DOI: 10.37863/umzh.v73i7.6408

УДК 517.9

М. М. Рахматуллаєв (Ін-т математики ім. В. І. Романовського АН Республіки Узбекистан, Ташкент; Наманган. держ. ун-т, Узбекистан),

Ф. К. Рафіков, Ш. Х. Азамов (Коканд. держ. пед. ін-т, Узбекистан)

ПРО КОНСТРУКТИВНІ ОПИСИ МІР ГІББСА ДЛЯ МОДЕЛІ ПОТТСА НА ДЕРЕВІ КЕЛІ

We consider the Potts model on a Cayley tree and prove the existence of Gibbs measures built by using the method suggested in [H. Akin, U. A. Rozikov, S. Temir, *A new set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree*, J. Stat. Phys., **142**, № 2, 314 – 321 (2011)]. In addition, we prove that there exist (k_0)-translation invariant Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree and calculate the free energy of these Gibbs measures.

Розглядається модель Поттса на дереві Келі. Доведено існування мір Гіббса, побудованих аналогічним методом із [H. Akin, U. A. Rozikov, S. Temir, *A new set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree*, J. Stat. Phys., **142**, № 2, 314 – 321 (2011)], і (k_0)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса для моделі Поттса на дереві Келі. Обчислено вільні енергії цих мір Гіббса.

1. Вступ. Поняття міри Гіббса для моделі Поттса на дереві Келі вводиться стандартним чином (див. [1 – 4]). У роботі [5] вивчено феромагнітну модель Поттса з трьома станами на дереві Келі другого порядку і показано існування критичної температури T_c такої, що при $T < T_c$ існують три трансляційно-інваріантні міри Гіббса й незліченна кількість мір Гіббса, які не є трансляційно-інваріантними. У роботі [6] узагальнено результати роботи [5] для моделі Поттса зі скінченним числом станів на дереві Келі довільного (скінченного) порядку.

У роботі [7] доведено, що на дереві Келі трансляційно-інваріантна міра Гіббса антиферомагнітної моделі Поттса із зовнішнім полем єдина. Роботу [8] присвячено моделі Поттса зі зліченним числом станів і з ненульовим зовнішнім полем на дереві Келі. Доведено, що ця модель має єдину трансляційно-інваріантну міру Гіббса.

У роботі [9] знайдено всі трансляційно-інваріантні міри Гіббса для моделі Поттса з q $(q \geq 3)$ станами (спінами) і, зокрема, показано, що при досить низьких температурах їхня кількість дорівнює $2^q - 1$. Доведено, що існують $[q/2]$ критичних температур, і вказано точну кількість трансляційно-інваріантних мір Гіббса для кожної проміжної температури.

У роботі [10] введено слабко періодичну міру Гіббса і для моделі Ізінга знайдено деякі такі міри, а в роботі [11] для моделі Поттса вивчено слабко періодичні основні стани й слабко періодичні міри Гіббса. У роботах [16, 17] вивчено слабко періодичні міри Гіббса для моделі Поттса із зовнішнім полем. У роботах [15, 18] було вивчено вільну енергію для відомих мір Гіббса моделі Ізінга й Поттса.

У роботі [12] побудовано деякі міри Гіббса (далі названі мірами Гіббса, отриманими ART-конструкцією) для моделі Ізінга на дереві Келі. У роботах [13, 14] для моделі Ізінга за допомогою трансляційно-інваріантної міри Гіббса на дереві Келі порядку k_0 побудовано нову міру Гіббса на дереві Келі порядку k $(k_0 < k)$, названу (k_0)-трансляційно-інваріантною мірою Гіббса.

Метою цієї статті є побудова міри Гіббса, отриманої ART-конструкцією, і (k_0)-трансляційно-інваріантної міри Гіббса для моделі Поттса. Робота має таку структуру: у п. 2 введено основні означення та відомі факти; у п. 3 наведено результати для мір Гіббса, одержаних ART-конструкцією; у п. 4 наведено результати, отримані для (k_0)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса; у п. 5 обчислено вільні енергії для мір Гіббса, одержаних ART-конструкцією та однією (2)-трансляційно-інваріантною мірою Гіббса.

2. Означення й відомі факти. Дерево Келі T^k порядку $k \geq 1$ — нескінченне дерево, тобто граф без циклів, із кожної вершини якого виходить рівно $k+1$ ребро. Нехай $T^k = (V, L, i)$, де V — множина вершин T^k, L — множина його ребер, i — функція інцидентності, що зіставляє кожному ребру $l \in L$ його кінцеві точки $x, y \in V$. Якщо $i(l) = \{x, y\}$, то x і y називаються *найближчими сусідами вершини* і позначаються $l = \langle x, y \rangle$.

Відстань $d(x, y),\ x, y \in V$, на дереві Келі визначається формулою $d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V$ таке, що $\langle x_0, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}$.

Для фіксованого $x^0 \in V$ позначимо

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},$$
$$V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \qquad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Для $x \in W_n$ покладемо $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Відомо, що існує взаємно однозначна відповідність між множиною V вершин дерева Келі порядку $k \geq 1$ і групою G_k, що є вільним добутком $k+1$ циклічної групи другого порядку з твірними $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ відповідно (див. [4]).

