DOI: 10.37863/umzh.v72i5.2292

УДК 517.5

Є. О. Севостьянов (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка; Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ)

ПРО НЕРІВНІСТЬ ТИПУ ПОЛЕЦЬКОГО ДЛЯ ВІДОБРАЖЕНЬ РІМАНОВИХ ПОВЕРХОНЬ

We obtain upper estimates for the distortion of the modulus of families of paths under the Sobolev class mappings, whose dilatation is locally integrable. As a consequence, we prove theorems on local and boundary behavior for these mappings.

Отримано верхні оцінки спотворення модуля сімей кривих при відображеннях класу Соболєва, внутрішня дилатація яких є локально інтегровною. Як наслідок доведено теореми про локальну і межову поведінку відображень.

1. Вступ. Дану статтю присвячено вивченню відображень з обмеженим і скінченним спотворенням, які активно досліджуються останнім часом (див., наприклад, [1 – 3]). Зокрема, йдеться про випадок ріманових поверхонь гіперболічного типу [4, 5]. Зауважимо, що принципове значення для дослідження відображень мають оцінки спотворення модуля при них (див., наприклад, [1], розд. 2.3, [2], розд. 4.1, [3], означення 13.1 і [6], теорема 3.1). Саме ці оцінки допомагають дослідити деякі їхні фундаментальні властивості (див. [3], теореми 17.13, 17.15, [6], теорема 4.2 і [7], теореми 3.6, 3.7). Основна мета даної роботи — отримати верхню оцінку спотворення модуля сімей кривих при відображеннях і завдяки цьому дослідити їхню межову поведінку (див. останній пункт). Зауважимо, що класичну нерівність Полецького отримано в роботі [8] (теорема 1) і стосується вона відображень евклідового простору з обмеженою характеристикою (див. також [2], теореми 8.1 і 8.5). У даній роботі йдеться про відображення ріманових поверхонь, а характеристика квазіконформності може бути необмеженою.

Нагадаємо означення. *Рімановою поверхнею* будемо називати двовимірний многовид зі зчисленною базою, в якому відображення переходу між відповідними картами є конформними [4]. Ріманові поверхні $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}_*$, що розглядаються нижче, будуть вважатися поверхнями *гіперболічного типу*, тобто конформно еквівалентними фактор-просторам $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$ відповідно, де $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ і G, G_* — деякі розривні групи дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга без нерухомих точок. Завдяки теоремі Клейна – Пуанкаре про факторизацію (див. [9], теорема 6.I) ми можемо ототожнити ріманові поверхні $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}_*$ з відповідними фактор-просторами $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$ вказаного вигляду. Отже, ми вважаємо, що $\mathbb{S} = D/G$ і $\mathbb{S}_* = D/G_*$, де G і G_* — деякі групи дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга, що не мають нерухомих точок і діють розривно в $\mathbb{D}$. Нагадаємо, що G діє *розривно* в $\mathbb{D}$, якщо кожна точка $x \in \mathbb{D}$ має окіл U такий, що $g(U) \cap U = \varnothing$ для всіх $g \in G,\ g \neq I$, за винятком скінченної кількості елементів g, де I — тотожне відображення. Ми також говоримо, що G не має *нерухомих точок* у $\mathbb{D}$, якщо для кожного $a \in \mathbb{D}$ рівність $g(a) = a$ може мати місце лише у випадку, коли $g = I$.

Нагадаємо, що кожен елемент p_0 фактор-простору $\mathbb{D}/G$ є *орбітою* точки $z_0 \in \mathbb{D}$, тобто $p = \{z \in \mathbb{D} : z = g(z_0),\ g \in G\}$. Скрізь далі в одиничному крузі $\mathbb{D}$ використовуються так звана *гіперболічна метрика*

$$h(z_1, z_2) = \log \frac{1+t}{1-t}, \quad t = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}|}, \tag{1}$$

а також *гіперболічна площа* множини $S \subset \mathbb{D}$ і довжина кривої $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{D}$, які задаються, відповідно, співвідношеннями

$$v(S) = \int\limits_S \frac{4\,dm(z)}{(1-|z|^2)^2}, \quad z = x+iy, \qquad s_h(\gamma) := \sup_{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} h(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})), \tag{2}$$

де h взято з (1), а супремум береться по всіх розбиттях $\pi = \{a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n = b\}$ (див. [4], співвідношення (2.4), (2.5)). Безпосередніми обчисленнями легко переконатися, що гіперболічна метрика, довжина і площа інваріантні відносно дробово-лінійних відображень одиничного круга на себе.

Для точки $y_0 \in \mathbb{D}$ і числа $r \ge 0$ визначимо *гіперболічний круг* $B_h(y_0, r)$ і *гіперболічне коло* $S_h(y_0, r)$ за допомогою співвідношень

$$B_h(y_0, r) := \big\{y \in \mathbb{D}\colon h(y_0, y) < r\big\}, \qquad S_h(y_0, r) := \big\{y \in \mathbb{D}\colon h(y_0, y) = r\big\}.$$

Рімановi поверхні можна метризувати таким чином. Якщо $p_1, p_2 \in \mathbb{D}/G$, покладемо

$$\widetilde{h}(p_1, p_2) := \inf_{g_1, g_2 \in G} h(g_1(z_1), g_2(z_2)), \tag{3}$$

де $p_i = G_{z_i} = \big\{\xi \in \mathbb{D}\colon \exists g \in G : \xi = g(z_i)\big\}$, $i = 1, 2$. В останньому випадку множину G_{z_i} будемо називати *орбітою* точки z_i, а p_1 і p_2 назвемо *орбітами* точок z_1 і z_2 відповідно. Далі

$$\widetilde{B}(p_0, r) := \big\{p \in \mathbb{S}\colon \widetilde{h}(p_0, p) < r\big\}, \qquad \widetilde{S}(p_0, r) := \big\{p \in \mathbb{S}\colon \widetilde{h}(p_0, p) = r\big\}$$

— круг і коло з центром у точці p_0 на поверхні $\mathbb{S}$. Скрізь далі $B(z_0, r)$ і $S(z_0, r)$ позначають круг і коло з центром у точці $z_0 \in \mathbb{C}$ на площині.

З метою спрощення досліджень введемо до розгляду так звану *фундаментальну множину* F. Визначимо її як підмножину $\mathbb{D}$, що містить одну, і лише одну, точку орбіти $z \in G_{z_0}$ (див. [10], розд. 9, § 9.1). *Фундаментальною областю* D_0 називається область в $\mathbb{D}$ з властивістю $D_0 \subset F \subset \overline{D_0}$ така, що $v(\partial D_0) = 0$ (див. там же). Найважливішим прикладом фундаментальної області є *багатокутник Дірихле*,

$$D_\zeta = \bigcap_{g \in G, g \ne I} H_g(\zeta),$$

де $H_g(\zeta) = \big\{z \in \mathbb{D}\colon h(z, \zeta) < h(z, g(\zeta))\big\}$ (див. [4], співвідношення (2.6)).

Нехай π — природна проекція $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}/G$, тоді π — аналітична функція, конформна на D_0 (див. також пропозицію 9.2.2 [10] і коментар після (2.11) в [4]). Зауважимо, крім того, що між точками F і $\mathbb{D}/G$, а отже і між точками F і $\mathbb{S}$, існує взаємно однозначна відповідність. Зокрема, для вимірної множини $E \subset \mathbb{D}/G$ покладемо

$$\widetilde{v}(E) := v\big(\pi^{-1}(E)\big), \tag{4}$$

де v — гіперболічна міра в одиничному крузі з елементом площі $dv(z) = \dfrac{4\,dm(z)}{(1-|z|^2)^2}$, m — плоска міра Лебега. Тут і далі множину $E \subset \mathbb{D}/G$ будемо називати вимірною, якщо $\pi^{-1}(E)$

є вимірною в $\mathbb{D}$ відносно міри Лебега. Аналогічно можна визначити борелеву множину $E \subset \subset \mathbb{D}/G$.

