DOI: 10.37863/umzh.v74i1.220

УДК 517.925.7

А. А. Мохонько, А. З. Мохонько (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

ПРО МЕРОМОРФНІ РОЗВ’ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МЕРОМОРФНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

For systems of linear differential equations allowing dimension reduction, we obtain estimates of growth rate for meromorphic vector solutions assuming no additional constraints on the growth order of the system coefficients.

Для системи лінійних диференціальних рівнянь, що допускає зниження розмірності, отримано оцінки зростання мероморфних вектор-розв’язків без обмежень порядку зростання коефіцієнтів системи.

Позначимо через M поле мероморфних у $\mathbb{C}$ функцій. У статті отримано апріорні оцінки мероморфних вектор-розв’язків (м. в.-р.) системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dw_j}{dz} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} w_k, \quad a_{j,k} \in M, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Якщо P — множина полюсів усіх коефіцієнтів системи, то будь-який вектор-розв’язок такої системи має компоненти, що є аналітичними функціями в $\mathbb{C} \setminus P$. Нас цікавлять вектор-розв’язки $W(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z))$, компоненти яких $w_j \in M$, $j = 1, \ldots, n$.

Застосування неванліннівської теорії до аналітичної теорії диференціальних рівнянь добре відомі [1 – 3]. Зокрема, при доведенні теореми 1 ми будемо дотримуватися методу [1]. Новим моментом є відмова від обмежень порядку зростання коефіцієнтів і розв’язків системи. В роботі [1] вивчалися властивості вектор-розв’язків системи (1) у випадку, коли коефіцієнти і компоненти вектор-розв’язків є цілими функціями. Основна ідея доведення [1] полягає в зниженні розмірності системи. Це перетворення приводить до системи з мероморфними коефіцієнтами і мероморфними компонентами вектор-розв’язків (див. (28), (29)). Тому в цій статті будемо припускати, що коефіцієнти і розв’язки системи належать полю M.

Ми використовуємо стандартні позначення з теорії мероморфних функцій [4]. Символи Ландау $O(\ldots)$, $o(\ldots)$ використовуються при $r \to +\infty$.

Зростання функції $f \in M$ описується неванліннівськими характеристиками $m(r, f)$, $T(r, f)$ [4, с. 24 – 27]. Нагадаємо, що

$$\begin{gathered} m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi, \quad \ln^+ x = \max(\ln x, 0), \quad x \geq 0, \\ \ln^+ \left| \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \right| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \ln^+ |x_\nu| + \ln n. \end{gathered} \tag{2}$$

Якщо f — ціла функція, то $T(r, f) = m(r, f)$. Через $D(r, f)$ позначимо будь-яку з характеристик $T(r, f)$, $m(r, f)$. Якщо $f, g \in M$, то [4, с. 44, 45]

$$\begin{gathered} D(r, f + g) \leq D(r, f) + D(r, g) + \ln 2, \quad D(r, f \cdot g) \leq D(r, f) + D(r, g), \\ D\left(r, \frac{f}{g}\right) \leq D(r, f) + D(r, g) + O(1). \end{gathered} \tag{3}$$

Функція $f \in M$ має скінченний порядок зростання $\rho[f]$, якщо

$$\rho = \rho[f] = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln T(r,f)}{\ln r} < +\infty.$$

Далі через E позначаємо деякі множини інтервалів на $[0, +\infty)$, сума довжин яких скінченна ($\operatorname{mes} E < +\infty$).

Якщо $f \in M$, то виконуються такі співвідношення [4, с. 122, 125, 131]:

$$\begin{gathered} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\ln r), \quad \text{якщо} \quad \rho[f] < +\infty, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = o(\ln r), \quad \text{якщо} \quad \rho[f] \le 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{4}$$

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\ln^+ T(r,f) + \ln r), \quad r \notin E, \quad \text{якщо} \quad \rho[f] = +\infty, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Якщо $F(f_1, \ldots, f_n)$ — раціональна функція від $f_1, \ldots, f_n \in M$, $\deg_{f_j} F = k_j$, $j = 1, \ldots, n$, то [5]

$$T(r, F(f_1, \ldots, f_n)) \le \sum_{j=1,\ldots,n} k_j T(r, f_j) + O(1); \tag{6}$$

якщо $R(f_1, \ldots, f_n)$ — поліном від $f_1, \ldots, f_n \in M$, $\deg_{f_j} R = k_j$, $j = 1, \ldots, n$, то

$$m(r, R(f_1, \ldots, f_n)) \le \sum_{j=1,\ldots,n} k_j m(r, f_j) + O(1). \tag{7}$$

Якщо $F(z) = \dfrac{P(z, f(z))}{Q(z, f(z))} = \dfrac{a_{1t} f^t + \ldots + a_{11} f + a_{10}}{a_{2m} f^m + \ldots + a_{21} f + a_{20}}$, де $f, a_{ij} \in M$, $a_{1t}, a_{2m} \not\equiv 0$, $d = \max(m, t)$, до того ж $P(z, w)$ і $Q(z, w)$ взаємно прості як многочлени від w над полем M, то [6]

$$T(r, F) = d\,T(r, f) + O\left(\sum_{i,j} T(r, a_{ij})\right). \tag{8}$$

Якщо $W(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z))$ — м. в.-р. системи (1), то позначимо

$$T(r, W) = \max_{k=1,\ldots,n} T(r, w_k). \tag{9}$$

Нехай матриця коефіцієнтів системи (1) має вигляд

$$A = B_0(z) = \begin{pmatrix} s_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & s_2 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & p_{n-1} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & s_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Позначимо ($j = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, n - j + 1$)

$$d_{jt}(A) = \begin{vmatrix} s_t & p_t & 0 & \ldots & 0 \\ a_{t+1,t} & s_{t+1} & p_{t+1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{t+j-2,t} & a_{t+j-2,t+1} & a_{t+j-2,t+2} & \cdots & p_{t+j-2} \\ a_{t+j-1,t} & a_{t+j-1,t+1} & a_{t+j-1,t+2} & \cdots & s_{t+j-1} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$d_{0,t} \equiv 1, \quad H_j(A) = \sum_{t=1}^{n+1-j} d_{j,t}(A). \tag{12}$$

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 1. *Нехай система* (1), (10) *така, що* ($m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $j = 1, 2, \ldots, n-m-1$)

$$m(r, d_{jt}(A)) = o(m(r, H_{n-m}(A))), \quad r \notin E, \quad t = 1, \ldots, n - j + 1. \tag{13}$$

Тоді існує не більше m лінійно незалежних м. в.-р. $W_k(z) = (w_{1k}(z), \ldots, w_{nk}(z))$, $k = 1, \ldots, m$, системи (1), (10) *таких, що*

$$\ln(r \cdot T(r, W_k)) = o(m(r, H_{n-m}(A))), \quad r \notin E \tag{14}$$

(*швидкість зростання яких обмежена швидкістю зростання коефіцієнтів*).