Ми розглянемо модель, де спінові змінні набувають значень із множини $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$, $q \geq 2$, і розташовані на вершинах дерева. Тоді *конфігурація* σ на V визначається як функція $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множина всіх конфігурацій збігається з $\Omega = \Phi^V$. Нехай $\Omega_n = \Phi^{V_n}$ позначає простір конфігурацій, визначених на V_n.

Гамільтоніан моделі Поттса визначається як

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{1}$$

де $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ — найближчі сусіди і δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{якщо} \quad i = j. \end{cases}$$

Розглянемо множину $\Phi' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_q\}$, де $\sigma_i \in \mathbb{R}^{q-1}$, і задамо скалярний добуток $\sigma_i \sigma_j$ як

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{1}{q-1}, & \text{якщо} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{якщо} \quad i = j. \end{cases}$$

Тоді

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{q-1}{q} \left(\sigma(x)\sigma(y) + \frac{1}{q-1} \right).$$

За допомогою цієї формули гамільтоніан моделі Поттса можна звести до гамільтоніана моделі Ізінга з q значеннями спіна:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y).$$

Зафіксуємо базис $\{e_1, \ldots, e_{q-1}\}$ в $\mathbb{R}^{q-1}$ так, що $e_i = \sigma_i,\ i = 1, 2, \ldots, q-1$. Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{q} \sigma_i = 0.$$

Зауважимо, що якщо $h = (h_1, \ldots, h_{q-1})$, то

$$h\sigma_i = \begin{cases} \dfrac{q}{q-1} h_i - \dfrac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{q-1} h_j, & \text{якщо} \quad i = 1, \ldots, q-1, \\ -\dfrac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{q-1} h_j, & \text{якщо} \quad i = q. \end{cases}$$

Визначимо скінченновимірний розподіл імовірнісної міри μ в об'ємі V_n як

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\right\}, \tag{2}$$

де $\sigma_n \in \Omega_n,\ \beta = 1/T,\ T > 0$ — температура, $h_x \in \mathbb{R}^{q-1}$,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y)$$

і Z_n^{-1} — нормувальний множник,

$$Z_n = Z_n(\beta, h) = \sum_{\sigma_n \in \Omega_n} \exp\left(-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\right).$$

Сукупність векторів $h = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1}, x \in V\}$ задає (узагальнену) граничну умову.

Означення 1. *Вільною енергією, що відповідає граничній умові* h, *називається така границя* (*якщо вона існує*):

$$E(\beta, h) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta |V_n|} \ln Z_n(\beta, h).$$

Кажуть, що ймовірнісні розподіли (2) є узгодженими, якщо для всіх $n \geq 1$ і $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\sigma^{(n)} \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \tag{3}$$

де $\sigma_{n-1} \vee \sigma^{(n)}$ — об'єднання конфігурацій.

У цьому випадку існує єдина міра μ на Φ^V така, що для всіх n і $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Така міра називається *граничною мірою Гіббса*, що відповідає гамільтоніану (1) і векторнозначній функції $h_x,\ x \in V$.

Наступне твердження описує умову на функцію h_x, яка забезпечує узгодженість мір $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 1 [15]. *Міри* (2) *задовольняють умову* (3) *тоді й тільки тоді, коли для всіх* $x \in \in V \setminus \{x^0\}$ *справджується рівняння*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \tag{4}$$

де функція $F\colon h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \to F(h, \theta) = (F_1, \ldots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ *визначається формулою*

$$F_i = \ln\left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right), \qquad \theta = \exp(J\beta).$$

Кожному розв'язку h_x функціонального рівняння (4) відповідає одна міра Гіббса і навпаки.

3. ART-конструкція. У роботі [12] побудовано деякі міри Гіббса для моделі Ізінга на дереві Келі. Метою даного пункту є побудова аналогічної міри для моделі Поттса.

Нехай μ — деяка міра Гіббса на дереві Келі порядку $k_0 \leq k$, $h_x(\mu) \in \mathbb{R}^{q-1}$ — сукупність векторів, що відповідає мірі μ, і $q \geq 2$.

Тепер для μ побудуємо міру Гіббса $\nu = \nu(\mu)$ на дереві Келі порядку $k \geq k_0$. Нехай V^k — множина всіх вершин T^k і, відповідно, V^{k_0} — множина всіх вершин T^{k_0}. Сукупність векторів $\tilde{h}_x = \tilde{h}_x(\nu) \in \mathbb{R}^{q-1}$ на T^K, що відповідає мірі $\nu(\mu)$, побудуємо таким чином:

$$\tilde{h}_x = \begin{cases} h_x(\mu), & x \in V^{k_0}, \\ \overline{0}, & x \in V^k \setminus V^{k_0}, \end{cases} \tag{5}$$

де $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{q-1}$.

Цю функцію на дереві Келі порядку $k = 3$ показано на рисунку.

