні леми Морса в [9, с. 44], з умови $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ випливає, що існують функції $h_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $i \in \overline{1, n}$ (наприклад, $h_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_0^1 \frac{df(u_1 t, \dots, u_n t)}{du_i} dt$, $i \in \overline{1, n}$), такі, що $f = \sum_{i=1}^n u_i \cdot h_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Для критичних точок $\frac{\partial f}{\partial u_i}(0, 0, \dots, 0) = h_i(0, 0, \dots, 0) = 0$. Тоді, в свою чергу, $f = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \cdot g_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ для деяких функцій $g_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $i, j = \overline{1, n}$. Поклавши $G_{ij} \equiv (g_{ij} + g_{ji})/2$, отримаємо

$$f = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \cdot G_{ij}. \quad (2)$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $G_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то з невинродженості $H_{f|_{\partial M}}(x_1, x_2, \dots, x_n)(p_0)$ випливає, що існує $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ таке, що $G_{1k} \neq 0$ і заміна $v_1 = u_1 + u_k, v_k = u_1 - u_k$ приводить до бажаного результату). Враховуючи неперервність G_{ij} , переконуємося, що $G_{11} \neq 0$ в деякому околі точки p_0 .

З (2) маємо $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(0, 0, \dots, 0) = 2G_{11}(0, 0, \dots, 0) \neq 0$. Тому заміна $x_1 = \sqrt{|G_{11}|} \cdot \left(u_1 + \sum_{i=2}^n \frac{G_{1i}}{G_{11}} \cdot u_i \right)$ є коректною, а решта координат, включаючи u_n , не змінюються. Це означає, що межа $\partial M = \{u_n = 0\}$ не змінюється при даному перетворенні і область $\{u_n \geq 0\}$ переходить сама в себе.

Тоді мають місце зображення $f = \left(x_1^2 + \sum_{i,j=2}^n u_i u_j \cdot G_{ij} - \left(\sum_{i=2}^n u_i \cdot G_{1i} \right)^2 / G_{11} \right)$ при $G_{11} > 0$ \wedge $\left(-x_1^2 + \sum_{i,j=2}^n u_i u_j \cdot G_{ij} - \left(\sum_{i=2}^n u_i \cdot G_{1i} \right)^2 / G_{11} \right)$ при $G_{11} < 0$.

Далі, міркуючи аналогічно, отримуємо $f = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 + F(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \cdot u_n^2$ для деяких $\delta_i \in \{-1, +1\}$, $i = \overline{1, n-1}$, і деякої функції F , яка не залежить від u_n . З невідродженості критичної точки функції f випливає, що $F(0) \neq 0$.

Поклавши $x_n = \sqrt{|F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})|} u_n$, одержимо $f = \sum_{i=1}^n \delta_i x_i^2$, $\delta_i \in \{-1, +1\}$.

Також зауважимо, що останнє перетворення координат не змінює межу многовиду ∂M і область $\{u_n \geq 0\}$ переходить у $\{x_n \geq 0\}$. Замінивши x_i на x_j , $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, в останньому зображенні функції f , отримуємо рівність (1).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Такий же результат отримано у [10] (лемі 2.6), але на відміну від теореми 1 необхідними умовами у вказаній лемі є скрізь дотичність поля градієнта.

Зауваження 2. Якщо $p_0 \in \partial M$ не є критичною точкою функції f такої, що $f(p_0) = 0$, то існує система координат (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_n \geq 0$, в околі p_0 , для якої функція f має вигляд

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1.$$

Справді, нехай $p_0 \in \partial M$ не є критичною точкою функції f , $f(p_0) = 0$. Виберемо довільну локальну систему координат (u_1, u_2, \dots, u_n) , $u_n \geq 0$, в околі p_0 таку, що $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$. Тоді $\frac{\partial f}{\partial u_i}(p_0) \neq 0$ для деякого $i \in \overline{1, n-1}$. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що $\frac{\partial f}{\partial u_1}(p_0) \neq 0$. Оскільки $f(p_0) = 0$, то існують такі гладкі функції $a_i(u_1, \dots, u_n)$, що $f = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$, причому $a_1 \neq 0$ в деякому околі p_0 . Тоді гладка заміна координат $x_1 = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$, $x_i = u_i$, $i = \overline{2, n}$, яка не змінює межу многовиду і область $u_n \geq 0$ переводить в область $x_n \geq 0$, приводить функцію f до потрібного вигляду.