Нехай D, D_* — області на ріманових поверхнях $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}_*$ відповідно. Позначимо через $\widetilde{h}$ метрику на рімановій поверхні $\mathbb{S}$, а через $\widetilde{h_*}$ — на рімановій поверхні $\mathbb{S}_*$. Елементи довжини і об'єму позначаються на поверхнях $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}_*$ відповідно через $ds_{\widetilde{h}}$, $d\widetilde{v}$ і $ds_{\widetilde{h_*}}$, $d\widetilde{v_*}$. Відображення $f: D \to D_*$ будемо називати *дискретним*, якщо прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in D_*$ складається лише з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в D_*. Означення відображень класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ на рімановій поверхні можна знайти, наприклад, у роботі [4]. Далі для відображень $f: D \to D_*$ класу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в локальних координатах $f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ і $f_z = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$. Крім того, *норма* і *якобіан* відображення f в локальних координатах виражаються відповідно як $\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$ і $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$. Будемо говорити, що $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, якщо $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ і, крім того, в локальних координатах $\|f'(z)\| \in L^2_{\mathrm{loc}}(D)$. Скрізь далі ми вважаємо, що диференційовне майже скрізь відображення f має невід'ємний якобіан майже скрізь у локальних координатах. *Дилатація порядку* p відображення f у точці z визначається співвідношенням

$$K_f(z) = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}$$

при $J_f(z) \neq 0$, $K_f(z) = 1$ при $\|f'(z)\| = 0$ і $K_f(z) = \infty$ — в решті випадків. Шляхом обчислень неважко переконатись, що величина $K_f(z)$ не залежить від локальних координат. Як правило, крива γ на рімановій поверхні $\mathbb{S}$ визначається як неперервне відображення $\gamma\colon I \to \mathbb{S}$, де I — скінченний відрізок $[a,b]$, інтервал (a,b), або один із півінтервалів $[a,b)$, $(a,b]$ числової прямої. Згідно з [11] (розд. 7.1) (див. також [3], теорема 2.4), довільна спрямлювана крива $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ (відповідно $\gamma\colon I \to \mathbb{S}$) допускає параметризацію $\gamma(t) = (\gamma^0 \circ l_\gamma)(t)$, де l_γ позначає довжину кривої γ на відрізку $[a,t]$. В залежності від контексту цю довжину можна розуміти як у евклідовому, так і у гіперболічному сенсі, а також у сенсі ріманової поверхні. В цьому випадку крива $\gamma^0 : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{C}$ $\big($відповідно $\gamma^0 : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{S}\big)$ єдина і називається *нормальним зображенням* кривої γ. Для локально спрямлюваної кривої $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{D}$ позначимо

$$\int\limits_{\alpha} \rho(x)\, ds_h(x) = \int\limits_0^{l(\gamma)} \rho(\alpha^0(s))\, ds.$$

Аналогічно, для локально спрямлюваної кривої $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{D}/G$ позначимо

$$\int\limits_{\alpha} \rho(p)\, ds_{\widetilde{h}}(p) = \int\limits_0^{l(\gamma)} \rho(\alpha^0(s))\, ds.$$

Нехай Γ — сім'я кривих в $\mathbb{S}$. Борелеву функцію $\rho\colon \mathbb{S} \to [0,\infty]$ будемо називати *допустимою* для сім'ї Γ кривих γ, якщо $\int_{\gamma} \rho(p)\, ds_{\widetilde{h}}(p) \geq 1$ для будь-якої (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$. Це коротко записується так: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модуль* сім'ї Γ визначається як

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{S}} \rho^2(p)\, d\widetilde{v}(p).$$

Нехай $\Delta \subset \mathbb{R}$ — відкритий інтервал числової прямої, а $\gamma\colon \Delta \to \mathbb{S}$ — локально спрямлювана крива. У такому випадку очевидно, що існує єдина неспадна функція довжини $l_\gamma\colon \Delta \to \Delta_\gamma \subset \mathbb{R}$ з умовою $l_\gamma(t_0) = 0,\ t_0 \in \Delta$, така, що значення $l_\gamma(t)$ дорівнює довжині підкривої $\gamma\,|_{[t_0,t]}$ кривої γ, якщо $t > t_0$, і довжині підкривої $\gamma\,|_{[t,\,t_0]}$ зі знаком мінус, якщо $t < t_0,\ t \in \Delta$. Нехай $g\colon |\gamma| \to \mathbb{S}_*$ — неперервне відображення, де $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subset \mathbb{S}$. Припустимо, що крива $\widetilde{\gamma} = g\circ\gamma$ також локально спрямлювана. Тоді очевидно, що існує єдина неспадна функція $L_{\gamma,\,g}\colon \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$ така, що $L_{\gamma,\,g}(l_\gamma(t)) = l_{\widetilde{\gamma}}(t)$ при всіх $t \in \Delta$. Якщо крива γ задана на відрізку $[a, b]$ або півінтервалі $[a, b)$, то будемо вважати, що $a = t_0$. Крива γ називається (*повним*) *підняттям кривої* $\widetilde{\gamma}$ *при відображенні* $f\colon D \to \mathbb{S}_*$, якщо $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Наступне означення можна знайти в [2] (розд. 8.4) або [3] (означення 5.2). Кажуть, що відображення $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ належить класу ACP в області D (*абсолютно неперервне на майже всіх кривих* в області D, пишемо $f \in ACP$), якщо для майже всіх кривих γ в області D крива $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямлювана, при цьому функція довжини $L_{\gamma,\,f}$, введена вище, абсолютно неперервна на всіх відрізках, що лежать в Δ_γ. Тут і далі деяка властивість P виконується для майже всіх кривих, якщо модуль сім'ї кривих, для якого ця властивість порушується, дорівнює нулю.

Припустимо, що $f\colon D \to \mathbb{S}_*$ таке, що ніяка крива $\alpha \subset D$ при відображенні f не переходить в точку. Тоді (коректно) може бути визначена функція $L^{-1}_{\gamma,\,f}$. У цьому випадку будемо говорити, що f має *властивість* ACP^{-1} в області $D \subset \mathbb{S}$ (пишемо $f \in ACP^{-1}$), якщо для майже всіх кривих $\widetilde{\gamma} \in f(D)$ кожне підняття γ кривої $\widetilde{\gamma}$ при відображенні f, $f \circ \gamma = \widetilde{\gamma}$, є локально спрямлюваною кривою і, крім того, обернена функція $L^{-1}_{\gamma,\,f}$ абсолютно неперервна на всіх відрізках, що лежать у $\Delta_{\widetilde{\gamma}}$, для майже всіх кривих $\widetilde{\gamma}$ в $f(D)$ і кожного підняття γ кривої $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Зауважимо, що якщо f — гомеоморфізм такий, що $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}\big(f(D)\big)$, то він завжди належить класу ACP^{-1} (див. [3], теорема 28.2). Будемо говорити, що відображення f має *N-властивість Лузіна*, якщо $\widetilde{v_*}\big(f(E)\big) = 0$ для будь-якого $E \subset D$ такого, що $\widetilde{v}(E) = 0$. Аналогічно, будемо говорити, що відображення f має *N^{-1}-властивість Лузіна*, якщо $\widetilde{v}\big(f^{-1}(E_*)\big) = 0$ для будь-якого $E_* \subset D_*$ такого, що $\widetilde{v_*}(E_*) = 0$. Справджується таке твердження (див. також [4], лема 3.1).

Теорема 1. *Нехай D і D_* — області ріманових поверхонь $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}_*$ відповідно, при цьому $\overline{D}$ і $\overline{D_*}$ є компактами. Нехай також f — диференційовне майже скрізь відображення області D на D_*, що належить класу ACP^{-1} і має N- і N^{-1}-властивості Лузіна. Тоді для кожної сім'ї (локально спрямлюваних) кривих Γ в області D і кожної допустимої функції $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ виконується нерівність*

$$M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_D K_f(p)\rho^2(p)\,d\widetilde{v}(p). \tag{5}$$

З огляду на теорему 28.2 [3] і наслідок В [12] отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай D і D_* — області ріманових поверхонь $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}_*$ відповідно, при цьому $\overline{D}$ і $\overline{D_*}$ є компактами. Нехай також f — області D на D_* такі, що $f \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ і $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}\big(f(D)\big)$. Тоді виконується співвідношення* (5).