Зауваження. Застосування більш точних оцінок (4) логарифмічної похідної для важливих підкласів мероморфних функцій приводить до таких тверджень: 1) якщо коефіцієнти системи (1), (10) такі, що

$$\begin{gathered} m(r, d_{jt}(A)) = O(\ln r), \quad j = 1, 2, \ldots, n - m - 1, \quad t = 1, \ldots, n - j + 1, \\ m(r, H_{n-m}(A)) \neq O(\ln r), \end{gathered} \tag{15}$$

то система має не більше m лінійно незалежних м. в.-р. $W_k,\ k = 1, 2, \ldots, m,$ скінченного порядку зростання; 2) якщо

$$\begin{gathered} m(r, d_{jt}(A)) = o(\ln r), \quad j = 1, 2, \ldots, n - m - 1, \quad t = 1, \ldots, n - j + 1, \\ m(r, H_{n-m}(A)) \neq o(\ln r), \end{gathered} \tag{16}$$

то система має не більше m лінійно незалежних м. в.-р. W_k порядку зростання $\rho \leq 1$.

Співвідношення (15) виконуються, наприклад, якщо $d_{jk}(A)$ — раціональні функції, а $H_{n-m}(A)$ — трансцендентна функція. Справді, будь-яка трансцендентна функція зростає швидше, ніж будь-яка раціональна функція [4, с. 49] ((6.26), (6.27)).

***Приклад* 1.** Розглянемо систему $y_1' = y_2,\ y_2' = e^{2z} y_1 + y_2$. Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \exp 2z & 1 \end{pmatrix}$, $d_{11}(A) = 0,\ d_{12} = 1,\ H_2(A) = -e^{2z},\ m(r, H_2(A)) = 2m(r, e^z)$. Тоді [7, с. 25] $m(r, e^z) = \dfrac{r}{\pi}$. Маємо $m(r, H_2(A)) = m(r, H_{2-0}(A)) = 2m(r, e^z) = \dfrac{2r}{\pi},\ 0 = m(r, d_{11}(A)) = m(r, d_{12}(A)) = o(m(r, H_{2-0}(A)))$. У цьому прикладі $n = 2, m = 0$. Тому з теореми випливає, що розглядувана система не має м. в.-р. W таких, що $\ln^+ T(r, W) + \ln r = o(m(r, H_{2-0}(A))),\ r \notin E$. Справді, ця система має два лінійно незалежних м. в.-р.:

$W_1 = \left(e^{e^z},\, e^z e^{e^z}\right)$ і $W_2 = \left(e^{-e^z},\, -e^z e^{-e^z}\right)$. Для цілої функції $\exp\exp z$ виконується [7, с. 26] $T(r, e^{e^z}) = m(r, e^{e^z}) \sim \dfrac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}}$, $r \to +\infty$. Із викладеного і (8) випливає, що $T(r, e^z e^{-e^z}) = T(r, e^{e^z}) + O(T(r, e^z)) \sim \dfrac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}}$, $r \to +\infty$. Тому, враховуючи означення W_1 і W_2, отримуємо $T(r, W_j) \sim \dfrac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}}$, $r \to +\infty$, $j = 1, 2$. Отже, $r \sim \ln(r \cdot T(r, W_j)) \neq o(m(r, H_2(A)))$, $r \to +\infty$, оскільки $m(r, H_2(A)) \sim \dfrac{2r}{\pi}$, $r \to +\infty$.

***Приклад* 2.** Розглянемо систему $y_1' = y_2$, $y_2' = y_2(1 + e^z)$. Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 + e^z \end{pmatrix}$, $H_1(A) = H_{2-1}(A) = 1 + e^z$, $n = 2$, $m = 1$, $m(r, H_1(A)) = m(r, e^z + 1) = m(r, e^z) + O(1) \sim \dfrac{r}{\pi}$, $r \to +\infty$. З огляду на висновки теореми розглядувана система має не більше одного м. в.-р. W, для якого $\ln^+ T(r, W) + \ln r = o(m(r, H_1(A)))$, $r \notin E$. Таким розв'язком є м. в.-р. $W_1 = (1, 0)$. Другим м. в.-р. системи, лінійно незалежним з W_1, є $W_2 = \left(e^{e^z},\, e^z e^{e^z}\right)$. Як зазначено у прикладі 1, $T(r, W_2) \sim \dfrac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}}$, $r \to +\infty$, $\ln^+ T(r, W_2) + \ln r \sim r$, $r \to +\infty$. Тому $r \sim \ln(r \cdot T(r, W_2)) \neq o(m(r, H_1(A)))$, $r \to +\infty$, оскільки $m(r, H_1(A)) \sim \dfrac{r}{\pi}$, $r \to +\infty$.