Нехай $p_0 \in \partial M$ — критична точка функції f і її обмеження f_∂ на ∂M , тоді *індексом критичної точки* називається пара (λ, δ) , що визначається рівністю (1).

Ця пара чисел повністю визначається парою індексів Морса для функцій f і f_∂ . Оскільки індекси Морса не залежать від способу зведення функції до канонічного вигляду (див., наприклад, [9]), то те саме виконується для індексу (λ, δ) .

3. Функції на поверхнях з межею. З теореми 1 безпосередньо випливає такий наслідок.

Наслідок. В околі точки, що є невідродженою критичною точкою як для функції f на поверхні, так і для її обмеження на межу, функція заміною координат зводиться до однієї з таких форм:

- (i) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $y \geq 0$,
- (ii) $f(x, y) = -x^2 + y^2$, $y \geq 0$,
- (iii) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $y \geq 0$,
- (iv) $f(x, y) = -x^2 - y^2$, $y \geq 0$.

Зауваження 3. З наслідку отримуємо локальні зображення функції Морса в околі її критичної точки, яка належить межі. Але на відміну від леми Морса [9, с. 44] ми не можемо звести їх до трьох форм, бо перетворення координат, яке (ii) переводить у (iii) чи навпаки, змінює межу поверхні.

Нагадаємо, що ми розглядаємо функції, які на кожному критичному рівні мають лише одну критичну точку. Дослідимо структуру функції в околі критичного рівня для випадків різних індексів критичної точки.

1. *Індекс критичної точки p_0 дорівнює $(0, +1)$.* Згідно з теоремою 1 існує локальна система координат (x, y) в околі p_0 така, що $f = x^2 + y^2$. Звідси видно, що p_0 є точкою локального мінімуму. Тоді при проходженні p_0 (заміни $f^{-1}(p_0 - \varepsilon)$ на $f^{-1}(p_0 + \varepsilon)$ для досить малого ε) додається півдиск $D_+^2 = \{(x, y) \in D^2 | y \geq 0\}$, де $D^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Це показано на рис. 1, а.

2. *Індекс критичної точки p_0 дорівнює $(1, -1)$.* Тоді функція має локальне зображення $f = -x^2 - y^2$, звідки видно, що точка p_0 є точкою локального максимуму. При проходженні p_0 приклеюється півдиск D_+^2 так, що точки $\{y = 0\} \cap \partial D_+^2$ приклеюються до кутів, ∂D_+^2 — до межі лінії рівня функції, а $\{(x, y) \in D_+^2 | y = 0\}$ додається до межі поверхні. Цю перебудову зображено на рис. 1, б.



Рис. 1

3. *Індекс критичної точки p_0 дорівнює $(1, +1)$.* За теоремою 1 функцію f можна подати у вигляді $f = -x^2 + y^2$ для деякої системи координат (x, y) в околі p_0 . Точки перетину межі поверхні з межею лінії рівня функції f ми називатимемо кутами. При проходженні критичної точки p_0 перебудова відбувається таким чином: приклеюється смужка $ABCD$ до межі лінії рівня так, щоб вершини A і D приклеїлися до кутів, а сторони AB і CD — до компоненти межі лінії рівня. При цьому до межі додаються сторони BC і AD , зокрема AD до частини межі ∂M на даній лінії рівня. Цю перебудову зображено на рис. 2, а.