2. Попередні зауваження. Перед тим як перейти до допоміжних тверджень і доведення основних результатів, зробимо деякі важливі зауваження. Припустимо, що F і D_0 — деякі фундаментальні множина і область відповідно (див. зауваження, наведені у вступі). Для $z_1, z_2 \in$ $\in F$ покладемо

$$d(z_1, z_2) := \widetilde{h}\big(\pi(z_1), \pi(z_2)\big),$$

де $\widetilde{h}$ визначено в (3). Зауважимо, що за означенням $d(z_1, z_2) \le h(z_1, z_2)$. Покажемо, що для будь-якого компакту $A \subset \mathbb{D}$ знайдеться $\delta = \delta(A) > 0$ таке, що

$$d(z_1, z_2) = h(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in A, \quad h(z_1, z_2) < \delta. \tag{6}$$

Припустимо протилежне. Тоді для довільного $k \in \mathbb{N}$ знайдуться комплексні числа $x_k, z_k \in A$ такі, що $h(z_k, x_k) < 1/k$, і при цьому $d(z_k, x_k) < h(z_k, x_k)$. Тоді за означенням метрики d й інваріантності метрики h при дробово-лінійних відображеннях одиничного круга на себе знайдеться таке $g_k \in G$, що

$$d(z_k, x_k) \le h(z_k, g_k(x_k)) < h(z_k, x_k) < 1/k, \qquad g_k \in G, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Оскільки A — компакт в $\mathbb{D}$, можемо вважати, що $x_k, z_k \to x_0 \in \mathbb{D}$ при $k \to \infty$. Тоді з (7) за нерівністю трикутника маємо $h\big(g_k(x_k), x_0\big) \le h\big(g_k(x_k), z_k\big) + h(z_k, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$, і, отже, $h(x_k, g_k^{-1}(x_0)) \to 0$ при $k \to \infty$, оскільки метрика h інваріантна при дробово-лінійному відображенні. Однак тоді також за нерівністю трикутника $h(g_k^{-1}(x_0), x_0) \le h(g_k^{-1}(x_0), x_k) +$ $+ h(x_k, x_0) \to 0,\ k \to \infty$. Останнє суперечить розривності групи G в $\mathbb{D}$, бо порушено умову $g(U) \cap U = \varnothing$ для як завгодно малого околу U точки x_0 і нескінченної кількості елементів $g \in G$. Це і доводить (6).

Справджується така лема.

Лема 1. *Нехай* $0 < 2r_0 < 1$, *тоді знайдеться стала* $C_1 = C_1(r_0) > 0$ *така, що*

$$C_1 h(z_1, z_2) \le |z_1 - z_2| \le h(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in B(0, r_0). \tag{8}$$

Більше того, права нерівність у (8) *виконується при всіх* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Доведення. Зауважимо, що за нерівністю трикутника $0 < |z_1 - z_2| < 2r_0$. Тому $r := |z_1 - z_2|$ змінюється в межах від 0 до $2r_0 < 1$. Нагадаємо, що

$$h(z_1, z_2) = \log \frac{1 + \dfrac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}|}}{1 - \dfrac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}|}}.$$

Позначивши $r = |z_1 - z_2|$, зауважимо, що $h(z_1, z_2) \ge \log \dfrac{1 + r/2}{1 - r/2}$. Зазначимо, що

$$h(z_1, z_2) \ge \log \frac{1 + r/2}{1 - r/2} \ge r, \quad r \in (0, 1). \tag{9}$$

Справді, функція $\varphi(r) = \log \dfrac{1 + r/2}{1 - r/2} - r$ зростає по $r \in [0, 1]$, що можна перевірити взяттям похідної. Отже, її мінімум досягається при $r = 0$, тобто $\varphi(r) \ge 0$ при всіх $r \in (0, 1)$ і виконується нерівність (9).

Встановимо ліву нерівність у (8). Для цього зауважимо, що

$$h(z_1, z_2) \le \log\frac{1-r_0^2+r}{1-r_0^2-r}, \qquad \log\frac{1-r_0^2+r}{1-r_0^2-r} \sim \frac{2}{1-r_0^2} r \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

Тоді при деяких $0 < r_1 < r_0$ і $M = M(r_0)$

$$h(z_1, z_2) \le \log\frac{1-r_0^2+r}{1-r_0^2-r} \le Mr, \quad r \in (0, r_1).$$

При $r \in [0, 2r_0]$ функція $1 - r_0^2 - r$ строго додатна по r. Тому функція $\dfrac{1}{r}\log\dfrac{1-r_0^2+r}{1-r_0^2-r}$ неперервна на $r \in [r_1, 2r_0]$ і, отже, обмежена при тих же r з деякою сталою $\widetilde{C}$. Поклавши $C_1^{-1} := \max\left\{M, \widetilde{C}\right\}$, отримаємо

$$h(z_1, z_2) \le \log\frac{1-r_0^2+r}{1-r_0^2-r} \le C_1^{-1} r = C_1^{-1}|z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in B(0, r_0).$$

Лему 1 доведено.

Доведемо важливе твердження, що узагальнює теорему 1.3(5) [3].

Лема 2. *Припустимо, що крива* $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{D}$ *спрямлювана в сенсі гіперболічної довжини* s_h *в* (2), *крім того,* $s_h = s_h(t)$ *позначає гіперболічну довжину кривої* α, *обчислену на відрізку* $[a,t]$, $a \le t \le b$. *Тоді* $\alpha'(t)$ *і* $s'_h(t)$ *існують при майже всіх* $t \in [a,b]$, *при цьому*

$$\frac{2|\alpha'(t)|}{1 - |\alpha(t)|^2} = s'_h(t) \tag{10}$$

при майже всіх $t \in [a,b]$.

Доведення. Функція $s_h = s_h(t)$ монотонна і тому майже скрізь диференційовна. Крім того, оскільки $\alpha(t)$ спрямлювана, то знайдеться таке $0 < r_0 < 1$, що $\alpha(t) \in B(0, r_0)$ при всіх $t \in [a,b]$. Тоді з леми 1 випливає, що крива α також спрямлювана в евклідовому сенсі, тому має обмежену варіацію і, отже, також диференційовна майже скрізь.

Щоб встановити рівність (10), будемо дотримуватися логіки міркувань, що були використані при доведенні теореми 1.3(5) [3]. Насамперед, виходячи з означення гіперболічної довжини кривої в (2), можемо записати

$$\frac{h\big(\alpha(t), \alpha(t_0)\big)}{|t - t_0|} \le \frac{\big|s_h(t) - s_h(t_0)\big|}{|t - t_0|}. \tag{11}$$

Домножаючи чисельник і знаменник співвідношення (11) на $\big|\alpha(t) - \alpha(t_0)\big|$, отримуємо

$$\frac{\big|\alpha(t) - \alpha(t_0)\big|}{\big|\alpha(t) - \alpha(t_0)\big|}\frac{h\big(\alpha(t), \alpha(t_0)\big)}{|t - t_0|} \le \frac{\big|s_h(t) - s_h(t_0)\big|}{|t - t_0|}. \tag{12}$$

З'ясуємо поведінку функції $\varphi(t) = \dfrac{h(\alpha(t), \alpha(t_0))}{\big|\alpha(t) - \alpha(t_0)\big|}$ при $t \to t_0$. Оскільки $\log\dfrac{1+x}{1-x} \sim 2x$ при $x \to 0$, то

$$\varphi(t) = \log \left(\frac{1 + \dfrac{\left|\alpha(t) - \alpha(t_0)\right|}{\left|1 - \alpha(t)\overline{\alpha(t_0)}\right|}}{1 - \dfrac{\left|\alpha(t) - \alpha(t_0)\right|}{\left|1 - \alpha(t)\overline{\alpha(t_0)}\right|}} \right) \frac{1}{\left|\alpha(t) - \alpha(t_0)\right|} \sim \frac{2\left|\alpha(t) - \alpha(t_0)\right|}{\left|1 - \alpha(t)\overline{\alpha(t_0)}\right|} \frac{1}{\left|\alpha(t) - \alpha(t_0)\right|}$$

при $t \to t_0$. Тоді $\varphi(t) \to \dfrac{2}{1 - \left|\alpha(t_0)\right|^2}$ при $t \to t_0$. У такому випадку, переходячи в (12) до границі при $t \to t_0$, одержуємо

$$\frac{2\left|\alpha'(t_0)\right|}{1 - \left|\alpha(t_0)\right|^2} \leq s'_h(t_0) \tag{13}$$

при майже всіх $t_0 \in [a, b]$.