Розглянемо вектор $h(z) = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, де $h_j \in M$. Позначимо

$$Q_0(A, h) \equiv 1, \quad Q_k(A, h) = \begin{vmatrix} s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \ldots & p_{k-1} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \ldots & s_k - h_k \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Використовуючи (17), записуємо

$$Q_k = -h_k Q_{k-1} + \begin{vmatrix} [1,5] s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \ldots & s_{k-1} - h_{k-1} & p_{k-1} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \ldots & a_{k,k-1} & s_k \end{vmatrix} =$$

$$= -h_k Q_{k-1} - Q_{k-2} h_{k-1} d_{1,k} + \begin{vmatrix} s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \ldots & s_{k-1} & p_{k-1} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \ldots & a_{k,k-1} & s_k \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = d_{k,1}(A) - \sum_{i=0}^{k-1} Q_i(A, h) h_{i+1} d_{k-i-1,i+2}(A), \quad d_{0,k+1}(A) = 1. \tag{18}$$

Лема 1. *Визначник $Q_k(A,h)$ можна записати у вигляді*

$$Q_k(A,h) = d_{k1}(A) - d_{k-1,1}(A)h_k + \sum_{j=0}^{k-2} d_{j1}(A)P_{jk}, \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{19}$$

де $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, P_{jk} — многочлен від функцій h_t і $d_{\nu s}(A)$, $j+1 \leq t \leq k$, $j+2 \leq s \leq k$, $\nu < k$, степеня не більшого за одиницю по кожній із h_t, $d_{\nu s}$.

Доведення. Враховуючи означення (17), (11), маємо ($d_{01} = 1$) $Q_1(A,h) = s_1 - h_1 = d_{11} - d_{01}h_1$, $Q_2(A,h) = d_{21} - d_{11}h_2 - d_{01}(d_{12}h_1 - h_1h_2) = d_{21} - d_{11}h_2 - d_{01}P_{02}$, $Q_3(A,h) = d_{31} - d_{22}h_1 - h_2Q_1(A,h)d_{13} - h_3Q_2(A,h) = d_{31} - d_{21}h_3 + d_{11}(h_2h_3 - h_2d_{13}) + d_{01}(d_{13}h_1h_2 - h_1d_{22} + d_{12}h_1h_3 - h_1h_2h_3) = d_{31} - d_{21}h_3 + d_{11}P_{13} + d_{01}P_{03}$. Умови леми для многочленів P_{02}, P_{13}, P_{03} виконано.

Припустимо, що лему доведено для всіх Q_i, $i = 1, \ldots, k-1$, і доведемо її для Q_k, $k \geq 4$. Підставляючи у (18) розклади Q_i вигляду (19), після простого перетворення отримуємо

$$Q_k = d_{k1} - h_k\left(d_{k-1,1} - d_{k-2,1}h_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-3} d_{j1}P_{j,k-1}\right) - Q_1h_2d_{k-2,3} - Q_0h_1d_{k-2,2} -$$

$$- \sum_{i=2}^{k-2}\left(d_{i1} - d_{i-1,1}h_i + \sum_{j=0}^{i-2} d_{j1}P_{j,i}\right)h_{i+1}d_{k-i-1,i+2} = d_{k1} - h_kd_{k-1,1} -$$

$$- Q_1h_2d_{k-2,3} - Q_0h_1d_{k-2,2} - \sum_{i=2}^{k-2}\sum_{j=0}^{i-2} d_{j1}P_{j,i}h_{i+1}d_{k-i-1,i+2} - \sum_1 - \sum_2 + \sum_3,$$

де

$$\sum_1 = \sum_{j=0}^{k-3} d_{j1}P_{j,k-1}h_k - d_{k-2,1}h_{k-1}h_k \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=0}^{k-2} d_{j1}P^1_{j,k},$$

$$\sum_2 = \sum_{i=2}^{k-2} d_{i1}h_{i+1}d_{k-i-1,i+2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=2}^{k-2} d_{i1}P^2_{i,k},$$

$$\sum_3 = \sum_{i=2}^{k-2} d_{i-1,1}h_ih_{i+1}d_{k-i-1,i+2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=2}^{k-2} d_{i-1,1}P^3_{i-1,k}, \tag{20}$$

$$Q_1h_2d_{k-2,3} = d_{11}h_2d_{k-2,3} - d_{01}h_1h_2d_{k-2,3} \stackrel{\mathrm{df}}{=} d_{11}P^4_{1,k} + d_{01}P^4_{0,k},$$

$$Q_0h_1d_{k-2,2} = d_{01}h_1d_{k-2,2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} d_{01}P^5_{0,k}, \quad d_{01} = 1, \quad Q_0 = 1,$$

$$\sum_{i=2}^{k-2}\sum_{j=0}^{i-2} d_{j1}P_{j,i}h_{i+1}d_{k-i-1,i+2} = \sum_{j=0}^{k-4} d_{j1} \sum_{i=j+2}^{k-2} P_{j,i}h_{i+1}d_{k-i-1,i+2}.$$

Із припущення індукції щодо властивостей многочленів $P_{j,k-1}$ і означень многочленів $P^s_{j,k}$, $s = 1,2,\ldots,5$, $j = 0,1,\ldots,k-2$, випливає, що $P^s_{j,k}$ — деякі многочлени від h_t і $d_{\nu s}$, $j+1 \leq t \leq k$, $j+2 \leq t \leq k$, $\nu < k$, степеня не більшого за одиницю по кожній із h_t, $d_{\nu s}$. Групуючи доданки, що містять d_{j1}, $j = 0,1,\ldots,k-2$, отримуємо

$$\sum_1 + \sum_2 - \sum_3 - Q_1 h_2 d_{k-2,3} - Q_0 h_1 d_{k-2,2} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{j=0}^{k-2} d_{j1} P^*_{j,k}\,, \tag{21}$$

де $P^*_{j,k}$ — деякі многочлени від h_t і $d_{\nu s},\ j+1 \le t \le k,\ j+2 \le t \le k,\ \nu < k$, степеня не більшого за одиницю по кожній із $h_t,\ d_{\nu s}$. Підставляючи (20), (21) у вираз для Q_k і групуючи доданки, що містять $d_{j1},\ j = 0, 1, \ldots, k-2$, отримуємо (19).

