DOI: 10.37863/umzh.v73i5.6590

УДК 517.986.2

К. А. Крутой (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО СТІЙКІСТЬ ДЕФОРМАЦІЙ АЛГЕБР КУНЦА – ТЬОПЛІЦА

We study C^*-algebras $\mathcal{O}_{n+m}^{\hat{q}}$ generated by isometries $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{t_j\}_{j=1}^m$, where isometries from the same collection are orthogonal and isometries from different collections are $q_{i,j}$-commuting. It is shown that if $|q_{i,j}| < 1$, then C^*-algebra $\mathcal{O}_{n+m}^{\hat{q}}$ is isomorphic to Cuntz – Toeplitz algebra $\mathcal{O}_{n+m}^0$.

Вивчаються C^*-алгебри $\mathcal{O}_{n+m}^{\hat{q}}$, породжені ізометріями $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{t_j\}_{j=1}^m$, де ізометрії з одного набору ортогональні, а ізометрії з різних наборів $q_{i,j}$-комутують. Показано, що при $|q_{i,j}| < 1$ алгебра $\mathcal{O}_{n+m}^{\hat{q}}$ ізоморфна алгебрі Кунца – Тьопліца $\mathcal{O}_{n+m}^0$.

1. Вступ. У роботі [1] було введено клас інволютивних алгебр, який дозволив з єдиної точки зору підійти до вивчення різних співвідношень, які виникають, зокрема, в моделях математичної фізики, — клас алгебр з віківським упорядкуванням. Даний клас алгебр інтенсивно досліджувався у багатьох роботах (див., наприклад, [2, 6]).

Нагадаємо, що алгебра з віківським упорядкуванням — це інволютивна алгебра з твірними $\left\{a_j, a_j^*\right\}_{j=1}^n$, в якій справджуються співвідношення вигляду

$$a_i^* a_j = \delta_{i,j} 1 + \sum_{k,l=1}^n T_{i,j}^{k,l} a_l a_k^*, \quad i \le j.$$

У повній тензорній алгебрі $\mathcal{T}(H) = \bigoplus_{k=0}^\infty H^{\otimes k}$, де $H = \mathbb{C}^n$ і $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортонормований базис для H, набір коефіцієнтів $\left\{T_{i,k}^{l,j}\right\}_{i,j,k,l=1}^n$ задає оператор T за правилом

$$T e_k \otimes e_l = \sum_{i,j=1}^n T_{i,k}^{l,j} e_i \otimes e_j.$$

Однією з відкритих проблем даної теорії є питання про стійкість класів обгортуючих C^*-алгебр при деформації оператора коефіцієнтів T. Зокрема, було доведено, що при $\|T\| < \sqrt{2} - 1$ обгортуюча C^*-алгебра ізоморфна алгебрі Кунца – Тьопліца $\mathcal{O}_n^0$ з відповідною кількістю твірних [2].

Гіпотеза 1 [2]. Обгортуючі C^*-алгебри алгебр з віківським упорядкуванням, оператор коефіцієнтів яких за нормою менший за одиницю, ізоморфні алгебрі Кунца – Тьопліца $\mathcal{O}_n^0$ з відповідною кількістю твірних.

На даний час відомо всього кілька прикладів класів алгебр, в яких ця гіпотеза справедлива для всіх T, $\|T\| < 1$.

В роботах [3, 5] вивчались алгебри вигляду

$$\mathcal{O}_n^{\hat{q}} \cong C^*\left(\{s_i\}_{i=1}^n\right),$$
$$s_i^* s_j = \delta_{i,j} 1 + (1 - \delta_{i,j})(q_{i,j}) s_j s_i^*, \quad |q_{i,j}| < 1, \quad i \le j.$$

Кожній алгебрі такого вигляду можна природним чином поставити у відповідність зважений граф. Вершинам графа будуть відповідати елементи $\{s_i\}_{i=1}^n$. Якщо для двох вершин, що відповідають елементам s_i, s_j, $i < j$, коефіцієнт $q_{i,j} \ne 0$, то існує ребро, що з'єднує ці вершини з вагою $q_{i,j}$. У протилежному випадку ребро не існує. Гіпотеза 1 справедлива для алгебр, що відпо-