Для завершення доведення залишилось встановити протилежну до (13) нерівність. Позначимо через A множину всіх точок відрізка $[a, b]$, для яких $\alpha'(t)$ і $s'_h(t)$ існують і при цьому

$$\frac{2\left|\alpha'(t_0)\right|}{1 - \left|\alpha(t_0)\right|^2} < s'_h(t_0).$$

Нехай A_k — множина всіх точок $t \in A$ таких, що для будь-яких $a \leq p \leq t \leq q \leq b$, $0 < q - p < 1/k$, виконується нерівність

$$\frac{s_h(q) - s_h(p)}{q - p} \geq \frac{h\big(\alpha(q), \alpha(p)\big)}{q - p} + 1/k.$$

З урахуванням означень множин A і A_k можна показати, що $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ $\big($див. доведення теореми 1.3(5) [3]$\big)$. Для завершення доведення досить встановити, що $m_1(A_k) = 0$ при будь-якому $k = 1, 2, \ldots$, де m_1 — міра Лебега в $\mathbb{R}^1$.

Нехай $l(\alpha)$ позначає довжину кривої α. Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо розбиття відрізка $[a, b]$ точками $a \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m = b$ так, що $l(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{m} h\big(\alpha(t_k), \alpha(t_{k-1})\big) + \varepsilon/k$ і $t_j - t_{j-1} < 1/k$ при всіх $j = 1, 2, \ldots, m$. Якщо $[t_{j-1}, t_j] \cap A_k \neq \varnothing$, то за означенням множини A_k $s_h(t_j) - s_h(t_{j-1}) \geq h\big(\alpha(t_j), \alpha(t_{j-1})\big) + (t_j - t_{j-1})/k$. Отже, позначивши $\Delta_j := [t_{j-1}, t_j]$, будемо мати

$$m_1(A_k) \leq \sum_{\Delta_j \cap A_k \neq \varnothing} m_1(\Delta_j) \leq k \sum_{j=1}^{m} \big(s_h(t_j) - s_h(t_{j-1}) - h(\alpha(t_j), \alpha(t_{j-1}))\big) \leq$$

$$\leq k \left(l(\alpha) - \sum_{j=1}^{m} h(\alpha(t_j), \alpha(t_{j-1})) \right) \leq \varepsilon.$$

Останнє співвідношення доводить рівність $m_1(A_k) = 0$, а отже, оскільки $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $m_1(A) = 0$, що і потрібно було довести.

Лему 2 доведено.

Міркуючи, як і при доведенні пункту (4) теореми 1.3 в [3], можна показати, що крива $\gamma\colon I\to\mathbb{D}$ є абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли її функція довжини $s_h(t)$ абсолютно неперервна. Тоді якщо γ — абсолютно неперервна, то, виконуючи заміну змінної, отримуємо

$$\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,ds_h(x)=\int\limits_0^{l(\gamma)}\rho(\gamma^0(s))\,ds=\int\limits_a^b\rho(\gamma(t))s_h'(t)\,dt.$$

Таким чином, з леми 2 випливає таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай $\alpha\colon[a,b]\to\mathbb{D}$ — абсолютно неперервна крива і $\rho\colon\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ — невід'ємна борелева функція. Тоді*

$$\int\limits_{\alpha}\rho(x)\,ds_h(x)=\int\limits_a^b\frac{2\rho(\alpha(t))|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}\,dt,\tag{14}$$

зокрема

$$l(\alpha)=\int\limits_a^b\frac{2|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}\,dt.\tag{15}$$

Нехай $p_0\in\mathbb{S}$ і $z_0\in\mathbb{D}$ таке, що $\pi(z_0)=p_0$, де π — природна проекція $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}/G$. Позначимо через D_0 багатокутник Діріхле з центром у точці z_0 і покладемо $\varphi:=\pi^{-1}$. Зауважимо, що відображення φ є гомеоморфізмом $\big(\mathbb{S},\widetilde{h}\big)$ на (F,d), де $\widetilde{h}$ — метрика на поверхні $\mathbb{S}$, а d — означена вище метрика на фундаментальній множині F, $D_0\subset F\subset\overline{D_0}$. Не обмежуючи загальності, можна також вважати, що $z_0=0$. Справді, в іншому випадку розглянемо допоміжне відображення $g_0(z)=(z-z_0)/(1-z\overline{z_0})$, що не має нерухомих точок всередині одиничного круга. Оберемо компактний окіл $V\subset\mathbb{D}$ точки $0\in F\subset\mathbb{D}$ такий, що $d(x,z)=h(x,z)$ при всіх $x,z\in V$, що можливо з огляду на умову (6). Крім того, виберемо V так, щоб $V\subset B(0,r_0)$ при деякому $0<r_0<1$. Покладемо $U:=\pi(V)$. Окіл U у цьому випадку назвемо *нормальним околом точки* p_0.

Враховуючи леми 8.2 і 8.3 [2], переходячи до покриття ріманової поверхні скінченною або зчисленною кількістю нормальних околів і використовуючи зчисленну напівадитивність міри $\widetilde{h}$, отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай відображення $f\colon D\to\mathbb{S}_*$ майже скрізь диференційовне в локальних координатах і, крім того, має N- і N^{-1}-властивості Лузіна. Тоді знайдеться не більш ніж зчисленна послідовність компактних множин $C_k^*\subset D$ така, що $\widetilde{v}(B)=0$, де $B=D\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}C_k^*$ і $f|_{C_k^*}$ взаємно однозначне і біліпшицеве в локальних координатах для кожного $k=1,2,\ldots$. Більш того, відображення f диференційовне при всіх $x\in C_k^*$ і виконується умова $J_f(x)\neq0$.*

Для довільної множини $B\subset\mathbb{S}$ покладемо

$$l_\gamma(B)=\mathrm{mes}_1\big\{s\in[0,l(\gamma)]:\gamma(s)\in B\big\},$$

де, як правило, mes_1 позначає лінійну міру Лебега в $\mathbb{R}$, а $l(\gamma)$ — довжина γ. Аналогічно можна визначити величину $l_\gamma(B)$ для штрихової лінії γ, тобто коли $\gamma\colon\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\to\mathbb{S}$, де $a_i<b_i$ при всіх $i\in\mathbb{N}$ і $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing$ при всіх $i\neq j$.

Доведемо тепер таке твердження (див. також [3], теорема 33.1).