***Доведення теореми* 1.** Випадок $m = n - 1$ будемо розглядати в більш загальній формі. Нехай задано систему (1) з коефіцієнтами $a_{kj} \in M$ (умова (10) може не виконуватися). Нехай $\mathrm{Sp}A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = H_1(A)$ — слід матриці A системи (1). Доведемо, що система (1) не має $m + 1 = n$ лінійно незалежних м. в.-р. $W_k,\ k = 1, \ldots, n$, таких, що

$$\max_{k=1,\ldots,n} \ln^+ T(r, W_k) + \ln r = o(m(r, \mathrm{Sp}A)), \quad r \notin E. \tag{22}$$

Припустимо, що існують n лінійно незалежних м. в.-р. $W_k,\ k = 1, \ldots, n$, для яких виконується (22). Тоді $W_k,\ k = 1, \ldots, n,$ — фундаментальна система розв'язків системи (1), і її детермінант $D(z)$ задовольняє рівність $\dfrac{D'(z)}{D(z)} = \mathrm{Sp}A$. Тоді

$$m(r, \mathrm{Sp}A) = m\left(r, \frac{D'(z)}{D(z)}\right) \stackrel{(5)}{=} O(\ln^+ T(r, D) + \ln r), \quad r \notin E. \tag{23}$$

Враховуючи означення $D(z)$ і оцінку (6), отримуємо

$$T(r, D) \le \max_{k=1,\ldots,n} T(r, W_k) + O(1),$$

$$\ln^+ T(r, D) \le \max_{k=1,\ldots,n} \ln^+ T(r, W_k) + O(1).$$

Звідси з урахуванням (23) випливає

$$m(r, \mathrm{Sp}A) = O(\ln^+ T(r, D) + \ln r) = O(\max_{k=1,\ldots,n} \ln^+ T(r, W_k) + \ln r), \quad r \notin E,$$

що суперечить (22).

Припустимо тепер, що в (10) всі $p_j \not\equiv 0,\ j = 1, \ldots, n-1$. Якщо $W = (w_1, \ldots, w_n)$ — нетривіальний м. в.-р. системи (1), (10), то зі структури матриці (10) випливає, що $w_1 \not\equiv 0$.

Нехай $m = 0$. Тоді $n - m = n$,

$$H_{n-m}(A) = H_n(A) = d_{n1}(A). \tag{24}$$

Припустимо, що існує нетривіальний м. в.-р. $W = (w_1, \ldots, w_n)$ системи (1), (10) такий, що

$$\ln^+ T(r, W) + \ln r = o(m(r, H_n(A))), \quad r \notin E. \tag{25}$$

Запишемо систему (1), (10) таким чином:

$$\begin{aligned} &w_1(s_1 - w_1'/w_1) + p_1 w_2 = 0, \\ &w_1 a_{21} + w_2(s_2 - w_2'/w_2) + w_3 p_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &w_1 a_{n1} + \ldots + w_{n-1} a_{n\,n-1} + w_n(s_n - w_n'/w_n) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Ця система має нетривіальний розв'язок. Тому $Q_n(A, h_0) \equiv 0$, де $h_0 = (h_{01}, \ldots, h_{0n})$, $h_{0j} = w_j'/w_j$, $j = 1, \ldots, n$. Із леми 1 випливає, що

$$0 \equiv Q_n(A, h_0) \overset{(19)}{=} d_{n1}(A) - d_{n-1,1}(A)h_{0n} + \sum_{j=0}^{n-2} d_{j1}(A)P_{jn}, \tag{27}$$

де P_{jn} — деякі многочлени від функцій $h_{0t} = w_t'/w_t$, $j+1 \leq t \leq n$, і $d_{\nu s}(A)$, $\nu < n$, $j+2 \leq s \leq n$, степеня не більшого за одиницю по кожній із h_{0t}, $d_{\nu s}$. Тому, враховуючи (24), маємо

$$H_n(A) = d_{n-1,1}(A)h_{0n} - \sum_{j=0}^{n-2} d_{j1}(A)P_{jn}.$$

Із цієї рівності, враховуючи властивості многочленів P_{jn}, отримуємо

$$m(r, H_n(A)) \overset{(7)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \left(r, \frac{w_j'}{w_j}\right) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq t \leq n-j+1}} m(r, d_{jt}) + O(1) \overset{(5),(13)}{\leq}$$

$$\overset{(5),(13)}{\leq} O\left(\sum_{j=1}^{n} \ln^+ T(r, w_j) + \ln r\right) + o(m(r, H_n(A))), \quad r \notin E,$$

тому $m(r, H_n(A)) = O(\ln^+ T(r, W) + \ln r)$, $r \notin E$, що суперечить (25).

Нехай тепер $0 < m < n-1$, $m \in \mathbb{N}$. Припустимо, що існують $m+1$ лінійно незалежні м. в.-р. $W_k(z) = (w_{k1}(z), \ldots, w_{kn}(z))$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, системи (1), (10) такі, що виконується (14). Один із таких $m+1$ розв'язків, наприклад W_0, позначимо через U, $W_0 = U = (u_1, \ldots, u_n) = (w_{01}(z), \ldots, w_{0n}(z))$. Будь-який з решти m розв'язків м. в.-р. позначимо через $W = (w_1, \ldots, w_n)$. Оскільки U — нетривіальний м. в.-р. системи (1), (10), то $u_1 \not\equiv 0$. Опишемо процес переходу від системи (1) з матрицею коефіцієнтів (10) розміру n до системи диференціальних рівнянь з матрицею коефіцієнтів вигляду (10) і розміру $n-1$.