4. *Індекс критичної точки p_0 дорівнює $(0, -1)$.* Тоді функцію можна записати у вигляді $f = x^2 - y^2$ і перебудова відбуватиметься так: приклеюється смужка (квадрат) $ABCD$ так, що сторона BC приклеюється до межі лінії рівня. При цьому до межі додаються сторони AB , CD і AD , причому AD — до компоненти межі ∂M (рис. 2, б).



Рис. 2

Функції Морса f і g на поверхнях X і Y будемо називати *пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $\lambda: X \rightarrow Y$, що переводить компоненти лінії рівня функції f у компоненти лінії рівня функції g . Також кажуть, що пара (X, f) пошарово еквівалентна парі (Y, g) .

Атомом називається окіл критичного рівня, що задається нерівністю $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достатньо малого ε , розбитий на лінії рівня і розглянутий з точністю до пошарової еквівалентності, тобто атом — це клас пошарової еквівалентності пари $(U = \{x | c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon\}, f|_U)$.

Функції Морса f і g називаються *пошарово оснащено еквівалентними* в околі своїх критичних рівнів $f^{-1}(c_1)$ і $g^{-1}(c_2)$, якщо існують $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ і гомеоморфізм $\lambda: f^{-1}(c_1 - \varepsilon_1, c_1 + \varepsilon_1) \rightarrow g^{-1}(c_2 - \varepsilon_2, c_2 + \varepsilon_2)$, який переводить лінії рівня функції f у лінії рівня функції g , зберігаючи при цьому напрямок зростання функцій.

Тоді означення f -атома вводиться аналогічно до атома, але розглядається з точністю до пошарової оснащеної еквівалентності. Таким чином, кожному атому відповідають два f -атоми, які отримуються один з одного заміною знака функції.

На рис. 1–3 зображено f -атоми, які називатимемо атомами A (A_1 — рис. 1, a , A_2 — рис. 1, $б$), B (B_1 (індекс $(1, +1)$) — рис. 3, a , B_2 (індекс $(0, -1)$) — рис. 3, $б$) і C (C_1 — рис. 2, a і C_2 — рис. 2, $б$). Атом C зручніше зображати так, як це показано на рис. 4 (a — атом C_1 (індекс $(1, +1)$, $б$ — атом C_2 (індекс $(0, -1)$)). (Це проекція частини тора $x = \cos u$, $y = (3 + \sin u) \cos u$, $y = (3 + \sin u) \sin u$, $x > 0$, $1 \leq z \leq 3$ з критичною точкою $(0, 0, 2)$ на площину yz , функція висоти $f(x, y, z) = z$.)



Рис. 3



Рис. 4

Теорема 2. *Кожен атом збігається або з атомом A , або з атомом B , або з атомом C , кожному з яких відповідають два f -атоми.*

Доведення. У випадках, коли індекс критичної точки дорівнює $(0, +1)$ чи $(1, -1)$, отримаємо атом A . Тому далі вважаємо, що індекс дорівнює $(1, +1)$ або $(0, -1)$. Нехай $f(p_0) = c$. Розглянемо окіл критичної точки p_0 , обмежений $f^{-1}(c - \varepsilon)$, $f^{-1}(c + \varepsilon)$, деякими траєкторіями поля градієнта і межею поверхні ∂M . Називатимемо областями додатності функції f частину поверхні, де $\{f > c\}$, і будемо зображати її заштрихованою, та областями від'ємності частину поверхні, де $\{f < c\}$, і будемо зображати її білим кольором. Ми отримаємо поверхню, зображену на рис. 5. Існують дві можливості склейки для кожного з атомів: склеювати околиці в межі кінців критичного рівня або ні. У випадку склейки отримуємо атом B , в іншому випадку — атом C .

Теорему доведено.