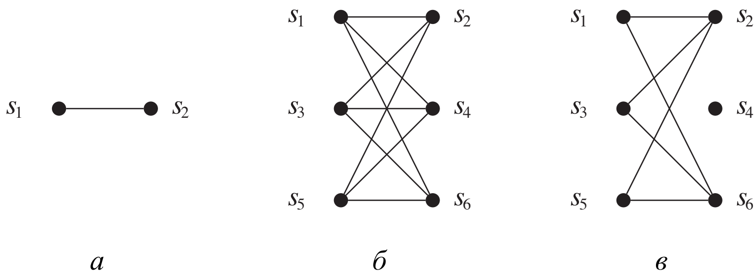

Рис. 1

відають таким графам: зваженому графу на двох вершинах [3] (див. рис. 1, *а*), повному дводольному графу з однаковими вагами [4] (приклад графа на шести вершинах зображено на рис. 1, *б*).

У даній статті ми узагальнимо результат [4] на випадок довільних дводольних графів, де ваги — довільні комплексні числа, за модулем менші за одиницю (приклад такого графа зображено на рисунку 1, *в*), а саме, доведемо, що відповідні обгортуючі C^*-алгебри ізоморфні алгебрі Кунца – Тьопліца з відповідною кількістю твірних.

2. Основний результат. У цьому пункті ми покажемо, що якщо граф $\mathcal{O}^{\hat{q}}_{n+m}$ дводольний, то $\mathcal{O}^{\hat{q}}_{n+m} \cong \mathcal{O}^{0}_{n+m}$.

Лема 1. *Нехай граф алгебри $\mathcal{A} = \mathcal{O}^{\hat{q}}_{n+m}$ дводольний та ізометрії $\{s_i\}_{i=1}^n$ лежать в одній долі. Тоді для довільного $x \in \mathcal{A}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ маємо*

$$\left\| \sum_{i=1}^n q_{i,k} s_i x s_i^* \right\| < \|x\|.$$

Доведення. Оскільки ізометрії $\{s_i\}_{i=1}^n$ лежать в одній долі відповідного графа, то їхні образи ортогональні. Тоді

$$\left\| \sum_{i=1}^n q_{i,k} s_i x s_i^* \right\| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |q_{i,k}| \left\| \sum_{i=1}^n s_i x s_i^* \right\| < \left\| \sum_{i=1}^n s_i x s_i^* \right\|.$$

Доведення того, що

$$\left\| \sum_{i=1}^n s_i x s_i^* \right\| \leq \|x\|,$$

в точності повторює доведення леми 2 в роботі [4].

Теорема 1. *Якщо граф дводольний, то відповідна цьому графу C^*-алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{O}^{\hat{q}}_{n+m}$ ізоморфна алгебрі Кунца – Тьопліца $\mathcal{O}^{0}_{n+m}$.*

Доведення. Оскільки граф алгебри $\mathcal{A}$ дводольний, то твірні можна розбити на дві множини:

$$\mathcal{A} \cong C^* \left(\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{t_j\}_{j=1}^m \right),$$

де ізометрії $\{s_i\}_{i=1}^n$, $\{t_j\}_{j=1}^m$ задовольняють співвідношення

$$s_k^* s_l = 0, \quad k \neq l,$$
$$t_k^* t_l = 0, \quad k \neq l,$$
$$t_k^* s_l = q_{k,l} s_l t_k^*.$$

Нехай P — проєкція на перетин ядер $\left\{s_i^*\right\}_{i=1}^n$. Оскільки $\{s_i\}_{i=1}^n$ ортогональні, то проєкція має вигляд $P = 1 - \sum_{k=1}^n s_k s_k^*$. Розглянемо полярний розклад для елемента Pt_i:

$$Pt_i = \hat{t}_i c_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

де $\hat{t}_i$ — часткова ізометрія і $c_i = |Pt_i|$. Тоді

$$c_i^2 = t_i^* P t_i = t_i^* \left(1 - \sum_{k=1}^n s_k s_k^*\right) t_i = 1 - \sum_{k=1}^n |q_{k,i}|^2 s_k s_k^* \geq \min_k \left(1 - |q_{k,i}|^2\right) 1 > 0,$$

тобто c_i є строго додатним і, як наслідок, оборотним, при цьому $\hat{t}_i$ — ізометрія. Ми отримали ізометрії $\left\{\hat{t}_i\right\}_{i=1}^m$, які задовольняють співвідношення

$$\hat{t}_i^* \hat{t}_j = 0, \quad i \neq j,$$
$$\hat{t}_i^* s_j = 0.$$

Побудуємо гомоморфізм $\phi\colon \mathcal{O}_{n+m}^0 \to \mathcal{A}$ таким чином.