Кожному з m м. в.-р. $W = (w_1, \ldots, w_n)$ системи (1), (10) поставимо у відповідність вектор

$$V = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left(\frac{w_1}{u_1},\, w_2 - \frac{w_1 u_2}{u_1}, \ldots, w_n - \frac{w_1 u_n}{u_1}\right), \quad v_1 = \frac{w_1}{u_1} \not\equiv 0. \tag{28}$$

Із (1), (10) і (28) випливає, що ці m векторів V (28) — розв'язки системи [1] (формули (3.9)–(3.13))

$$\begin{aligned} &v_1' = v_2 p_1/u_1, \\ &v_2' = v_2(s_2 - p_1 u_2/u_1) + p_2 v_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &v_n' = v_2(a_{n2} - p_1 u_n/u_1) + \sum_{k=3}^{n-1} a_{nk} v_k + s_n v_n, \end{aligned} \tag{29}$$

матриця коефіцієнтів якої має вигляд

$$B = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & p_1/u_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & B_1 & & \\ 0 & & & & \end{array}\right), \tag{30}$$

де

$$B_1 = \begin{pmatrix} s_2 - p_1 u_2/u_1 & p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{32} - p_1 u_3/u_1 & s_3 & p_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} - p_1 u_n/u_1 & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & s_n \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Встановимо зв'язок між $d_{j,k-1}(B_1),\ 1 \le j \le n-1,\ 2 \le k \le n-j$, і $d_{jk}(A)$.

Лема 2. *Виконуються співвідношення* $(d_{0,j+2}(A) = 1)$

$$d_{j,k-1}(B_1) = d_{jk}(A), \quad k > 2, \quad 1 \le j \le n-2,$$

$$d_{j1}(B_1) = d_{j2}(A) + \sum_{k=1}^{j} Q_k(A,h) d_{j-k,k+2}(A), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{32}$$

де $h = h_0 = (u_1'/u_1, \ldots, u_n'/u_n) = (w_{01}'/w_{01}, \ldots, w_{0n}'/w_{0n})$.

Доведення. Якщо $k >2$, то перша з рівностей (32) випливає з означень $d_{j,k-1}(B_1)$ і матриці (31). Якщо $k = 2$, то

$$d_{j,1}(B_1) \overset{(30)}{=} d_{j2}(A) - \frac{p_1}{u_1} \begin{vmatrix} u_2 & p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ u_3 & s_3 & p_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_j & a_{j,3} & a_{j,4} & \ldots & p_j \\ u_{j+1} & a_{j+1,3} & a_{j+1,4} & \ldots & s_{j+1} \end{vmatrix} = d_{j2}(A) -$$

$$- \frac{p_1 u_2}{u_1} d_{j-1,3} + \frac{p_1 p_2}{u_1} \begin{vmatrix} u_3 & p_3 & 0 & \ldots & 0 \\ u_4 & s_4 & p_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_j & a_{j,4} & a_{j,5} & \ldots & p_j \\ u_{j+1} & a_{j+1,4} & a_{j+1,5} & \ldots & s_{j+1} \end{vmatrix} = d_{j2} - \frac{p_1 u_2}{u_1} d_{j-1,3} +$$

$$+ \frac{p_1 p_2}{u_1} u_3 d_{j-2,4}(A) - \frac{p_1 p_2}{u_1} p_3 \begin{vmatrix} u_4 & p_4 & 0 & \ldots & 0 \\ u_5 & s_5 & p_5 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_j & a_{j,5} & a_{j,6} & \ldots & p_j \\ u_{j+1} & a_{j+1,5} & a_{j+1,6} & \ldots & s_{j+1} \end{vmatrix} =$$

$$= d_{j2}(A) + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \frac{u_{k+1}}{u_1} p_1 p_2 \ldots p_k d_{j-k,k+2}(A).$$

Відомо [1], що $(-1)^k \dfrac{u_{k+1}}{u_1} p_1 p_2 \ldots p_k = Q_k(A,h),\ h = (u_1'/u_1, \ldots, u_n'/u_n)$. Тому з попереднього випливає (32).

Матриця (31) має вигляд (10). На підставі (29) кожен із m векторів (див. (28))

$$Y_1 = (v_2, v_3, \ldots, v_n) \overset{\text{df}}{=} (v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{1n}) \tag{33}$$

є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$Y_1' = B_1 Y_1 \tag{34}$$

розмірності $n-1$.

Використовуючи один розв'язок $U = (u_1, \ldots, u_n)$ із раніше доступних $m+1$ м. в.-р. системи (1), (10), знижуємо порядок цієї системи на одиницю. В результаті отримуємо систему (34), (31), що має m м. в.-р. вигляду (33). Нехай $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m}$ — отримані вказаним методом м. в.-р. системи (34), (31) (Y_1 — один із цих розв'язків). Із лінійної незалежності $m+1$ м. в.-р. $W_0 = U = (u_1, \ldots, u_n)$, $W_j = (w_{j1}, \ldots, w_{jn})$, $u_1, w_{j1} \not\equiv 0$, $j = 1, \ldots, m$, системи (1), (10) випливає лінійна незалежність m м. в.-р. $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m}$ системи (34), (31) ($Y_1 = (v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{1n})$, $v_{12} \not\equiv 0$). При цьому з (28), (33), (9) і (6) випливає, що

$$T(r, Y_1) \overset{\text{df}}{=} \max_{j=2,3,\ldots,n} T(r, v_j) \overset{(28),(6)}{\leq} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} T(r, w_{i,j}) + O(1). \tag{35}$$

Маємо $W_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in}),\ i = 0, 1, \ldots, m,\ T(r, W_i) \overset{(9)}{=} \max\limits_{j=1,\ldots,n} T(r, w_{ij})$,

$$\sum_{j=1}^{n} T(r, w_{i,j}) \leq n \max_{j=1,\ldots,n} T(r, w_{i,j}) = nT(r, W_i), \tag{36}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} T(r, w_{i,j}) \overset{(36)}{\leq} \sum_{i=0}^{m} nT(r, W_i) \leq n(m+1) \max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i).$$

З останньої нерівності та з (35) випливає, що

$$\max T(r, Y_1) \overset{\text{df}}{=} \max_{t=1,\ldots,m} T(r, Y_{1,t}) = O\left(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i) \right). \tag{37}$$

При перетворенні (28) $m+1$ лінійно незалежних м. в.-р. $W_k(z),\ k = 0, 1, \ldots, m,$ системи (1), (10) переходять в m лінійно незалежних м. в.-р. $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m}$ вигляду (33) системи (34), (31). При цьому виконується оцінка (37).