Для $x \in V^k$ через $S_{k_0}(x)$ позначимо довільні k_0, $1 \leq k_0 \leq k$, елементів $S(x)$. Зауважимо, що $S(x) = S_k(x)$. Тепер перевіримо, чи (5) задовольняє (4) на дереві Келі T^k.

Нехай $x \in V^{k_0} \subset V^k$. Тоді справджуються рівності

$$\tilde{h}_x = \sum_{y \in S_k(x)} F(\tilde{h}_y, \theta) = \sum_{y \in S_k(x) \cap V^{k_0}} F(h_x(\mu), \theta) +$$

$$+ \sum_{y \in S_k(x) \cap (V^k \setminus V^{k_0})} F(\overline{0}, \theta) = \sum_{y \in S_{k_0}(x)} F(h_x(\mu), \theta) = h_x(\mu).$$

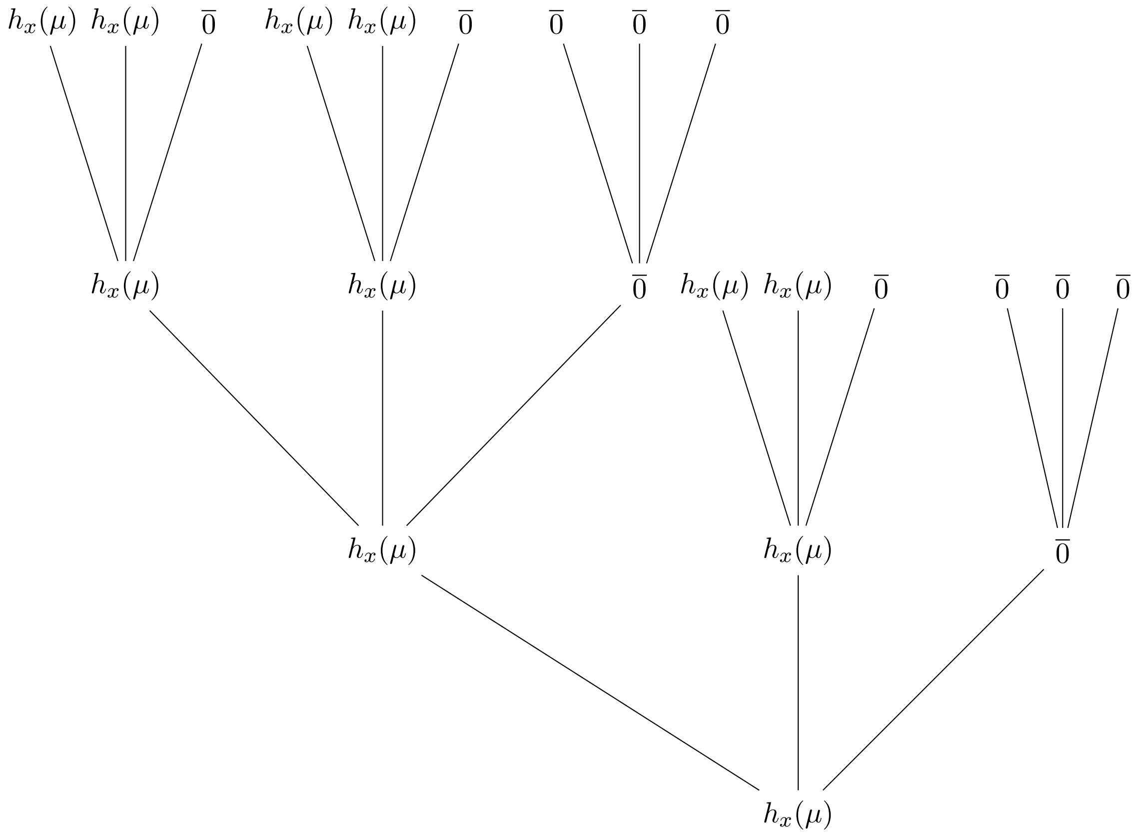
Тут ми скористалися рівністю $F(\overline{0}, \theta) = 0$, тобто

$$\sum_{y \in S(x) \cap \left(V^k \setminus V^{k_0}\right)} F\left(\overline{0}, \theta\right) = 0.$$

Легко бачити, що якщо $x \in V^k \setminus V^{k_0}$, то $S(x) \subset V^k \setminus V^{k_0}$. Тому маємо

$$\tilde{h}_x = \sum_{y \in S(x)} F(\tilde{h}_y, \theta) = \sum_{y \in S(x)} F(\overline{0}, \theta) = 0.$$

Отже, функція $\tilde{h}_x$, визначена в (5), задовольняє функціональне рівняння (4). Через $\nu = \nu(\mu)$ позначимо міру відповідної сукупності векторів $\tilde{h}_x$ і назвемо її мірою Гіббса, отриманою ART-конструкцією.



***Зауваження* 1.** 1. На дереві Келі порядку 2 при $\theta > \theta_{cr} = 1 + 2\sqrt{q-1}$ існують трансляційно-інваріантні міри Гіббса, відмінні від міри μ_0, яка відповідає вектору $h_x = \overline{0}$ $\forall x \in V^2$ (див. [9]). Міру Гіббса, отримувану ART-конструкцією, побудуємо за допомогою цих мір, тому повинна виконуватись умова $\theta > \theta_{cr} = 1 + 2\sqrt{q-1}$. Побудовані таким чином міри Гіббса відрізняються від відомих раніше мір (див. [9, 19, 20]).