Лема 3. *Припустимо, що множина* $B_0 \subset \mathbb{S}$ *має нульову* $\widetilde{v}$*-міру. Тоді для майже всіх кривих* γ *в* $\mathbb{S}$

$$l_\gamma(B_0) = 0.$$

Доведення. Внаслідок регулярності лебегової міри знайдеться борелева множина $B \subset \mathbb{S}$ така, що $B_0 \subset B$ і $\widetilde{v}(B_0) = \widetilde{B} = 0$, де $\widetilde{v}$ — міра на поверхні $\mathbb{S}$, визначена співвідношенням (4). Розглянемо покриття поверхні $\mathbb{S}$ всіма можливими кулями вигляду $\widetilde{B}(x_0, r_0)$, де $r_0 = r(x_0) > 0$ таке, що $\widetilde{B}(x_0, r_0)$ лежить в деякому нормальному околі U точки x_0. Оскільки $\mathbb{S}$ — простір із зчисленною базою, то за теоремою Ліндельофа [13] можна виділити послідовність точок x_i, $i = 1, 2, \ldots$, і радіусів куль, що їм відповідають $r_i = r_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, що

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{B}(x_i, r_i), \qquad \overline{\widetilde{B}}(x_i, r_i) \subset U_i.$$

Позначимо через $\varphi_i = \pi_i^{-1}$ відображення, що відповідає означенню нормального околу U_i (див. коментарі, наведені перед твердженням 1). Нехай g_i — характеристична функція множини $\varphi_i(B \cap U_i)$. Позначимо для зручності $\varphi_i(\gamma) := \varphi_i\big(\gamma \cap \widetilde{B}(x_i, r_i)\big)$. Згідно з теоремою 3.2.5 при $m = 1$ [14], будемо мати

$$\int\limits_{\varphi_i(\gamma)} g_i(z)|dz| = \mathcal{H}^1\big(\varphi_i(B \cap |\gamma|)\big), \tag{16}$$

де $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{S}$ — довільна локально спрямлювана крива, $|\gamma|$ — носій кривої γ в $\mathbb{S}$, а $|dz|$ — елемент евклідової довжини. Міркуючи, як і при доведенні теореми 33.1 [3], покладаємо

$$\rho(p) = \begin{cases} \infty, & p \in B, \\ 0, & p \notin B. \end{cases}$$

Зауважимо, що ρ — борелева функція. Нехай Γ_i — підсім'я всіх кривих з Γ, для яких $\mathcal{H}^1\big(\varphi_i(B \cap {}$ $\cap\, |\gamma| \cap \widetilde{B}(x_i, r_i))\big) > 0$. З огляду на (16) для кожної $\gamma \in \Gamma_i$ маємо

$$\int\limits_{\gamma \cap \widetilde{B}(x_i, r_i)} \rho(p)\, ds_{\widetilde{h}}(p) = \int\limits_{\varphi_i(\gamma)} \rho(\pi_i(y))\, ds_h(y) =$$

$$= 2 \int\limits_{\varphi_i(\gamma)} \frac{\rho(\pi_i(y))}{1 - |y|^2}|dy| = 2 \int\limits_{\varphi_i(\gamma)} \frac{g_i(y)\rho(\pi_i(y))}{1 - |y|^2}|dy| = \infty,$$

де $\gamma \cap \widetilde{B} = \gamma|_{S_i}$ — штрихова лінія, $S_i = \big\{s \in [0, l(\gamma)] : \gamma(s) \in \widetilde{B}(x_i, r_i)\big\}$. Тоді $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma_i$. Таким чином,

$$M(\Gamma_i) \leq \int\limits_{\mathbb{S}} \rho^2(p)\, d\widetilde{v}(p) = 0. \tag{17}$$

Зауважимо, що $\Gamma > \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$, тому із співвідношення (17) випливає, що $M(\Gamma) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i) = 0$.

Лему 3 доведено.

Нехай $f\colon D\to\mathbb{C}$ (або $f\colon D\to\mathbb{S}$) — відображення, для якого образ будь-якої кривої в D не вироджується в точку. Нехай I_0 — відрізок і $\beta\colon I_0\to\mathbb{C}$ (або $\beta\colon I_0\to\mathbb{S}$) — спрямлювана крива. Нехай також $\alpha\colon I\to D$ — деяка крива, така, що $f\circ\alpha\subset\beta$. Якщо функція довжини $l_\beta\colon I_0\to[0,l(\beta)]$ стала на деякому інтервалі $J\subset I$, то β стала на J і, з огляду на припущення відносно f, крива α також стала на J. Звідси випливає, що існує єдина крива $\alpha^*\colon l_\beta(I)\to D$ така, що $\alpha=\alpha^*\circ(l_\beta|_I)$. Будемо говорити, що α^* є *f-зображенням кривої α відносно β.*

3. Доведення теореми 1. Нехай B_0 і C_k^*, $k=1,2,\ldots,$ — множини, що відповідають позначенням твердження 1. Поклавши $B_1=C_1^*,\ B_2=C_2^*\setminus B_1,\ldots,$

$$B_k=C_k^*\setminus\bigcup_{l=1}^{k-1}B_l,$$

отримаємо зчисленне покриття області D множинами B_k, $k=0,1,2,\ldots,$ що попарно не перетинаються, такими, що $\widetilde{v}(B_0)=0,\ B_0=D\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$. Оскільки за умовою відображення f має N-властивість в D, то $\widetilde{v_*}(f(B_0))=0$.

Оскільки $\overline{D}$ і $\overline{D_*}$ — компакти, то існують скінченні покриття U_i, $1\le i\le I_0$, і V_n, $1\le n\le N_0$, такі, що

$$\overline{D}\subset\bigcup_{i=1}^{I_0}U_i,\qquad \overline{D_*}\subset\bigcup_{n=1}^{N_0}V_n,$$

де U_i і V_n — нормальні околи деяких точок $x_i\in\mathbb{S}$ і $y_n\in\mathbb{S}_*$. Можна вибрати ці покриття таким чином, щоб $\widetilde{v}(\partial U_i)=\widetilde{v_*}(\partial V_n)=0$ при кожних U_i, $1\le i\le I_0$, і V_n, $1\le n\le N_0$. Зокрема, знайдуться конформні відображення $\varphi_i\colon U_i\to B(0,r_i)$, $0<r_i<1$, і $\psi_n\colon V_n\to B(0,R_n)$, $0<R_n<1$, такі, що довжина і площа в U_i і V_n обчислюються за допомогою карт φ_i і ψ_n згідно з формулами (2) і (15). Покладемо

$$R_0:=\max_{1\le n\le N_0}R_n,\qquad r_0:=\max_{1\le i\le I_0}r_i,$$

а також

$$U_1'=U_1,\ U_2'=U_2\setminus\overline{U_1},\ U_3'=U_3\setminus\big(\overline{U_1}\cup\overline{U_2}\big),\ \ldots,\ U_{I_0}'=U_{I_0}\setminus\big(\overline{U_1}\cup\overline{U_2}\ldots\overline{U_{I_0-1}}\big).$$

Зауважимо, що за означенням $U_i'\subset U_i$ при $1\le i\le I_0$ і $U_i'\cap U_j'=\varnothing$ при $i\ne j$. Крім того, $D\subset\left(\bigcup\limits_{i=1}^{I_0}U_i'\right)\bigcup B_0^*$, де U_i' відкриті, а $\widetilde{v}(B_0^*)=0$.

Аналогічно, покладемо

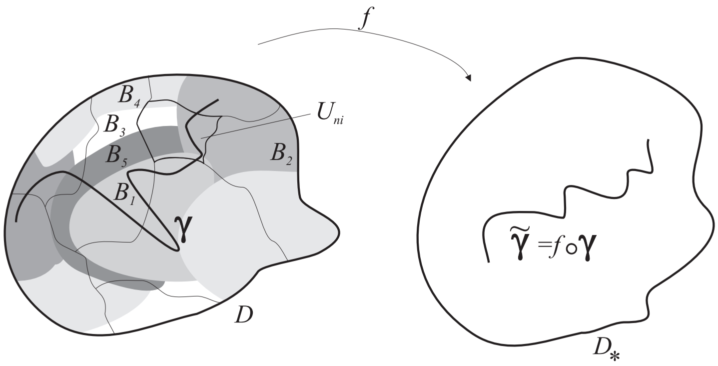
$$V_1'=V_1,\ V_2'=V_2\setminus\overline{V_1},\ V_3'=V_3\setminus\big(\overline{V_1}\cup\overline{V_2}\big),\ \ldots,\ V_{N_0}'=V_{N_0}\setminus\big(\overline{V_1}\cup\overline{V_2}\ldots\overline{V_{N_0-1}}\big).$$

За означенням $V_n'\subset V_n$ при $1\le n\le N_0$ і $V_n'\cap V_j'=\varnothing$ при $n\ne j$. Крім того, $D_*\subset\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N_0}V_n'\right)\bigcup B_0^{**}$, де V_n' відкриті, а $\widetilde{v_*}(B_0^{**})=0$.