Використавши розв'язки $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m}$, зменшимо розмірність матриці A ще $m-1$ разів. Отримаємо системи диференціальних рівнянь

$$Y_k' = B_k Y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{38}$$

розмірності $n-k$, де $Y_k = (v_{k,k+1}, v_{k,k+2}, \ldots, v_{k,n})$, а матриця

$$B_k = \begin{pmatrix} s_{k+1} - p_k v_{k-1,k+1}/v_{k-1,k} & p_{k+1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k+2,k+1} - p_k v_{k-1,k+2}/v_{k-1,k} & s_{k+2} & p_{k+2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,k+1} - p_k v_{k-1,n}/v_{k-1,k} & a_{n,k+2} & a_{n,k+3} & \ldots & s_n \end{pmatrix}, \tag{39}$$

причому повторне застосування оцінки (37) м. в.-р. системи (38) на кожному кроці зниження порядку системи дає $(k = 1, \ldots, m)$

$$\max T(r, Y_k) \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{t=1,2,\ldots,m-k+1} T(r, Y_{k,t}) = O\left(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\right). \tag{40}$$

Мероморфному вектор-розв'язку $Y_k = (v_{k,k+1}, v_{k,k+2}, \ldots, v_{k,n})$, системи (38), (39) поставимо у відповідність вектор $h_k = (h_{k,k+1}, h_{k,k+2}, \ldots, h_{k,n})$, де $h_{k,k+p} = v'_{k,k+p}/v_{k,k+p}$, $p = 1, 2, \ldots, n-k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Зокрема, $h_{m-1} = (h_{m-1,m}, h_{m-1,m+1}, \ldots, h_{m-1,m+i}, \ldots \ldots, h_{m-1,n})$, де $(i+1)$-й елемент цього вектора має вигляд $h_{m-1,m+i} = v'_{m-1,m+i}/v_{m-1,m+i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-m$.

Із (5) випливає, що $(r \notin E)$

$$m(r, h_{k,k+p}) = m\left(r, \frac{v'_{k,k+p}}{v_{k,k+p}}\right) = O(\ln^+ T(r, v_{k,k+p}) + \ln r) \overset{(9)}{=}$$

$$\overset{(9)}{=} O\left(\ln^+ \left(\max_{t=1,2,\ldots,m-k+1} T(r, Y_{k,t})\right) + \ln r\right) \overset{(40)}{=}$$

$$\overset{(40)}{=} O\left(\ln^+ \left(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\right) + \ln r\right), \quad p = 1, 2, \ldots, n-k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{41}$$

Нам знадобиться така лема.

Лема 3. *Справджується рівність* $(j \in \mathbb{N},\ j \le n-m)$

$$d_{j1}(B_m) = d_{j,m+1}(A) + d_{j,m}(A) + \ldots + d_{j,1}(A) + \tilde{P}_{mj}, \tag{42}$$

$\tilde{P}_{mj} = \tilde{P}_{mj}(h_{k,k+p}, d_{\nu,s}(A))$ — *многочлени від* $h_{k,k+p}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $p = 1, 2, \ldots, j$, *і* $d_{\nu,s}(A)$, $s = 1, 2, \ldots, m+j$, $\nu \le j-1$, *степеня не більшого за одиницю від кожної з функцій* $h_{k,k+p}$, $d_{\nu,s}(A)$.

Продовжимо доведення теореми. Знижуючи розмірність матриці A, ми використали m м. в.-р., а за припущенням їх $m+$ 1. Отже, система $Y'_m = B_m Y_m$ (див. (38), (39)) має один нетривіальний м. в.-р. $Y_m = (v_{m,m+1}, v_{m,m+2}, \ldots, v_{m,n})$, для якого виконується рівність (див. (40))

$$T(r, Y_m) = O\left(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\right). \tag{43}$$

Перетворимо систему $Y'_m = B_m Y_m$ до вигляду, аналогічного (26). Отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею $Q_{n-m}(B_m, h_m)$ (див. (17)), що має нетривіальний розв'язок $Y_m = (v_{m,m+1}, v_{m,m+2}, \ldots, v_{m,n})$. Тому $Q_{n-m}(B_m, h_m) \equiv 0$. Звідси, враховуючи (18), отримуємо $\Big(h_m = (h_{m,m+1}, h_{m,m+2}, \ldots, h_{m,m+i}, \ldots, h_{m,n})$, $h_{m,m+i} = \dfrac{v'_{m,m+i}}{v_{m,m+i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-m$, $Q_0(B_m, h_m) = 1$, $d_{0,n-m+1}(B_m) = 1\Big)$

$$d_{n-m,1}(B_m) = h_{m,n} Q_{n-m-1}(B_m, h_m) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-m-2} Q_i(B_m, h_m) h_{m,m+i+1} d_{n-m-i-1,i+2}(B_m). \tag{44}$$

Застосуємо до $Q_i(B_m, h_m),\ i \le n-m-1$, лему 1 (див. (19)), а до $d_{j1}(B_m),\ j \le n-m-1$, формулу (42). Враховуючи, що $d_{j,t}(B_m) = d_{j,m+t}(A)$ при $t \ge 2$ і $j = 1, 2, \ldots, n-m$ (див. (39)), отримуємо

$$d_{n-m,1}(B_m) \overset{(44)}{=} P(d_{\nu,s}(A), h_{m,m+p}), \tag{45}$$

де P — многочлен степеня не більшого за одиницю від $d_{\nu,s}(A),\ \nu < n-m,\ s = 1, 2, \ldots, n$, і $h_{m,m+p},\ p = 1, 2, \ldots, n-m$. Із (42) при $j = n-m$ випливає, що

$$d_{n-m,1}(B_m) = d_{n-m,m+1}(A) + d_{n-m,m}(A) + \ldots + d_{n-m,1}(A) + \tilde{P}_{m,n-m}, \tag{46}$$