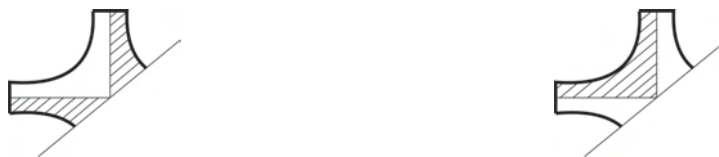


Рис. 5

Означення 1. Просту функцію Морса $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ називатимемо *тт-функцією*, якщо обмеження $f|_{\partial M}$ функції на межу ∂M теж є функцією Морса і всі критичні точки функції f належать межі поверхні ∂M .

Означення 2. *Мт-функцію називатимемо оптимальною, якщо вона має найменше серед усіх тт-функцій число критичних точок на заданій поверхні.*

Нехай f — функція Морса. Компоненти ліній рівня називатимемо шарами. В результаті многовид розбивається на об'єднання шарів і отримуємо шарування з особливостями. Розглянемо відношення еквівалентності на M , в якому точки еквівалентні, якщо вони належать одному шару. Ввівши фактор-топологию у просторі шарів, отримаємо деякий граф Γ , який називається *графом Ріба* функції Морса на многовиді.

Лема 1. *Оптимальна тт-функція на поверхні має рівно один мінімум і один максимум.*

Доведення. Для доведення леми потрібно показати: 1) існування тт-функції, яка має рівно один мінімум і один максимум; 2) якщо тт-функція має принаймні дві точки мінімуму чи максимуму, то вона не є оптимальною.

Спершу розглянемо деякі попередні викладки. Зауважимо, що якщо поверхня містить один f -атом B , приклеювання якого змінює компоненту лінії рівня з відрізка на коло, то повинен міститися і симетричний йому атом B , який з кола робить відрізок. Отже, приклеювання такої пари атомів додає до поверхні смужку (приклеєний за протилежними сторонами квадрат), що у свою чергу можна також отримати приклеюванням двох симетричних f -атомів C . Це показано на рис. 6. Тому далі замінимо всі атоми B на атоми C . Така заміна змінює функцію, але не змінює поверхню та число критичних точок.

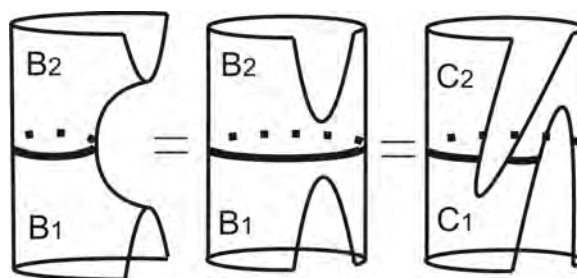


Рис. 6

Тоді кожна компонента зв'язності кожного рівня функції буде гомеоморфна відріжку або точці. Отже, поверхня гомотопічно еквівалентна графу Ріба. Звідси випливає, що ейлерова характеристика поверхні, як гомотопічний інваріант, дорівнює ейлеровій характеристиці відповідного графу Ріба. Нехай граф Ріба має a вершин валентності 1 (вони відповідають за мінімуми і максимуми) та b вершин валентності 3 (вони відповідають за сідлові точки). Тоді граф має $a + b$ вершин і $\frac{3b + a}{2}$ ребер. Отже, ейлерова характеристика $\chi = a + b - \frac{3b + a}{2} = \frac{a - b}{2}$. Звідси

$b = a - 2\chi$ та число критичних точок дорівнює $a + b = 2a - 2\chi \geq 4 - 2\chi$, бо $a \geq 2$ (оскільки у функції на компактті завжди є точка мінімуму і точка максимуму).

1. Розглянемо поверхні, зображені на рис. 7, та mt -функцію f . На рис. 7, а зображено орієнтовану поверхню роду g з k компонентами межі — двовимірний диск з $k - 1$ смужкою та $g - k + 1$ парою перехрещених смужок. На рис. 7, б зображено неорієнтовану поверхню роду g з k компонентами межі — двовимірний диск з $k - 1$ смужкою та $g - k + 1$ листком Мебіуса. Функція f має рівно один локальний мінімум і один локальний максимум і, отже, загальне число її критичних точок дорівнює $4 - 2\chi$. Це означає, що вона має найменше можливе число критичних точок на даній поверхні, тобто є оптимальною.