2. У випадку $k > 2$ при інших значеннях θ можуть існувати й інші міри Гіббса (див. [11, 16, 17]). За допомогою цих мір також можна побудувати міру Гіббса, отримувану ART-конструкцією.

В результаті ми довели таку теорему.

Теорема 2. *Нехай $k \geq 3$. Якщо $\theta > \theta_{cr} = 1 + 2\sqrt{q-1}$, то для моделі Поттса на дереві Келі існує незліченна множина мір Гіббса, одержаних ART-конструкцією.*

4. (k_0)-Трансляційно-інваріантна міра Гіббса. При будь-яких k і q трансляційно-інваріантні міри Гіббса для моделі Поттса вивчено в роботі [9].

У випадку $k = 2$, $q = 3$ для сукупності трансляційно-інваріантних векторів із (4) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} h_1 &= \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}, \\ h_2 &= \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta e^{h_2} + e^{h_1} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Враховуючи, що $k = 2$, одержуємо систему рівнянь

$$h_1 = 2\ln\frac{\theta e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}},$$
$$h_2 = 2\ln\frac{\theta e^{h_2} + e^{h_1} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}.$$

Ця система має такі розв'язки:

$$\big(h_1^{(i)}, 0\big), \quad \big(0, h_1^{(i)}\big), \quad \big(-h_1^{(i)}, -h_1^{(i)}\big), \quad (0,0), \quad i = 1,2,$$

де

$$h_1^{(i)} = 2\ln x_i, \qquad x_1 = \frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta-1)^2 - 8}}{2}, \qquad x_2 = \frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta-1)^2 - 8}}{2}. \tag{7}$$

У роботах [13, 14] для моделі Ізінга за допомогою трансляційно-інваріантних мір Гіббса на дереві Келі порядку k_0 побудовано нову міру Гіббса на дереві Келі порядку k, $k_0 < k$, названу (k_0)-трансляційно-інваріантною мірою Гіббса. У цьому пункті для моделі Поттса за допомогою трансляційно-інваріантної міри Гіббса на дереві Келі порядку 2 ($k_0 = 2$) подібно до конструкції з [13, 14] доведемо існування нових мір Гіббса на дереві Келі п'ятого порядку, які також назвемо (k_0)-трансляційно-інваріантними.

Справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Для моделі Поттса на дереві Келі п'ятого порядку при* $q = 3$ *і* $\theta = \dfrac{11}{2}$ *існують не менше шести* (2)*-трансляційно-інваріантних мір Гіббса.*

Доведення. Розглянемо дерево Келі п'ятого порядку. Нагадаємо, що для $x \in V^k$ через $S_{k_0}(x)$ позначено довільні k_0, $1 \leq k_0 \leq k$, елементів $S(x)$. Спочатку за допомогою $\big(h_1^{(1)}, 0\big)$ і $\big(h_1^{(2)}, 0\big)$ побудуємо сукупність векторів h_x на V^5, які задовольняють функціональне рівняння (4). Цю сукупність векторів h_x визначимо таким чином:

(l_1) Якщо на вершині $x \in V^5$ маємо $h_x = \big(h_1^{(1)}, 0\big)$, то вершинам $S_4(x)$ зіставимо вектор $h_x = \big(h_1^{(1)}, 0\big)$, а решті вершин $S_1(x)$ — вектор $h_x = \big(h_1^{(2)}, 0\big)$. Якщо на вершині $x \in V^5$ маємо $h_x = \big(h_1^{(2)}, 0\big)$, то вершинам $S_3(x)$ зіставимо вектор $h_x = \big(h_1^{(2)}, 0\big)$, а решті вершин $S_2(x)$ — вектор $h_x = \big(h_1^{(1)}, 0\big)$. В результаті з (4) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} h_1^{(1)} &= 4\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + \ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}}, \\ h_1^{(2)} &= 2\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + 3\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Враховуючи, що

$$h_1^{(i)} = 2\ln\frac{\theta e^{h_1^{(i)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(i)}}}, \quad i = 1,2, \tag{9}$$

з (8) маємо

$$2\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}}+\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}=0. \tag{10}$$

Зауважимо, що $h_1^{(i)}=h_1^{(i)}(\theta),\ i=1,2$. Отже, ліва частина (10) залежить лише від θ. При значеннях θ, що задовольняють (10) і $\theta>\theta_{cr}=1+2\sqrt{2}$, сукупність векторів h_x на V^5, побудованих за правилами (l_1), задовольняє функціональне рівняння (4).