$\tilde{P}_{m,n-m} = \tilde{P}_{m,n-m}(h_{k,k+p}, d_{\nu,s}(A))$ — многочлен від $h_{k,k+p},\ k = 0, 1, \ldots, m-1,\ p = 1, 2, \ldots, n-m$, і $d_{\nu,s}(A),\ s = 1, 2, \ldots, n,\ \nu \le n-m-1$, степеня не більшого за одиницю від кожної з функцій $h_{k,k+p},\ d_{\nu,s}(A)$. Враховуючи означення $H_{n-m}(A)$ (12), а також рівності (45), (46) і властивості многочленів $P(d_{\nu,s}(A), h_{m,m+p}), \tilde{P}_{m,n-m}$, отримуємо

$$H_{n-m}(A) = d_{n-m,m+1}(A) + d_{n-m,m}(A) + \ldots + d_{n-m,1}(A) = R_{m,n-m}, \tag{47}$$

$R_{m,n-m} = R_{m,n-m}(h_{k,k+p}, d_{\nu,s}(A))$ — многочлени від $h_{k,k+p},\ k = 0, 1, \ldots, m,\ p = 1, 2, \ldots, n-m$, і $d_{\nu,s}(A),\ s = 1, 2, \ldots, n,\ \nu \le n-m-1$, степеня не більшого за одиницю по кожній змінній.

Із рівності (47), враховуючи властивості многочленів $R_{m,n-m}$ і співвідношення (7), (41), маємо ($r \notin E$)

$$m(r, H_{n-m}(A)) \overset{(7)}{\le} \sum_{\substack{k=0,1,\ldots,m \\ p=1,2,\ldots,n-m}} m(r, h_{k,k+p}) + \sum_{\substack{s=1,2,\ldots,n \\ \nu \le n-m-1}} m(r, d_{\nu,s}(A)) + O(1) \overset{(41),(13)}{=}$$

$$\overset{(41),(13)}{=} O\left(\ln^+\left(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\right) + \ln r\right) + o(m(r, H_{n-m}(A))).$$

Звідси отримуємо $m(r, H_{n-m}(A)) = O\left(\ln^+\left(\max\limits_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\right) + \ln r\right),\ r \notin E$, що суперечить (14). Випадок, коли в (10) деякі з $p_j \equiv 0$, розглядається аналогічно [1].

***Доведення леми* 3.** Так само, як і в (32), виразимо $d_{j1}(B_m)$ через визначники матриці B_{m-1}. Використовуючи (18) і (32), отримуємо ($B_0 = A,\ d_{0,j+2}(B_{m-1}) = 1$ (див. (12), (10)))

$$d_{j1}(B_m) = d_{j2}(B_{m-1}) + Q_j(B_{m-1}, h_{m-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) d_{j-i,i+2}(B_{m-1}). \tag{48}$$

Враховуючи (17), маємо

$$Q_0(A, h) \equiv 1, \qquad Q_1(A, h) = s_1 - h_1 = d_{11}(A) - h_1,$$

$$Q_2(A, h) = d_{21}(A) - d_{11}(A) h_2 - d_{01}(A)(d_{12}(A) h_1 + h_1 h_2),$$

тому

$$Q_0(B_{m-1}, h_{m-1}) \equiv 1, \quad Q_1(B_{m-1}, h_{m-1}) = d_{11}(B_{m-1}) - h_{m-1,m},$$

де $h_{m-1} = (h_{m-1,m}, h_{m-1,m+1}, \ldots, h_{m-1,n}),\ h_{m-1,m+i} = \dfrac{v'_{m-1,m+i}}{v_{m-1,m+i}},\ i = 0, 1, \ldots, n-m.$ Тому $(d_{0,j+1}(B_{m-1}) = 1)$

$$\begin{gathered} Q_j(B_{m-1}, h_{m-1}) \overset{(18)}{=} d_{j,1}(B_{m-1}) - h_{m-1,m} d_{j-1,2}(B_{m-1}) - \\ - (d_{11}(B_{m-1}) - h_{m-1,m}) h_{m-1,m+1} d_{j-2,3}(B_{m-1}) - \\ - \sum_{i=2}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}) \overset{(19)}{=} \\ \overset{(19)}{=} d_{j,1} - h_{m-1,m} d_{j-1,2} - (d_{11} - h_{m-1,m}) h_{m-1,m+1} d_{j-2,3} - \\ - \sum_{i=2}^{j-1} \left(d_{i1} - d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} + \sum_{t=0}^{i-2} d_{t1} P_{ti} \right) h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}, \end{gathered} \tag{49}$$

де $d_{t1} = d_{t1}(B_{m-1}),\ P_{ti} = P_{ti}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1}))$ — деякі многочлени від $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1}),\ p = t+1, t+2, \ldots, i,\ s = t+2, t+3, \ldots, i,\ \nu \le i-1,\ i = 2, 3, \ldots, j-1,$ $t = 0, 1, \ldots, i-2,$ степеня не більшого за одиницю по кожній із $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1})$. Групуючи в (49) доданки, що містять $d_{i1} = d_{i1}(B_{m-1}),\ i = 0, 1, \ldots, j-1,$ отримуємо $(d_{0i} = 1)$

$$Q_j(B_{m-1}, h_{m-1}) = d_{j,1}(B_{m-1}) + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i1}(B_{m-1}) P^*_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1})), \tag{50}$$

де $P^*_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1}))$ — деякі многочлени від $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1}),\ p = i+ +1, i+2, \ldots, j,\ s = i+2, i+3, \ldots, j,\ \nu \le j-1,\ i = 0, 1, \ldots, j-1,$ степеня не більшого за одиницю по кожній із $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1})$.