2. Далі припустимо, що mt -функція має принаймні дві точки максимуму чи мінімуму, тобто $a \geq 3$. Тоді загальне число її критичних точок $2a - 2\chi \geq 6 - 2\chi > 4 - 2\chi$, де $4 - 2\chi$ — число критичних точок заданої у п. 1 mt -функції. Це означає, що дана mt -функція не буде оптимальною.

Лему доведено.

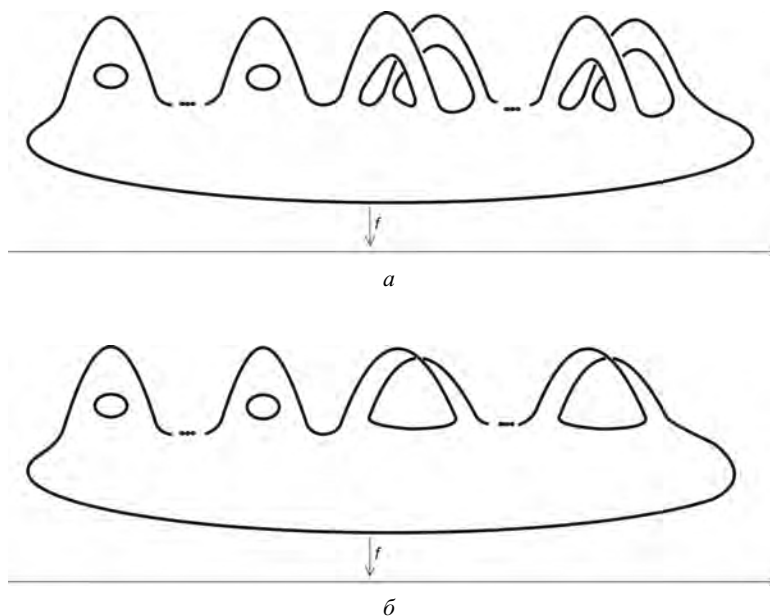


Рис. 7

Нехай f — mt -функція на поверхні M . Через c_0^+ позначимо число критичних точок функції f індексу $(0, 1)$, c_0^- — $(0, -1)$, c_1^+ — $(1, +1)$, c_1^- — $(1, -1)$.

Лема 2. Нехай $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — оптимальна mt -функція на поверхні M . Тоді ейлерова характеристика поверхні дорівнює $\chi(M) = \frac{c_0^+ - c_0^- - c_1^+ + c_1^-}{2}$.

Доведення. Розглянемо таке подвоєння DM поверхні M , що атлас в точках межі задовольняє умови теореми 1 і зауваження 2. Тоді функцію f можна симетрично продовжити до оптимальної mt -функції на DM . Звідси $\chi(DM) = 2\chi(M) - \chi(\partial M) = 2\chi(M)$, оскільки межа поверхні ∂M є диз'юнктним об'єднанням кіл S^1 , а тому $\chi(\partial M) = 0$. Таким чином, $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(DM)$.

З іншого боку, всі критичні точки на поверхні DM будуть внутрішніми, тому має місце рівність Морса [3, с. 223] $\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2$, де c_i — число критичних точок індексу i ,

$i = \overline{0, 2}$. З останньої рівності, підставляючи $c_0 = c_0^+$, $c_1 = c_0^- + c_1^+$, $c_2 = c_1^-$, отримуємо

$$\chi(M) = \frac{c_0^+ - (c_0^- + c_1^+) + c_1^-}{2}.$$

Теорема 3. *Оптимальна mt -функція на орієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $4g + 2k$ критичних точок, а на неорієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі — $2g + 2k$ критичних точок.*

Доведення. Нехай M — поверхня роду g з k компонентами межі, f — оптимальна mt -функція на ній. Зауважимо, що збільшення компонент межі зменшує ейлерову характеристику, оскільки воно рівносильне приклеюванню смужки. Тоді $\chi(M) = 2 - 2g - k$ для орієнтованого випадку і $\chi(M) = 2 - g - k$ у випадку неорієнтованої поверхні M .