Далі покладемо $U_{n,i}=f^{-1}(V_n')\cap U_i'$. Зауважимо, що за побудовою і неперервністю f множини $U_{n,i}$ є відкритими. Крім того, за N^{-1}-властивістю $\widetilde{v}\big(f^{-1}(B_0^{**})\big)=0$. Таким чином,

$$D \subset \left(\bigcup_{\substack{1 \le i \le I_0 \\ 1 \le n \le N_0}} U_{n,i} \right) \bigcup f^{-1}(B_0^{**}) \bigcup B_0^* \tag{18}$$

(див. рисунок). Зауважимо, що рівність $U_{n_1 i_1} = U_{n_2 i_2}$ можлива лише при $n_1 = n_2$ і $i_1 = i_2$.



Справді, нехай $p \in U_{n_1 i_1} \cap U_{n_2 i_2}$. Тоді, зокрема, $p \in U'_{i_1} \cap U'_{i_2}$, що можливо лише при $i_1 = i_2$, оскільки $U'_i \cap U'_j = \varnothing$ при $i \ne j$. Далі, з умови $p \in U_{n_1 i_1} \cap U_{n_2 i_2}$ випливає також, що $f(p) \in \in V'_{n_1} \cap V'_{n_2}$, що також неможливо при $n_1 \ne n_2$, бо $V'_i \cap V'_j = \varnothing$ при $i \ne j$. Отже, одночасно $i_1 = i_2$ і $n_1 = n_2$, що і потрібно було показати.

Покладемо

$$f_{n,i}(p) := \big(\psi_n \circ f \circ \varphi_i^{-1}\big)(\varphi_i(p)), \quad p \in U_{n,i}.$$

Нехай $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$ і

$$\widetilde{\rho}(p_*) = \chi_{f(D \setminus B_0)} \sup_{p \in f^{-1}(p_*) \cap D \setminus B_0} \rho^*(p),$$

де

$$\rho^*(p) = \begin{cases} \rho(p)/l\big(f'_{n,i}(\varphi_i(p))\big), & p \in U_{n,i} \setminus B_0, \\ 0 & \text{— в інших випадках.} \end{cases}$$

Зауважимо, що $\widetilde{\rho}(p_*) = \sup_{\substack{k \in \mathbb{N}, 1 \le i \le I_0 \\ 1 \le n \le N_0}} \rho_{k,i,n}(p_*)$, де

$$\rho_{k,i,n}(p_*) = \begin{cases} \rho^*\big(f_{k,i,n}^{-1}(p_*)\big), & p_* \in f(B_k \cap U_{n,i}), \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

де відображення $f_{k,i,n} = f\,\big|_{B_k \cap U_{n,i}}$, $k = 1, 2, \ldots$, є ін'єктивним. Звідси випливає, що функція $\widetilde{\rho}$ є борелевою (див. [14], розд. 2.3.2).

Розглянемо, насамперед, випадок, коли $\widetilde{\gamma}$ — замкнена спрямлювана крива сім'ї $f(\Gamma)$. Тоді $\widetilde{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{S}_*$ і $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, де $\gamma \in \Gamma$. Нехай $\widetilde{\gamma}^0$ — нормальне зображення кривої $\widetilde{\gamma}$ і $\gamma^*: \big[0, l(\widetilde{\gamma})\big] \to D$ є f-зображенням відносно $\widetilde{\gamma}$, тобто $f(\gamma^*(s)) = \widetilde{\gamma}^0(s)$ при $s \in \big[0, l(\widetilde{\gamma})\big]$. Зауважимо, що множина

$$S_{n,i} = \big\{ s \in \big[0, l(\widetilde{\gamma})\big] : \gamma^*(s) \in U_{n,i} \big\}$$

є відкритою в $\mathbb{R}$ як прообраз відкритої множини U_{n_i} при неперервному відображенні γ^*. Отже, $\widetilde{\gamma}|_{S_{n,i}}$ — це не більш ніж зчисленна кількість відкритих дуг, довжина кожної з яких обчислюється в координатах (V_n', ψ_n) за допомогою гіперболічної метрики (див. зауваження, наведені у вступі). Позначимо $\widetilde{\gamma}_{n,i} := \widetilde{\gamma}|_{S_{n,i}}$. Згідно з викладеним, $\widetilde{\gamma}_{n,i} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \widetilde{\gamma}_{n,i}^l$, де $\widetilde{\gamma}_{n,i}^l$ — деяка відкрита дуга. (Оскільки криву $\widetilde{\gamma}$ ми вибирали замкненою, то рівно дві із вказаних дуг можуть виявитись напіввідкритими, однак інтервали вигляду $[a, c)$ і $(c, b]$ ми інтерпретуємо як відкриті множини по відношенню до відрізка $[a, b]$.) Оскільки f має N-властивість, то $\widetilde{v_*}(B_0^{**} \cup f(B_0^*)) = 0$. За лемою 3 $\big[0, l(\widetilde{\gamma})\big] = \bigcup\limits_{\substack{1\le i\le I_0\\ 1\le n\le N_0}} S_{n,i} \cup B_*$, де B_* має лінійну міру нуль. У такому випадку

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{\rho}(p_*)\, ds_{\widetilde{h_*}}(p_*) = \sum\limits_{\substack{1\le i\le I_0\\ 1\le n\le N_0}} \int\limits_{S_{n,i}} \widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}^0(s))\, ds \tag{19}$$

для майже всіх кривих $\widetilde{\gamma} \in f(\Gamma)$. Оскільки $\widetilde{v_*}(f(B_0)) = 0$, то за лемою 3 $\widetilde{\gamma}^0(s) \notin f(B_0)$ при майже всіх $s \in \big[0, l(\widetilde{\gamma})\big]$ і майже всіх кривих $\widetilde{\gamma} \in f(\Gamma)$. Тоді для майже всіх кривих $\widetilde{\gamma}$ і всіх γ таких, що $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, отримуємо

$$\int\limits_{S_{n,i}} \widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}^0(s))\, ds = \int\limits_{S_{n,i}} \sup\limits_{p\in f^{-1}(\widetilde{\gamma}^0(s))\cap D\setminus B_0} \rho^*(p)\, ds \ge$$

$$\ge \int\limits_{S_{n,i}} \frac{\rho(\gamma^*(s))}{l(f_{n,i}'(\varphi_i(\gamma^*(s))))}\, ds. \tag{20}$$

Оскільки $\widetilde{\gamma}$ спрямлювана, то і $\widetilde{\gamma}^0$ є спрямлюваною, зокрема $\widetilde{\gamma}^0(s)$ майже скрізь диференційовна (див. лему 1). Покажемо, що γ^* абсолютно неперервна для майже всіх кривих $\widetilde{\gamma}$. Справді, γ^* спрямлювана для майже всіх $\widetilde{\gamma}$, оскільки $f \in ACP^{-1}$. Нехай $L_{\gamma,f}^{-1}$ — функція з означення ACP^{-1}-властивості. Тоді

$$\gamma^* \circ l_{\widetilde{\gamma}}(t) = \gamma(t) = \gamma^0 \circ l_{\gamma}(t) = \gamma^0 \circ L_{\gamma,f}^{-1}\big(l_{\widetilde{\gamma}}(t)\big). \tag{21}$$

Позначаючи $s := l_{\widetilde{\gamma}}(t)$, одержуємо

$$\gamma^*(s) = \gamma^0 \circ L_{\gamma,f}^{-1}(s). \tag{22}$$

Тоді γ^* абсолютно неперервна в локальних координатах, оскільки за умовою $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$ абсолютно неперервна і

$$\widetilde{h}\big(\gamma^0(s_1), \gamma^0(s_2)\big) \le |s_1 - s_2|$$

при всіх $s_1, s_2 \in [0, l(\gamma)]$. Тут також враховано, що локально $\widetilde{h}\big(\gamma^0(s_1), \gamma^0(s_2)\big)$ збігається з $h\big(\varphi(\gamma^0(s_1)), \varphi(\gamma^0(s_2))\big)$ у відповідних локальних координатах (U, φ), крім того, $\big|\varphi(\gamma^0(s_1)) - \varphi(\gamma^0(s_2))\big| \le h\big(\varphi(\gamma^0(s_1)), \varphi(\gamma^0(s_2))\big)$ за лемою 1.