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^n \cup \{w_i\}_{i=1}^m$ — твірні в $\mathcal{O}_{n+m}^0$,

$$u_j^* u_j = w_i^* w_i = 1, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$
$$u_j^* u_k = w_i^* w_l = 0, \quad j \neq k, \quad i \neq l,$$
$$u_j^* w_l = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Задамо

$$\phi(u_i) = s_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$\phi(w_j) = P t_j c_j^{-1} = \hat{t}_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Наша мета — показати, що ϕ — ізоморфізм.

Покладемо $Q = 1 - P = \sum_{j=1}^n s_j s_j^*$ і запишемо полярний розклад для $P\hat{t}_i$:

$$t_i = \hat{t}_i c_i + Q t_i.$$

Зауважимо, що

$$Q t_i = \sum_{k=1}^n s_k s_k^* t_i = \sum_{k=1}^n q_{k,i} s_k t_i s_k^*.$$

Нехай лінійне відображення ψ_i задано таким чином:

$$\psi_i(x) = \sum_{k=1}^n q_{k,i} s_k x s_k^*.$$

Тоді вираз для $\hat{t}_i$ можна записати, використавши ψ_i:

$$t_i = \hat{t}_i c_i + \psi_i(t_i).$$

Позначимо через $\psi_i^{(j)}$ j-ту ітерацію відображення ψ_i, тобто $\psi_i^{(j+1)} = \psi_i^{(j)} \circ \psi_i$. Ітеруючи вираз для t_i, маємо

$$t_i = \sum_{k=0}^{l-1} \psi_i^{(k)}(\hat{t}_i c_i) + \psi_i^{(l)}(t_i), \quad l \in \mathbb{N}.$$

З леми 1 випливає, що $\|\psi_i\| < 1$, тоді $\left\|\psi_i^{(l)}(t_i)\right\| \leq \|\psi_i\|^l \to 0$, $l \to \infty$, і t_i належить C^*-алгебрі, породженій $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \left\{\hat{t}_i\right\}$, тобто в C^*-алгебрі $\mathcal{A}$ маємо

$$t_i = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_i^{(k)}(\hat{t}_i c_i).$$

Лема 2. *Відображення $\hat{\phi}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{O}_{n+m}^0$, яке задається формулами*

$$\hat{\phi}(s_i) = u_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\hat{\phi}(t_j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{\psi}_j^{(k)}(w_j d_j), \quad j \in \{1, \ldots, m\},$$

є гомоморфізмом, де

$$\hat{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^{n} q_{k,i} u_k x u_k^*, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

$$d_i = \hat{\phi}(c_i) = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n} q_{k,i} u_k u_k^*}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Доведення. Справді, ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{\psi}_j^{(k)}(w_j d_j)$ збігається, тому що

$$\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{\psi}_j^{(k)}(x)\right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left\|\hat{\psi}_j\right\|^k = \frac{1}{1 - \left\|\hat{\psi}_j\right\|},$$

а норма $\hat{\psi}_j$ менша за одиницю за лемою 1, оскільки ізометрії $\{u_i\}_{i=1}^n$ лежать в одній долі.