З іншого боку, з леми 2 отримуємо $\chi(M) = \frac{c_0^+ - c_0^- - c_1^+ + c_1^-}{2} = \frac{2 - c_0^- - c_1^+}{2}$, оскільки згідно з лемою 1 оптимальна mt -функція має рівно один мінімум і рівно один максимум, які відповідають критичним точкам індексу $(0, +1)$ і $(1, -1)$ відповідно.

Далі елементарними перетвореннями отримаємо $c_0^+ + c_0^- + c_1^+ + c_1^- = 4g + 2k$ і $c_0^+ + c_0^- + c_1^+ + c_1^- = 2g + 2k$ для орієнтованого і неорієнтованого випадків відповідно, що і доводить теорему.

Природно виникає питання: чи кожен функцію Морса, задану на межі поверхні, можна продовжити на всю поверхню до оптимальної mt -функції з однозв'язними компонентами рівня?

Відразу ж з останньої теореми можна зробити висновок, що необхідною умовою є те, що для орієнтованої (неорієнтованої) поверхні роду g з k компонентами межі функція повинна мати $4g + 2k$ ($2g + 2k$) критичних точок.

Розглянемо випадок орієнтованої поверхні M роду g з однією компонентою межі. Тоді число критичних точок оптимальної функції дорівнює $4g + 2$.

Теорема 4. *Нехай f — функція Морса, задана на межі орієнтованої поверхні M роду g з однією компонентою межі, яка має $4g + 2$ критичні точки з критичними значеннями $c_1, c_2, \dots, c_{4g+2}$ ($c_1 < c_2 < \dots < c_{4g+2}$). Тоді якщо функцію f можна продовжити на всю поверхню до оптимальної mt -функції з однозв'язними компонентами рівня, то справджуються такі твердження:*

(i) *перші три критичні значення c_1, c_2, c_3 функції f (як функції на колі) відповідають точкам локального мінімуму;*

(ii) *серед критичних значень $c_4, c_5, \dots, c_{4i+3}$ є принаймні $2i$ значень, які відповідають точкам локального мінімуму, для всіх натуральних i таких, що $4i + 3 \leq 4g + 2$.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки компоненти множин рівня однозв'язні, то поверхня M містить лише атоми A і C . З теореми 3 для поверхні M маємо $\chi(M) = 1 - 2g$. Також оскільки точки, які відповідають числам мінімуму, збільшують число компонент ліній рівня на 1, а точки, які відповідають числам максимуму, зменшують їх на 1, то для довільного регулярного значення a функції f частина поверхні $f^{-1}((-\infty, a))$ містить більше точок локального мінімуму, ніж максимуму.

Припустимо, від супротивного, що (i) не виконується. Тоді за умовою теореми значення c_1 є найменшим критичним значенням, тобто відповідає точці мінімуму на колі. Значення c_2 не може бути локальним максимумом, оскільки дві сусідні критичні точки на колі будуть мати значення менші за c_2 , і тоді c_2 буде щонайменше третім за зростанням критичним значенням, що суперечить умові теореми. Таким чином, залишився випадок, коли c_3 відповідає точці максимуму. Розглянемо частину поверхні $f^{-1}((-\infty, c_3 + \varepsilon])$ для достатньо малого ε . Тоді лінія

рівня $f^{-1}(c_3 + \varepsilon)$ має одну компоненту зв'язності. Приклеїмо до поверхні $f^{-1}((-\infty, c_3 + \varepsilon])$ двовимірний півдиск $D_+^2 = \{(x, y) \in D^2 | y \geq 0\}$ за гомеоморфізмом, що відображає $[-1, 1] \times 0$ у $f^{-1}(c_3 + \varepsilon)$, і продовжимо функцію на півдиск за формулою $f(x, y) = y + c_3 + \varepsilon$. Тоді згідно з лемою 2 ейлерова характеристика отриманої поверхні M' $\chi(M') = 0$. Це означає, що M' містить принаймні дві компоненти межі. Оскільки решта (після третього) атомів не будуть приклеюватись до однієї з цих компонент межі, то число компонент межі може тільки збільшитись. Отримана суперечність доводить твердження (i).