З (10) і (9) отримуємо

$$h_1^{(1)}+\frac{h_1^{(2)}}{2}=0. \tag{11}$$

Отже, з (11) і (7) маємо рівняння

$$\left(\frac{\theta-1-\sqrt{(\theta-1)^2-8}}{2}\right)^2=\frac{2}{\theta-1+\sqrt{(\theta-1)^2-8}}.$$

Розв'язком цього рівняння є $\theta=\dfrac{11}{2}$, тобто при $\theta=\dfrac{11}{2}$ сукупність векторів, побудована за правилами (l_1), задовольняє функціональне рівняння (4). Дотримуючись робіт [13, 14], для моделі Поттса міру, що відповідає сукупності векторів і побудована за правилами (l_1), назвемо (2)-трансляційно-інваріантною мірою Гіббса. Аналогічним чином для векторів $h_x=\left(0,h_1^{(i)}\right)$, $i=1,2$, доводимо існування ще однієї (2)-трансляційно-інваріантної міри Гіббса при $\theta=\dfrac{11}{2}$.

Тепер за допомогою $\left(h_1^{(1)},0\right)$, $\left(h_1^{(2)},0\right)$ і $\left(-h_1^{(1)},-h_1^{(1)}\right)$ побудуємо сукупність векторів h_x на V^5, яка задовольняє функціональне рівняння (4). Цю сукупність векторів h_x визначимо таким чином:

(l_2) Якщо на вершині $x\in V^5$ маємо $h_x=\left(-h_1^{(1)},-h_1^{(1)}\right)$, то вершинам $S_2(x)$ зіставимо вектор $h_x=\left(-h_1^{(1)},-h_1^{(1)}\right)$, вершинам $S_2(x)$ — вектор $h_x=\left(h_1^{(1)},0\right)$, а решті вершин $S_1(x)$ — вектор $h_x=\left(h_1^{(2)},0\right)$. Якщо на вершині $x\in V^5$ маємо $\left(h_1^{(1)},0\right)$ або $h_x=\left(h_1^{(2)},0\right)$, то вершинам $S(x)$ зіставимо вектори $\left(h_1^{(1)},0\right)$ і $h_x=\left(h_1^{(2)},0\right)$ за правилами (l_1). В результаті з (4) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
-h_1^{(1)}&=2\ln\frac{(\theta+1)e^{-h_1^{(1)}}+1}{\theta+2e^{-h_1^{(1)}}}+2\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}}+\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}},\\
-h_1^{(2)}&=2\ln\frac{(\theta+1)e^{-h_1^{(1)}}+1}{\theta+2e^{-h_1^{(1)}}},\\
h_1^{(1)}&=4\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}}+\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}},\\
h_1^{(2)}&=2\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}}+3\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Враховуючи (9), із (12) отримуємо рівняння (10), а рівняння (10) має розв'язок $\theta=\dfrac{11}{2}$, тобто при $\theta=\dfrac{11}{2}$ сукупність векторів, побудована за правилами (l_2), задовольняє функціональне рівняння (4). Аналогічним чином для множини векторів $\{(0, h_1^{(1)}),\ (0, h_1^{(2)}),\ (-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)})\}$, $\{(0, h_1^{(1)}),\ (0, h_1^{(2)}),\ (-h_1^{(2)}, -h_1^{(2)})\}$, $\{(h_1^{(1)}, 0),\ (h_1^{(2)}, 0),\ (-h_1^{(2)}, -h_1^{(2)})\}$ можна показати існування ще трьох сукупностей векторів, що задовольняють функціональне рівняння (4).

З викладеного випливає, що при $\theta = \dfrac{11}{2}$ існують шість (2)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса.

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 2.** На дереві Келі порядку $k,\ k \geq 6$, при $\theta = \dfrac{11}{2}$ за допомогою (2)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса, описаних у теоремі 3, можна побудувати міру Гіббса, отриману ART-конструкцією.

Розглянемо дерево Келі порядку $k = a + b + 2,\ a, B \in n$. Нехай

$$B(a, b) = \left\{\theta \in \mathbb{R}_+ : \theta > 1 + 2\sqrt{2}\ \text{ і }\ ah_1^{(1)} + bh_1^{(2)} = 0\right\}.$$

Зауважимо, що множина $B(a, b)$ непорожня, оскільки випадок $a = 2,\ b = 1$ розглянуто в теоремі 2, тобто $\theta = \dfrac{11}{2} \in B(2, 1)$.

Доведемо таку теорему.

Теорема 4. *Для моделі Поттса на дереві Келі порядку* $k = a + b + 2,\ a, b \in n$, *при* $q = 3$ *і* $\theta \in B(a, b)$ *існують не менше шести* (2)*-трансляційно-інваріантних мір Гіббса.*

Доведення. За допомогою $(h_1^{(1)}, 0)$ і $(h_1^{(2)}, 0)$ побудуємо сукупність векторів h_x на V^k, $k = a + b + 2,\ a, b \in n$, яка задовольняє функціональне рівняння (4). Цю сукупність векторів h_x визначимо таким чином:

(l_3) Нехай $k = a + b + 2,\ a, B \in n$. Якщо на вершині $x \in V^k$ маємо $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$, то вершинам $S_{a+2}(x)$ зіставимо вектор $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$, а решті вершин $S_b(x)$ — вектор $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$. Якщо на вершині $x \in V^k$ маємо $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$, то вершинам $S_{b+2}(x)$ зіставимо вектор $h_x = (h_1^{(2)}, 0)$, а решті вершин $S_a(x)$ — вектор $h_x = (h_1^{(1)}, 0)$. В результаті з (4) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} h_1^{(1)} &= (a+2)\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + b\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}}, \\ h_1^{(2)} &= a\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + (b+2)\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Враховуючи (9), із (13) одержуємо

$$a\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + b\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} = 0. \tag{14}$$