Оскільки $\widetilde{\gamma}^0(s) \notin f(B_0)$ для майже всіх $s \in \big[0, l(\widetilde{\gamma})\big]$ і майже всіх кривих $\widetilde{\gamma}$, то $\gamma^*(s) \notin B_0$ для майже всіх $s \in \big[0, l(\widetilde{\gamma})\big]$. Отже, $\big(f_{n,i}\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)\big)'$ і $(\varphi_i(\gamma^*(s)))'$ існують при майже всіх

$s \in \big[0, l(\widetilde{\gamma})\big] \cap S_{n,i}$ і кожних $1 \leq i \leq I_0$, $1 \leq n \leq N_0$. Нагадаємо, що $\widetilde{\gamma}_{n,i} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \widetilde{\gamma}^l_{n,i}$, де $\widetilde{\gamma}^l_{n,i} := \widetilde{\gamma}|_{\Delta^l_{n,i}}$, $\Delta^l_{n,i} = (\alpha^l_{n,i}, \beta^l_{n,i})$, або $\Delta^l_{n,i} = [\alpha^l_{n,i}, \beta^l_{n,i})$, або $\Delta^l_{n,i} = (\alpha^l_{n,i}, \beta^l_{n,i}]$. Зауважимо, що

$$l_{\widetilde{\gamma}}(s) = \alpha^l_{n,i} + s_h(s) \quad \forall s \in \Delta^l_{n,i}, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

де $s_h(s)$ позначає гіперболічну довжину кривої $\psi_n\big(\widetilde{\gamma}_{\Delta^l_{n,i}}\big)$ на відрізку $[\alpha^l_{n,i}, s]$, причому $s_h(s) \equiv \equiv s$. З (23) і за лемою 2 при майже всіх $s \in \Delta^l_{n,i}$ маємо

$$\left|\frac{d}{ds}\big(f_{n,i}\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)\big)\right| = \frac{1 - \big|f_{n,i}\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)\big|^2}{2} \leq \frac{1}{2}. \tag{24}$$

З іншого боку, за правилом похідної складеної функції для майже всіх $s \in \Delta^l_{n,i}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{ds}\big(f_{n,i}\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)\big)\right| &= \big|f'_{n,i}\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)'\big| = \\ &= \left|f'_{n,i}\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)\frac{\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)'}{\big|\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)'\big|}\right| \big|\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)'\big| \geq \\ &\geq l\big(f'_{n,i}\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)\big)\big|\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)'\big|.\end{aligned} \tag{25}$$

Поєднуючи (24) і (25), для майже всіх $s \in S_{n,i}$ отримуємо

$$\frac{\rho(\gamma^*(s))}{l\big(f'_{n,i}\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)\big)} \geq 2\rho(\gamma^*(s))\big|\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)'\big|. \tag{26}$$

Нехай γ^0 — нормальне зображення кривої γ. Тоді, оскільки $f \in ACP^{-1}$, $L^{-1}_{\gamma,f}$ має N-властивість відносно одновимірної лінійної міри для майже всіх $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ (див. [14], теорема 2.10.13). Отже, за співвідношенням (21) $\gamma^0(s_0) \not\in f^{-1}(B_0^{**}) \bigcup B_0^*$ при майже всіх $s_0 \in \in [0, l(\gamma)]$ і майже всіх кривих $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Позначимо

$$Q_{n,i} = \big\{s_0 \in [0, l(\gamma)] : s_0 \in U_{n,i}\big\}.$$

Тоді за абсолютною неперервністю кривої $\gamma^*(s)$, а також з огляду на наслідок 2 (див. співвідношення (14)), (18) і (22) маємо

$$\begin{aligned}1 \leq \int\limits_{\gamma} \rho(p)\, ds_{\widetilde{h}}(p) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq I_0 \\ 1 \leq n \leq N_0}} \int\limits_{Q_{n,i}} \rho(\gamma^0(s_0))\, ds_0 = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq I_0 \\ 1 \leq n \leq N_0}} \int\limits_{S_{n,i}} \frac{2\rho(\gamma^*(s))\big|\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)'\big|}{1 - \big|\varphi_i(\gamma^*(s))\big|^2}\, ds \leq \\ &\leq \frac{2}{1 - r_0^2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq I_0 \\ 1 \leq n \leq N_0}} \int\limits_{S_{n,i}} \rho(\gamma^*(s))\big|\big(\varphi_i(\gamma^*(s))\big)'\big|\, ds.\end{aligned} \tag{27}$$

Поєднуючи (19), (20), (26) і (27), робимо висновок, що $\dfrac{1}{1-r_0^2}\displaystyle\int\limits_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\rho}(p_*)\,ds_{\widetilde{h_*}}(p_*)\geq 1$ для майже всіх замкнених кривих $\widetilde{\gamma}\in f(\Gamma)$. Випадок довільної кривої $\widetilde{\gamma}$ можна отримати взяттям супремума у виразі $\dfrac{1}{1-r_0^2}\displaystyle\int\limits_{\widetilde{\gamma}'}\widetilde{\rho}(p)\,ds_{\widetilde{h_*}}(p_*)\geq 1$ по всіх замкнених підкривих $\widetilde{\gamma}'$ кривою $\widetilde{\gamma}$. Отже, $\dfrac{1}{1-r_0^2}\,\widetilde{\rho}\in\operatorname{adm} f(\Gamma)$ і

$$M\left(f\left(\Gamma\right)\right)\leq\frac{1}{\left(1-r_0^2\right)^2}\int\limits_{D_*}\widetilde{\rho}^{\,2}(p_*)\,dv_*(p_*). \tag{28}$$

Згідно з теоремою 3.2.5 при $m=2$ [14], маємо

$$\int\limits_{U_{n,i}\cap B_k}K_f(p)\rho^2(p)\,d\widetilde{v}(p)=$$
$$=4\int\limits_{\varphi_i(U_{n,i}\cap B_k)}\frac{\left\|(\psi_n\circ f\circ\varphi_i^{-1})'(x)\right\|^2}{\det\left\{(\psi_n\circ f\circ\varphi_i^{-1})'(x)\right\}(1-|x|^2)^2}\rho^2\big(\varphi_i^{-1}(x)\big)\,dm(x)\geq$$
$$\geq 4\int\limits_{\varphi_i(U_{n,i}\cap B_k)}\frac{\left\|(\psi_n\circ f\circ\varphi_i^{-1})'(x)\right\|^2}{\det\left\{(\psi_n\circ f\circ\varphi_i^{-1})'(x)\right\}}\rho^2\big(\varphi_i^{-1}(x)\big)\,dm(x)=$$
$$=4\int\limits_{\psi_n(f((U_{n,i}\cap B_k)))}\frac{\rho^2\left((f_k^{-1}\circ\psi_n^{-1})(y)\right)}{\left\{l\left(f'_{n,i}\left((\varphi_i\circ f_k^{-1}\circ\psi_n^{-1})(y)\right)\right)\right\}^2}\,dm(y)\geq$$
$$\geq\left(1-R_0^2\right)^2\int\limits_{f(D)}\rho^2_{k,i,n}(p_*)\,d\widetilde{v_*}(p_*). \tag{29}$$