По-іншому у справедливості твердження (i) можна переконатися за допомогою послідовної склейки атомів A і C , а саме, атоми A_1 і C_1 приклеюються однозначно. Це показує, що значення c_1 і c_2 відповідають точкам мінімуму. Далі, якщо приклеювати атом C_1 (однозначно з точністю до симетричності), то c_3 теж буде відповідати точці мінімуму, а якщо атом C_2 (це можна зробити двома способами), то ми отримаємо дві компоненти межі. Це призводить до суперечності, тому c_3 теж буде відповідати точці мінімуму (рис. 8).

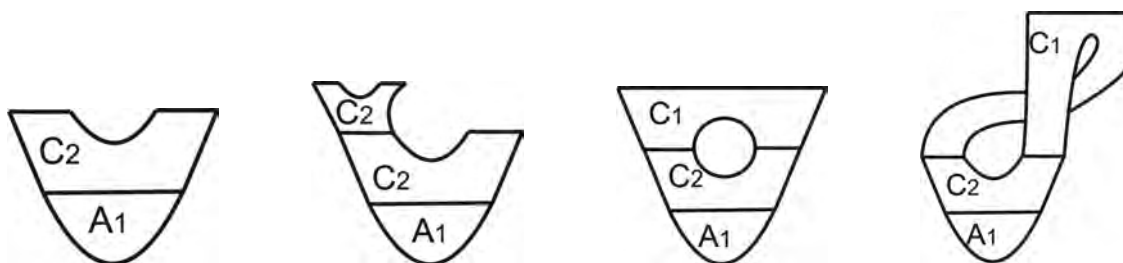


Рис. 8

Припустимо, що (ii) не виконується. Тоді серед критичних значень c_4, \dots, c_{4i+3} є принаймні $2i+1$, які відповідають точкам максимуму, і відповідно не більше $2i-1$, які відповідають точкам мінімуму. Звідси серед $c_1, c_2, \dots, c_{4i+3}$ не більше $2i-1+3 = 2i+2$ відповідають точкам мінімуму. Згідно із зауваженням на початку доведення, для будь-якого регулярного значення функції серед критичних точок з меншим значенням є не менше локальних мінімумів, ніж локальних максимумів. Це означає, що серед критичних значень c_1, \dots, c_{4i+3} рівно $2i+1$ відповідають точкам максимуму і $2i+2$ — точкам мінімуму.

Таким чином, $f^{-1}((c_{4i+3} + \varepsilon))$ має одну компоненту зв'язності. Як і раніше, приклеїмо до неї двовимірний півдиск D_+^2 , і з леми 2 отримаємо, що ейлерова характеристика отриманої поверхні M' $\chi(M') = \frac{1 - (2i+1) - (2i+1) + 1}{2} = -2i$. Звідси випливає, що межа поверхні M' має парне число компонент, а отже, містить принаймні дві компоненти межі. Отримуємо суперечність.

Теорему доведено.

Нехай f — mm -функція з n критичними точками. Як у роботі Арнольда [11], поставимо їй у відповідність підстановку таким чином: занумеруємо критичні точки від 1 до n в порядку зростання значень функції f в них. Нехай число i відповідає критичному значенню функції c_i , $i = \overline{1, n}$. Рухаючись по межі поверхні, починаючи від точки мінімуму, запишемо номери критичних точок. Отримаємо підстановку на n числах. Число a_i підстановки $(1a_1a_2 \dots a_{n-1})$ називатимемо числом максимуму, якщо $a_{i-1} < a_i$ і $a_{i+1} < a_i$, та числом мінімуму, якщо $a_{i-1} > a_i$ і $a_{i+1} > a_i$, $i = \overline{1, n-2}$, де $a_0 = 1$. Зауважимо, що у так побудованій підстановці $(1a_1a_2 \dots a_{n-1})$ числа мінімуму і числа максимуму чергуються, а підстановки $(1a_1a_2 \dots a_{n-1})$