Зауважимо, що $h_1^{(1)}$ і $h_1^{(2)}$ залежать від θ і вони дійсні при $\theta > \theta_{cr} = 1 + 2\sqrt{2}$ (див. (19)). Рівняння (14) запишемо у вигляді

$$ah_1^{(1)} + bh_1^{(2)} = 0. \tag{15}$$

Отже, сукупність векторів, побудованих за правилами (l_2), при

$$\theta \in B(a,b) = \left\{\theta \in \mathbb{R}_+ : \theta > 1 + 2\sqrt{2} \ \text{ і } \ ah_1^{(1)} + bh_1^{(2)} = 0\right\}$$

задовольняє функціональне рівняння (4).

Подібно до попереднього випадку для моделі Поттса міру, що відповідає сукупності векторів, побудованих за правилами (l_3), назвемо (2)-трансляційно-інваріантною міра Гіббса. Аналогічним чином для векторів $h_x = \left(0, h_1^{(i)}\right)$, $i = 1, 2$, доводиться існування ще однієї (2)-трансляційно-інваріантної міри Гіббса при $\theta \in B(a,b)$.

Тепер за допомогою $\left(h_1^{(1)}, 0\right)$, $\left(h_1^{(2)}, 0\right)$ і $\left(-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)}\right)$ побудуємо сукупність векторів h_x на V^k, які задовольняють функціональне рівняння (4). Цю сукупність векторів h_x визначимо таким чином:

(l_4) Якщо на вершині $x \in V^k$ маємо $h_x = \left(-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)}\right)$, то вершинам $S_2(x)$ зіставимо вектор $h_x = \left(-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)}\right)$, вершинам $S_a(x)$ — вектор $h_x = \left(h_1^{(1)}, 0\right)$, а решті вершин $S_b(x)$ — вектор $h_x = \left(h_1^{(2)}, 0\right)$. Якщо на вершині $x \in V^k$ маємо $\left(h_1^{(1)}, 0\right)$ або $h_x = \left(h_1^{(2)}, 0\right)$, то вершинам $S(x)$ зіставимо вектори $\left(h_1^{(1)}, 0\right)$ і $h_x = \left(h_1^{(2)}, 0\right)$ за правилами (l_3). В результаті з (4) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
-h_1^{(1)} &= 2\ln\frac{(\theta+1)e^{-h_1^{(1)}}+1}{\theta+2e^{-h_1^{(1)}}} + a\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + b\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}},\\
-h_1^{(2)} &= 2\ln\frac{(\theta+1)e^{-h_1^{(1)}}+1}{\theta+2e^{-h_1^{(1)}}},\\
h_1^{(1)} &= (a+2)\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + b\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}},\\
h_1^{(2)} &= a\ln\frac{\theta e^{h_1^{(1)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(1)}}} + (b+2)\ln\frac{\theta e^{h_1^{(2)}}+2}{\theta+1+e^{h_1^{(2)}}}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Враховуючи (9), із (16) отримуємо рівняння (15), еквівалентне (14). Отже, при $\theta \in B(a,b)$ сукупність векторів h_x, побудована за правилами (l_4), задовольняє функціональне рівняння (4). Аналогічним чином для множини векторів $\left\{\left(0, h_1^{(1)}\right), \left(0, h_1^{(2)}\right), \left(-h_1^{(1)}, -h_1^{(1)}\right)\right\}$, $\left\{\left(0, h_1^{(1)}\right), \left(0, h_1^{(2)}\right), \left(-h_1^{(2)}, -h_1^{(2)}\right)\right\}$, $\left\{\left(h_1^{(1)}, 0\right), \left(h_1^{(2)}, 0\right), \left(-h_1^{(2)}, -h_1^{(2)}\right)\right\}$ можна показати існування ще трьох сукупностей векторів, що задовольняють функціональне рівняння (4).

В результаті одержуємо, що при $\theta \in B(a,b)$ на дереві Келі порядку $k = a + b + 2$, $a, b \in n$, існують шість (2)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса.

Теорему 4 доведено.

5. Вільні енергії для мір Гіббса, отриманих ART-конструкцією, і для (k_0)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса. У цьому пункті обчислимо вільні енергії для мір Гіббса, отриманих ART-конструкцією, і для (k_0)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса моделі Поттса.

У роботі [15] доведено таку теорему, що дає загальний вигляд вільної енергії.