Зауважимо, що

$$u_l^* \hat{\psi}_j^{(k)}(w_j d_j) = u_l^* \sum_{i=1}^{n} q_{i,j} u_i \hat{\psi}_j^{(k-1)}(w_j d_j) u_i^* =$$

$$= q_{l,j} \hat{\psi}_j^{(k-1)}(w_j d_j) u_l^* \quad \forall l \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\},$$

тоді

$$\hat{\phi}(s_l)^* \hat{\phi}(t_j) = u_l^* \hat{\phi}(t_j) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_l^* \hat{\psi}_j^{(k)}(w_j d_j) =$$

$$= q_{l,j} \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{\psi}_j^{(k-1)}(w_j d_j) u_l^* = q_{l,j} \hat{\phi}(t_j) u_l^* = q_{l,j} \hat{\phi}(t_j) \hat{\phi}(s_l)^*.$$

Також

$$\hat{\psi}_j^{(k)}(w_jd_j)^*\hat{\psi}_i^{(l)}(w_id_i)=\sum_{l=1}^{n}\bar{q}_{l,j}q_{l,i}u_l\hat{\psi}_j^{(k-1)}(w_jd_j)^*\hat{\psi}_i^{(l-1)}(w_id_i)u_l^*,$$

$$w_i^*\hat{\psi}_j^{(k)}(w_jd_j)=\hat{\psi}_j^{(k)}(w_jd_j)^*w_i=0\quad\forall j\in\{1,\ldots,n\}\quad\forall i\in\{1,\ldots,m\},\quad i\neq j,$$

тоді

$$\hat{\phi}(t_k)^*\hat{\phi}(t_l)=0,\quad k\neq l.$$

Отже, для $\left\{\hat{\phi}(s_i)\right\}_{i=1}^{n}$, $\left\{\hat{\phi}(t_j)\right\}_{j=1}^{m}$ справджуються співвідношення твірних алгебри Кунца – Тьопліца $\mathcal{O}_{n+m}^0$, тому $\hat{\phi}$ задає гомоморфізм із $\mathcal{A}$ в $\mathcal{O}_{n+m}^0$.

Лему 2 доведено.

Для доведення теореми залишилося показати, що $\phi\circ\hat{\phi}=\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ і $\hat{\phi}\circ\phi=\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{n+m}^0}$. Справді,

$$\phi\circ\hat{\phi}(s_i)=s_i,$$

$$\hat{\phi}\circ\phi(u_i)=u_i,$$

$$\phi\circ\hat{\phi}(t_j)=\phi\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\hat{\psi}_j^{(k)}(w_jd_j)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\phi\left(\hat{\psi}_j^{(k)}(w_jd_j)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_j^{(k)}(\phi(w_jd_j))=\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_j^{(k)}(Pt_j)=t_j,$$

$$\hat{\phi}\circ\phi(w_j)=\hat{\phi}\left(Pt_jc_j^{-1}\right)=\hat{\phi}(P)\sum_{k=0}^{+\infty}\hat{\psi}_j^{(k)}(w_jd_j)d_j^{-1}=$$

$$=\hat{\phi}(P)\hat{\psi}_j^{(0)}(w_jd_j)d_j^{-1}=\left(1-\sum_{i=1}^{n}u_iu_i^*\right)w_j=w_j$$

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\}\quad\forall j\in\{1,\ldots,m\}.$$

Таким чином, ми довели, що ϕ — ізоморфізм.

Теорему 2 доведено.

Автор вдячний Василю Львовичу Островському за корисні обговорення і сприяння при підготовці цієї статті.

Література

1. P. E. T. Jorgensen, L. M. Schmitt, R. F. Werner, *Positive representations of general commutation relations allowing Wick ordering*, J. Funct. Anal., **134**, № 1, 33 – 99 (1995).
2. P. E. T. Jorgensen, L. M. Schmitt, R. F. Werner, *q-Canonical commutation relations and stability of the Cuntz algebra*, Pacif. J. Math., **165**, № 1, 131 – 151 (1994).
3. P. E. T. Jorgensen, D. P. Proskurin, Y. S. Samoilenko, *On C^*-algebras generated by pairs of q-commuting isometries*, J. Phys. A, **38**, № 12, 2669 – 2680 (2005).
4. A. Kuzmin, V. Ostrovskyi, D. Proskurin, R. Yakymiv, *On q-tensor product of Cuntz algebras*, Preprint (2019).
5. A. Kuzmin, N. Pochekai, *Faithfulness of the Fock representation of the C^*-algebra generated by q_{ij}-commuting isometries*, J. Operator Theory, **80**, № 1, 77 – 93 (2018).
6. K. Dykema, A. Nica, *On the Fock representation of the q-commutation relations*, J. reine and angew. Math., **440**, 201 – 212 (1993).

Одержано 23.02.21