i ($1a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1$) задають одну і ту ж поверхню з точністю до напрямку проходження. Крім того, числу мінімуму відповідає точка локального мінімуму функції на колі, а числу максимуму — точка локального максимуму.

Приклад. Розглянемо випадок орієнтованої поверхні роду 1 з однією компонентою межі (тор з діркою). Тоді за теоремою 3 оптимальна mm -функція має 6 критичних точок. Число функцій Морса на колі з 6 критичними точками дорівнює числу відповідних підстановок, а саме 16. Серед цих підстановок 4 не задовольняють умови теореми 4. Це підстановки (164523), (154623), (132645), (132546). Отже, відповідні функції Морса не можна продовжити на всю поверхню до mm -функцій з однозв'язними компонентами рівня. Решту підстановок можна отримати при проходженні межі поверхонь, склеєних з атомів A і C . Якщо зафіксувати напрямок проходження, то кожній підстановці відповідатиме одна поверхня, в протилежному разі — дві. Зауважимо, що якщо не вимагати однозв'язності компонент рівня, тобто крім атомів A і C можливі атоми B , то всі підстановки на торі з діркою можуть бути реалізовані mm -функціями. Зокрема, зазначеним вище чотирьом підстановкам відповідає така послідовність атомів: $A_1C_1B_1B_2C_2A_2$.

4. Висновки. Доведено аналог теореми Морса для функцій, критичні точки яких лежать на межі многовиду. Знайдено число критичних точок оптимальної функції Морса на поверхні, обмеження якої на межу теж є функцією Морса і всі критичні точки лежать на межі поверхні.

Відкритим залишається питання про те, чи кожен функцію Морса, задану на межі поверхні роду g з k компонентами межі, можна продовжити до функції Морса з тими самими критичними точками.

Автори сподіваються, що доведені у цій статті теореми можна буде узагальнити для функцій з ізольованими критичними точками.

Література

1. Милнор Дж., Уолес А. Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1972. — 279 с.
2. Jankowski A., Rubinsztein R. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary // Comment. Math. Prace Mat. — 1972. — **16**. — P. 99–112.
3. Reeb G. Sur les points singuliers de une forme de Pfaff completement integrable ou de une fonction numerique // Comp. Rend. Hebdomadaires Seaces Acad. Sci. — 1954. — **222**. — P. 847–849.
4. Кропфрод А. С. О функциях двух переменных // Успехи мат. наук. — 1950. — **5**, № 1(35). — С. 24–112.
5. Шарко В. В. Функции на поверхностях // Некоторые вопросы совр. математики: Труды Ин-та математики НАН Украины. — 1998. — **25**. — С. 408–434.
6. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация: В 2 т. — Ижевск: Изд. дом „Удмурд. ун-т”, 1999. — Т. 1. — 444 с.
7. Максименко С. І. Еквівалентність m -функцій на поверхнях // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 8. — С. 1129–1135.
8. Пришляк О. О. Функції загального положення на поверхнях з межею // Вісн. Київ. ун-ту ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. — 2008. — № 20. — С. 77–79.
9. Matsumoto Y. An introduction to Morse theory. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1985. — Vol. 208. — 237 p.
10. Borodzik M., Nemethi A., Ranicki A. Morse theory for manyfolds with boundary. — 2014. — 38 p. — (arXiv:1207.3066v4[math. GT]).
11. Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Ейлера и Спингера групп Кокстера // Успехи мат. наук. — 1992. — **47**, № 1(283). — С. 3–45.

Одержано 18.03.15,
після доопрацювання — 11.10.15