Теорема 5. *Для сукупності векторів, що задовольняють умови* (4), *вільна енергія обчислюється за формулою*

$$E(\beta, h) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n|}\sum_{x\in V_n} a(x), \tag{17}$$

де

$$a(x) = \frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^{q} \ln \left(\sum_{u=1}^{q} \exp\left\{ (J\beta\sigma_i + h_x)\sigma_u \right\} \right). \tag{18}$$

У цій же роботі для трансляційно-інваріантної сукупності векторів вигляду

$$h = \big(\underbrace{h_*, h_*, \ldots, h_*}_{m}, 0, 0, \ldots, 0 \big), \quad m \geq 0, \tag{19}$$

обчислено вільну енергію і розглянуто такі випадки:

Випадок $m = 0$. У цьому випадку маємо $h = \overline{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{q-1}$. З (17) одержуємо

$$E_{TI}(\beta, \overline{0}) = -a(x) = -\frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^{q} \ln \left(\sum_{u=1}^{q} \exp(J\beta\sigma_i\sigma_u) \right) =$$

$$= -\frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^{q} \ln \left(\exp(J\beta) + (q-1)\exp\left(\frac{J\beta}{1-q} \right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{q\beta} q \ln \left(\exp(J\beta) + (q-1)\exp\left(\frac{J\beta}{1-q} \right) \right) =$$

$$= -J - \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + (q-1)\exp\left(\frac{Jq\beta}{1-q} \right) \right).$$

Випадок $m \neq 0$. У цьому випадку для векторів вигляду (19) обчислено вільну енергію:

$$E_{TI}(\beta, m, h_x) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} a(x) = -a(x) =$$

$$= -\frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^{q} \ln \left(\sum_{u=1}^{q} \exp\left\{ (J\beta\sigma_i + h_x)\sigma_u \right\} \right) =$$

$$= -\frac{q-m}{q\beta} \ln \left(m e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1} h_* \right)} + e^{\left(J\beta - \frac{m}{q-1} h_* \right)} + (q-m-1) e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1} h_* \right)} \right) -$$

$$- \frac{m}{q\beta} \ln \left((m-1) e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1} h_* \right)} + e^{\left(J\beta + \frac{q-m}{q-1} h_* \right)} + (q-m) e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1} h_* \right)} \right). \tag{20}$$

5.1. У даному підпункті обчислимо вільну енергію для міри Гіббса, отриманої ART-конструкцією, що відповідає сукупності векторів вигляду (5). Через $E_{\mathrm{ART}}(\beta, \tilde{h})$ позначимо вільну енергію для міри Гіббса, отриманої ART-конструкцією. Тоді з (17) і (18) одержимо

$$E_{\mathrm{ART}}(\beta, \tilde{h}) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} a(x) =$$

$$= -\frac{1}{q\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{|V_n^k| - |V_n^{k_0}|}{|V_n|} \sum_{i=1}^{q} \ln \left(\sum_{u=1}^{q} \exp\left\{ (J\beta\sigma_i + h_x(\mu))\sigma_u \right\} \right) -$$

$$-\frac{1}{q\beta}\lim_{n\to\infty}\frac{|V_n^{k_0}|}{|V_n|}\sum_{i=1}^{q}\ln\left(\sum_{u=1}^{q}\exp\left\{(J\beta\sigma_i+\overline{0})\sigma_u\right\}\right). \tag{21}$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|V_n^{k_0}|}{|V_n^k|}=\frac{k-1}{k_0-1}\lim_{n\to\infty}\frac{(k_0+1)k_0^n-2}{(k+1)k^n-2}=0,$$

то, враховуючи $0\leq a(x)\leq C_b$, отримуємо

$$0\leq\sum_{x\in V_n^{k_0}}a(x)\leq|V_n^{k_0}|C_b.$$

Отже, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n^k|}\sum_{x\in V_n^{k_0}}a(x)=0,$$

звідки

$$E_{\mathrm{ART}}(\beta,\tilde{h})=E(\beta,h_x(\mu)). \tag{22}$$

Зазначимо, що коли в (5) як $h_x(\mu)$ розглянути трансляційно-інваріантну сукупність векторів вигляду (19), то отримаємо

$$E_{\mathrm{ART}}(\beta,\tilde{h})=E_{TI}(\beta,m,h_x), \tag{23}$$

тобто вільна енергія для мір Гіббса, одержаних ART-конструкцією, дорівнює вільній енергії для трансляційно-інваріантних мір Гіббса.

5.2. Тепер для (2)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса, побудованих за правилами (l_1), обчислимо вільну енергію.

Введемо позначення $\overline{h}_i=(h_1^{(i)},0),\ i=1,2$. Через $V_{n,i}^5,\ i=1,2$ (відповідно $W_{n,i}^5,\ i=1,2$) позначимо множини тих вершин V_n (відповідно W_n), яким за правилами (l_1) зіставлено вектори $\overline{h}_i,\ i=1,2$.