Нарешті, за теоремою Лебега (див. [15], теорема I.12.3), враховуючи (28) і (29), отримуємо

$$\int\limits_{D}K_f(p)\rho^2(p)\,d\widetilde{v}(p)=\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq I_0,\ 1\leq n\leq N_0\\ 1\leq k<\infty}}\ \int\limits_{U_{n,i}\cap B_k}K_f(p)\rho^2(p)\,d\widetilde{v}(p)\geq$$
$$\geq\left(1-R_0^2\right)^2\int\limits_{f(D)}\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq I_0,\ 1\leq n\leq N_0\\ 1\leq k<\infty}}\rho^2_{k,i,n}(p_*)\,d\widetilde{v_*}(p_*)\geq$$
$$\geq\left(1-R_0^2\right)^2\int\limits_{f(D)}\sup\limits_{\substack{1\leq i\leq I_0,\ 1\leq n\leq N_0\\ 1\leq k<\infty}}\rho^2_{k,i,n}(p_*)\,d\widetilde{v_*}(p_*)=$$
$$=\left(1-R_0^2\right)^2\int\limits_{f(D)}\widetilde{\rho}^{\,2}(p_*)\,d\widetilde{v_*}(p_*)\geq\left(1-R_0^2\right)^2\left(1-r_0^2\right)^2M(f(\Gamma)).$$

Остаточно співвідношення

$$M(f(\Gamma)) \leq c \int\limits_{D} K_f(p)\rho^2(p)\, d\widetilde{v}(p) \tag{30}$$

виконується для кожної $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, де $c := \dfrac{1}{\left(1-R_0^2\right)^2\left(1-r_0^2\right)^2}$. Спрямовуючи в (30) r_0 і R_0 до нуля, отримуємо співвідношення (5).

Теорему 1 доведено.

4. Межова поведінка відображень. Насамкінець розглянемо застосування теореми 1 до проблеми про межову поведінку відображень. Нехай D — область в $\mathbb{S}$ і $E,\ F \subset D$ — довільні множини. Далі через $\Gamma(E,F,D)$ ми позначатимемо сім'ю всіх кривих $\gamma\colon [a,b] \to D$, які з'єднують E і F в D, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in [a,b]$. Домовимося говорити, що межа ∂D області D є *сильно досяжною у точці* $p_0 \in \partial D$, якщо для кожного околу U точки p_0 знайдуться компакт $E \subset D$, окіл $V \subset U$ цієї ж точки і число $\delta > 0$ такі, що для будь-яких континуумів E і F, що перетинають як ∂U, так і ∂V, виконується нерівність $M\big(\Gamma(E,F,D)\big) \geq \delta$. Ми також будемо говорити, що межа ∂D є *сильно досяжною*, якщо вона є сильно досяжною в кожній своїй точці. Для множини $E \subset \mathbb{S}$, як правило,

$$C(f,E) = \big\{p_* \in \mathbb{S}_* \colon \exists p_k \in D,\ \ p \in E \colon p_k \to p,\ \ f(p_k) \to p_*,\ \ k \to \infty\big\}.$$

Дотримуючись [16] (розд. 2) (див. також [2], розд. 6.1, гл. 6), будемо говорити, що функція $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ має *скінченне середнє коливання* у точці $p_0 \in D$ (пишемо $\varphi \in FMO(p_0)$), якщо

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\widetilde{v}\big(\widetilde{B}(p_0,\varepsilon)\big)} \int\limits_{\widetilde{B}(p_0,\varepsilon)} \big|\varphi(p) - \overline{\varphi}_\varepsilon\big|\, d\widetilde{v}(p) < \infty,$$

де $\overline{\varphi}_\varepsilon = \dfrac{1}{\widetilde{v}(\widetilde{B}(p_0,\varepsilon))} \displaystyle\int_{\widetilde{B}(p_0,\varepsilon)} \varphi(p)\, d\widetilde{v}(p)$. Справджується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай D і D_* — області ріманових поверхонь $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}_*$ відповідно, при цьому $\overline{D}$ і $\overline{D_*}$ є компактами. Нехай також f — відкрите дискретне диференційовне майже скрізь відображення області D на D_*, що належить класу ACP^{-1} і має N- і N^{-1}-властивості Лузіна. Припустимо, що область D локально лінійно зв'язна у точці $b \in \partial D$, $C(f,\partial D) \subset \partial D'$, і $\partial D'$ сильно досяжна хоча б в одній своїй точці $p_* \in C(f,b)$. Якщо $Q \in FMO(b)$, то $C(f,b) = \{p_*\}$.*

Доведення. За теоремою 1 відображення f задовольняє співвідношення (5) для кожної сім'ї кривих Γ в області D. Зокрема, для будь-яких двох континуумів $C_0 \subset \overline{\widetilde{B}(b,r_1)}$, $C_1 \subset \mathbb{S}\backslash\widetilde{B}(b,r_2)$ виконується умова

$$M\big(f(\Gamma(C_1,C_0,D))\big) \leq \int\limits_{A\cap D} Q(p)\rho^2(p)\, d\widetilde{v}(p) \quad \forall \rho \in \operatorname{adm}\Gamma(C_1,C_0,D),$$

$$A = A(b,r_1,r_2) = \big\{p \in \mathbb{S} \colon r_1 < \widetilde{h}(p,b) < r_2\big\}, \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty.$$

Нехай $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ — довільна вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \eta(t)\, dt \geq 1$. Покладемо $\rho(p) = \eta\big(\widetilde{h}(p,p_0)\big)$. Тоді для довільної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma(C_1,C_0,D)$ з огляду на [2] (пропозиція 13.4) виконується умова $\displaystyle\int_\gamma \rho(p)\, ds_{\widetilde{h}}(p) \geq 1$.

У такому випадку

$$M\big(f(\Gamma(C_1, C_0, D))\big) \leq \int\limits_{A\cap D} Q(p)\eta\big(\widetilde{h}(p, p_0)\big)d\widetilde{v}(p).$$

Зауважимо, що кожна крива $\beta\colon [a, b) \to D_*$ має максимальне f-підняття з початком у точці $p \in f^{-1}(\beta(a))$ в області D (див. [17], лема 2.1). Крім того, ріманові поверхні локально регулярні по Альфорсу (див., наприклад, [10], теорема 7.2.2). У такому випадку необхідний висновок випливає з теореми 5 [18].

Література

1. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Distortion and singularities of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **465**, 1 – 13 (1970).
2. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci. + Business Media, LLC, New York (2009).
3. J. Väisälä, *Lectures on N-dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., **229** (1971).
4. V. Ryazanov, S. Volkov, *On the boundary behavior of mappings in the class $W^{1,1}_{loc}$ on Riemann surfaces*, Complex Anal. and Oper. Theory, **11**, 1503 – 1520 (2017).
5. V. Ryazanov, S. Volkov, *Prime ends in the Sobolev mapping theory on Riemann surfaces*, Mat. Stud., **48**, 24 – 36 (2017).
6. J. Väisälä, *Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **509**, 1 – 14 (1972).
7. R. Näkki, *Boundary behavior of quasiconformal mappings in N-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **484**, 1 – 50 (1970).
8. Е. А. Полецкий, *Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений*, Мат. сб., **83,** № 2, 261 – 272 (1970).
9. С. Л. Крушкаль, Б. Н. Апанасов, Н. А. Гусевский, *Униформизация и клейновы группы*, Новосиб. гос. ун-т, Новосибирск (1979).
10. А. Бердон, *Геометрия дискретных групп*, Наука, Москва (1986).
11. J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Springer Sci. + Business Media, New York (2001).
12. J. Maly, O. Martio, *Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{\rm loc}$*, J. reine und angew. Math., **458**, 19 – 36 (1995).
13. К. Куратовский, *Топология, т. 1*, Мир, Москва (1966).
14. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва (1987).
15. С. Сакс, *Теория интеграла*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949).
16. А. Игнатьев, В. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений*, Укр. мат. вестн., **2,** № 3, 395 – 417 (2005).
17. E. A. Sevost'yanov, A. A. Markysh, *On Sokhotski – Casorati – Weierstrass theorem on metric spaces*, Complex Var. and Elliptic Equat., **64**, № 12, 1973 – 1993 (2019).
18. Е. А. Севостьянов, *О локальном и граничном поведении отображений в метрических пространствах*, Алгебра и анализ, **28**, № 6, 118 – 146 (2016).

Одержано 03.01.20