Перетворимо суму в правій частині (48) $(Q_1(B_{m-1}, h_{m-1}) = d_{11} - h_{m-1,m})$:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) \overset{(19)}{=} (d_{11} - h_{m-1,m}) d_{j-1,3} + \\ + \sum_{i=2}^{j-1} \left(d_{i1} - d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} + \sum_{t=0}^{i-2} d_{t1} P_{ti} \right) d_{j-i,i+2} = \\ = \sum_{i=0}^{j-1} d_{i1}(B_{m-1}) P^{\star}_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1})), \quad d_{01}(B_{m-1}) = 1, \end{gathered} \tag{51}$$

$P_{ti} = P_{ti}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1}))$ — різні многочлени від $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1})$ степеня не більшого за одиницю по кожній змінній, $p = t+1, t+2, \ldots, i,\ s = t+2, t+3, \ldots, i,$ $\nu \le i-1,\ i = 2, 3, \ldots, j-1,\ t = 0, 1, \ldots, i-2;\ P^{\star}_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1}))$ — різні многочлени від $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1})$ степеня не більшого за одиницю по кожній із $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1}),\ p = i+1, i+2, \ldots, j,\ s = i+2, i+3, \ldots, j+1,\ \nu \le j-1,\ i = 1, 2, \ldots, j-1.$

Підставляючи (50) і (51) у (48), групуючи доданки з $d_{i1}(B_{m-1}),\ i = 1, 2, \ldots, j-1,$ отримуємо

$$d_{j1}(B_m) = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j2}(B_{m-1}) + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i1}(B_{m-1})P_{ij},$$

$P_{ij} = P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1}))$ — многочлени від $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1})$ степеня не більшого за одиницю по кожній із $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(B_{m-1})$, $p = i+1, i+2, \ldots, j$, $s = i+2, i+ +3, \ldots, j+1$, $\nu \le j-1$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$. Але (див. (39), (31), (11)) $d_{\nu,s}(B_{m-1})) = d_{\nu,m+s-1}(A)$ при $s \ge 2$. Тому

$$d_{j1}(B_m) = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j,m+1}(A) + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i1}(B_{m-1})P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A)), \tag{52}$$

$P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A))$ — многочлени від $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,m+s-1}(A)$ степеня не більшого за одиницю по кожній із $h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,m+s-1}(A)$, $p = i+1, i+2, \ldots, j$, $s = = i+2, i+3, \ldots, j+1$, $\nu \le j-1$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$.

Доведемо формулу (42). Якщо $m = 1$, то з (52) маємо ($B_0 = A$, $h_0 = (w'_{01}/w_{01}, \ldots \ldots, w'_{0n}/w_{0n})$, $h_{0,p} = w'_{0p}/w_{0p}$ (див. (32)))

$$d_{i1}(B_1) = d_{i,1}(A) + d_{i,2}(A) + \sum_{t=0}^{i-1} d_{t1}(A)P_{ti}(h_{0,p}; d_{\nu,s}(A)) =$$
$$= d_{i,1}(A) + d_{i,2}(A) + \tilde{P}_{1i}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \le n-1,$$

$\tilde{P}_{1i}$ — многочлен по $h_{0,p}$ і $d_{\nu,s}(A)$, $p = 1, 2, \ldots, i$, $s = 1, 2, \ldots, i+1$, $\nu < i$, степеня не більшого за одиницю по кожній із функцій.

Нехай для всіх $i \in \mathbb{N}$, $i \le j \le n-m$, $2 \le m$, справджується рівність

$$d_{i1}(B_{m-1}) = d_{i,1}(A) + d_{i,2}(A) + \ldots + d_{i,m}(A) + \tilde{P}_{m-1,i}, \quad i \le n-m, \tag{53}$$

$\tilde{P}_{m-1,i}$ — многочлен від h_{0p}, $h_{1,p+1}, \ldots, h_{m-2,m-2+p}$ і $d_{\nu,s}(A)$, $p = 1, 2, \ldots, i$, $s = 1, 2, \ldots, i+ + m-1$, $\nu < i$, степеня не більшого за одиницю по кожній із $h_{k,k+t}$ і $d_{\nu,s}(A)$.

Підставляючи (53) у (52), отримуємо

$$d_{j1}(B_m) = d_{j,1}(A) + d_{j,2}(A) + \ldots + d_{j,m}(A) + d_{j,m+1}(A) + \tilde{P}_{m-1,j} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{j-1} (d_{i,1}(A) + \ldots + d_{i,m}(A) + \tilde{P}_{m-1,i}) P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A)) =$$
$$= d_{j,1}(A) + d_{j,2}(A) + \ldots + d_{j,m+1}(A) + \tilde{P}_{m,j},$$

$\tilde{P}_{m,j}$ — многочлен від h_{0p}, $h_{1,p+1}, \ldots, h_{m-1,m-1+p}$ і $d_{\nu,s}(A)$, $p = 1, 2, \ldots, j$, $s = 1, 2, \ldots, j+m$, $\nu < j$, степеня не більшого за одиницю по кожній із $h_{k,k+t}$ і $d_{\nu,s}(A)$. Тут ми врахували, що $\tilde{P}_{m-1,i}$ містить $d_{\nu,s}(A)$ з індексами $s = 1, 2, \ldots, i+m-1$, а $P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A))$ — $d_{\nu,m+s-1}(A)$ з індексами $s = i+2, i+3, \ldots, j+1$. Далі, $\tilde{P}_{m-1,i}$ містить також h_{0p}, $h_{1,p+1}, \ldots \ldots, h_{m-2,m-2+p}$ при $p = 1, 2, \ldots, i$, а $P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A))$ — $h_{m-1,m-1+p}$ з індексами $p = i+1, i+2, \ldots, j$.

Література

1. W. Hengartner, *Über die Wachstumsordnung eines linearen Systems von Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten*, Comment. math. helv., **42**, № 1, 60 – 80 (1967).
2. N. Steinmetz, *Nevanlinna theory, normal families, and algebraic differential equations*, Springer Intern. Publ. AG (2017).
3. А. А. Мохонько, *Теорема Мальмквиста для решений дифференциальных уравнений в окрестности логарифмической особой точки*, Укр. мат. журн., **56**, № 4, 476 – 483 (2004).
4. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, Москва (1970).
5. А. З. Мохонько, В. Д. Мохонько, *Оценки неванлинновских характеристик некоторых классов мероморфных функций и их приложения к дифференциальным уравнениям*, Сиб. мат. журн., **15**, № 6, 1305 – 1322 (1974).
6. А. З. Мохонько, *Поле алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик*, Сиб. мат. журн., **22**, № 3, 213 – 218 (1981).
7. У. К. Хейман, *Мероморфные функции*, Мир, Москва (1966).

Одержано 24.09.21