Легко обчислити, що

$$|W_{1,1}^5|=4,\quad |W_{2,1}^5|=20=4\cdot5,\quad |W_{3,1}^5|=100=4\cdot5^2,\quad \ldots,\quad |W_{n,1}^5|=4\cdot5^{n-1}.$$

Очевидно, що

$$|V_{n,1}^5|=1+|W_{1,1}^5|+|W_{2,1}^5|+|W_{3,1}^5|+\ldots+|W_{n,1}^5|=1+4\cdot5+4\cdot5^2+\ldots+4\cdot5^{n-1}=5^n.$$

Відомо (див. [4]), що для дерева Келі п'ятого порядку $|V_n|=\dfrac{3\cdot5^n-1}{2}$. Звідси маємо

$$|V_{n,2}^5|=|V_n|-|V_{n,1}^5|=\frac{5^n-1}{2}.$$

Тепер обчислимо вільну енергію:

$$E_{(2)}(\beta,h) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n|}\sum_{x\in V_n} a(x) =$$

$$= -\frac{1}{q\beta}\lim_{n\to\infty}\frac{|V^5_{n,1}|}{|V_n|}\sum_{i=1}^{q}\ln\left(\sum_{u=1}^{q}\exp\{(J\beta\sigma_i+\overline{h}_1)\sigma_u\}\right) -$$

$$-\frac{1}{q\beta}\lim_{n\to\infty}\frac{|V^5_{n,2}|}{|V_n|}\sum_{i=1}^{q}\ln\left(\sum_{u=1}^{q}\exp\{(J\beta\sigma_i+\overline{h}_2)\sigma_u\}\right).$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|V^5_{n,1}|}{|V_n|} = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{|V^5_{n,2}|}{|V_n|} = \frac{1}{3},$$

то вільна енергія (2)-трансляційно-інваріантних мір Гіббса, побудованих за правилами (l_1), має вигляд

$$E_{(2)}(\beta,h) = \frac{2}{3}E_{TI}(\beta,1,\overline{h}_1) + \frac{1}{3}E_{TI}(\beta,1,\overline{h}_2). \tag{24}$$

***Зауваження* 3.** Якщо $\overline{h}_1 = \overline{h}_2$, то відповідна (2)-трансляційно-інваріантна сукупність векторів є трансляційно-інваріантною, і в цьому випадку вільна енергія (2)-трансляційно-інваріантної сукупності векторів дорівнює вільній енергії трансляційно-інваріантної сукупності векторів, тобто виконується рівність

$$E_{(2)}(\beta,h) = E_{TI}(\beta,1,\overline{h}_1).$$

Аналогічним чином можна обчислити вільні енергії, що відповідають (2)-трансляційно-інваріантним мірам Гіббса, отриманим у теоремах 3 і 4.

Література

1. Х. О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, Москва (1992).
2. C. J. Preston, *Gibbs states on countable sets*, Cambridge Tracts Math., **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1974).
3. Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, Москва (1980).
4. U. A. Rozikov, *Gibbs measures on Cayley trees*, World Sci. (2013).
5. N. N. Ganikhodzhaev, *Pure phases of the ferromagnetic Potts model with three states on a second-order Bethe lattice*, Theor. and Math. Phys., **85**, № 2, 1125 – 1134 (1990).
6. N. N. Ganikhodzhaev, *Pure phases of the ferromagnetic Potts model on the Bethe lattice*, Dokl. AN RUz, **6**, 4 – 7 (1992).
7. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **111**, № 1, 109 – 117 (1997).
8. N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *On Potts model with countable set of spin values on Cayley tree*, Lett. Math. Phys., **75**, № 1, 99 – 109 (2006).
9. C. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, *Description of translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree*, J. Stat. Phys., **156**, № 1, 189 – 200 (2014).
10. У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **160**, № 3, 507 – 516 (2009).
11. М. М. Рахматуллаев, *Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **176**, № 3, 477 – 493 (2013).

12. H. Akin, U. A. Rozikov, S. Temir, *A new set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree*, J. Stat. Phys., **142**, № 2, 314 – 321 (2011).
13. М. М. Рахматуллаев, (k_0)*-Периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли*, Докл. АН РУз, **3**, 9 – 12 (2016).
14. M. M. Rahmatullaev, *Ising model on trees:* (k_0)*-non translation-invariant Gibbs measures*, J. Phys.: Conf. Ser., **819**, 012019 (2017); DOI:10.1088/1742-6596/819/1/012019.
15. U. A. Rozikov, M. M. Rahmatullaev, *On free energies of the Potts model on the Cayley tree*, Theor. and Math. Phys., **190**, № 1, 98 – 108 (2017).
16. M. M. Rahmatullaev, *On weakly periodic Gibbs measures for the Potts model with external field on the Cayley tree*, Ukr. Mat. Zh., **68**, № 4, 529 – 541 (2016).
17. M. M. Rahmatullaev, *On weakly periodic Gibbs measures of the Potts model with a special external field on a Cayley tree*, J. Math. Phys., Anal., Geom., **12**, № 4, 302 – 314 (2016).
18. M. M. Rahmatullaev, D. Gandolfo, U. A. Rozikov, J. Ruiz, *On free energies of the Ising model on the Cayley tree*, J. Stat. Phys., **150**, № 6, 1201 – 1217 (2013).
19. У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, *Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **175**, № 2, 300 – 312 (2013).
20. M. M. Rahmatullaev, *The existence of weakly periodic Gibbs measures for the Potts model on the Cayley tree*, Theor. and Math. Phys., **180**, № 3, 1019 – 1029 (2014).

Одержано 03.12.20,
після доопрацювання — 13.05.21