Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 4, 574 – 593
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-4-7

Локальна поведінка відображень метричних просторів з розгалуженням

Сергій О. Скворцов

(*Представлена В.Я. Гутлянським*)

Анотація. Одним з найпотужніших інструментів дослідження відображень є метод модулів сімей кривих. На сьогодні оцінки спотворення модуля встановлено майже для всіх відомих класів, зокрема, конформних і квазіконформних відображень, відображень з обмеженим спотворенням, відображень зі скінченним спотворенням тощо. Оцінки спотворення модуля сімей кривих дозволяють досліджувати різноманітні задачі сучасного аналізу, зокрема, значно полегшують вивчення локальної і межової поведінки як гомеоморфізмів, так і відображень з розгалуженням. В даній статті йдеться про один з можливих типів спотворення модуля при відображенні, а саме, коли модуль сімей кривих в прообразі при відображенні оцінюється ваговим модулем образу відповідної сім'ї кривих. Такі оцінки добре відомі в класичній теорії (зокрема, у квазіконформному аналізі), але їх роль не достатньо досліджена у випадку необмежених ваг. Подібні оцінки ми розглядаємо в метричному просторі, де їх застосування на даний момент також не дуже поширене. Оскільки за наявності оберненого відображення вказане спотворення модуля еквівалентне ваговій нерівності Полецького для оберненого відображення, природньо вважати їх "оберненими нерівностями Полецького", як це і пропонується в тексті. Щодо даного рукопису, він присвячений водночас як розвитку модульної техніки, так і дослідженню відображень просторів, що можуть бути не евклідовими. Центральне місце займає питання про локальну поведінку одного класу відображень метричних просторів. Розглядається випадок, коли вихідний метричний простір задовольняє умову слабкої сферікалізації, що є аналогом ріманової сфери (розширеного евклідового простору), а відображений простір є локально лінійно зв'язним. Отримана одностайна неперервність відповідних сімей відображень деякої області зі слабко плоскою межею на фіксовану область з компактним замиканням за умови, що відповідна вага у ключовій нерівності інтегровна. Методологія роботи, крім методу модулів, істотно спирається на метод піднять сімей кривих, який дозволяє досліджувати саме відображення з розгалуженням. Після вступу і формулювання основного результату доводиться основна лема про підняття, яка узагальнює одне класичне твердження Мартіо–Рікмана–Вяйсяля для евклідового простору. Доведення основного результату відбувається від супротивного і розташовано одразу по закінченню доведення леми. Робота завершується наведенням чотирьох прикладів, два з котрих відносяться до евклідового простору, а два інших – до фактор-просторів одиничного круга по розривній групі дробово-лінійних автоморфізмів без нерухомих точок.

2010 MSC. 30C65, 30L10, 30C62, 31B15.

Ключові слова та фрази. Відображення з обмеженим і скінченним спотворенням, модулі сімей кривих, локальна поведінка відображень, нерівність Полецького.

1. Вступ

Робота присвячена вивченню відображень з обмеженим і скінченним спотворенням, які активно вивчаються останнім часом, див., наприклад, [1–7] і [8]. Водночас робота присвячена вивченню відображень метричних просторів, які мають скінченне спотворення, див., напр., [9–15] і [16].

Добре відомо, що в теорії квазіконформних відображень і їх узагальнень велике значення мають оцінки спотворення модуля M сімей кривих вигляду

$$M(f(\Gamma))\leqslant \int\limits_{D\cap A(x_0,r_1,r_2)} Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,, \tag{1.1}$$

де $0<r_1<r_2<\infty$, Γ – сім'я кривих, що з'єднують $S(x_0,r_1)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-x_0|=r_1\}$ і $S(x_0,r_2)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-x_0|=r_2\}$ в $A\cap D$, $A=\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<|x-x_0|<r_2\}$, Q – фіксована вимірна за Лебегом функція (як правило, безпосередньо обчислюється по відображенню f), а η – довільна вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову $\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(t)\,dt\geqslant 1$ (див., напр., [3, співвідношення (7.5)], [7, теорема 6.10]). Співвідношення (1.1) можна розглядати як вагову модульну нерівність (див. [17]). Якщо ж ми припустимо відображення f гомеоморфним і розглянемо обернене відображення $g=f^{-1}$, то нерівність (1.1) можна записати і по-іншому, а саме,

$$M(\Gamma^*)\leqslant \int\limits_{D\cap A(x_0,r_1,r_2)} Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,, \tag{1.2}$$

де Γ^* складається з тих і тільки тих кривих, образ яких при відображенні g з'єднує сфери $S(x_0,r_1)$ і $S(x_0,r_2)$ у кільці $A(x_0,r_1,r_2)$. Властивості відображень g з останньої нерівності (1.2), взагалі кажучи,

Стаття надійшла в редакцію 02.07.2020

відрізняються від властивостей відображень f у (1.1). Зокрема, одностайна неперервність сімей відображень g не переноситься на сім'ї відповідних обернених відображень f, і навпаки (див., напр., [18, приклад 6.1]). По аналогії з гомеоморфізмами можна також розглядати відображення g з розгалуженням, і які задовольняють (1.2). Таких відображень достатньо багато як в класичних класах квазірегулярних відображень (див., напр., [1, теорема 3.2] або [2, теорема 6.7.II]), так і в сучасних класах відображень зі скінченним спотворенням довжини і площі (див., напр., [7, теорема 6.1], [3, теорема 8.5, лема 10.1]).

Сформулюємо тепер основні цілі, яки ми ставимо при викладенні даної статті. Нещодавно був отриманий результат стосовно локальної поведінки відображень метричних просторів для гомеоморфізмів, що задовольняють обернену нерівність Полецького (див. [19, 20] та [18]). Наразі ми пропонуємо відмовитись від гомеоморфності, як це було у всіх згаданих працях, і розглянемо тільки відкриті та дискретні відображення. Як і в [19, 20], ми проводимо наші дослідження за умови інтегровності функції Q в (1.2). Зауважимо, що евклідів випадок відображень з розгалуженням у (1.2) частково досліджено в [21, теорема 1.1].

Звернемося до означень. Скрізь далі, (X, d, μ) і (X', d', μ') – метричні простори з метриками d і d' і локально скінченними борелевими мірами μ і μ', відповідно. *Кривою* γ в X називається неперервне відображення $\gamma : I \to X$, де $I = [a, b], (a, b), [a, b)$ або $(a, b]$. *Довжина кривої* $\gamma : [a, b] \to X$ визначається рівністю

$$l(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))\,,$$

де sup береться по всіх можливих розбиттях $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n := b$. Якщо $l(\gamma) < \infty$, то крива називається спрямлюваною і, отже, коректно визначена функція довжини $s_\gamma(t)$, що позначає довжину кривої $\gamma|_{[a,t]}$, $t \in [a, b]$. У цьому випадку має місце зображення

$$\gamma(t) = \gamma^0 \circ s_\gamma(t),$$

де γ^0 називається *нормальним представленням* кривої γ, див. [22, розділ 7]. Інтегралом від борелевої функції $\rho : X \to [0, \infty]$ по спрямлюваній кривій γ називається величина

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| = \int\limits_{0}^{l(\gamma)} \rho(\gamma^0(t))\,dt\,.$$

Образом кривої α в X будемо називати множину $|\alpha| = \{x \in X : \exists\, t \in [a,b] : \alpha(t) = x\}$. Множину A у метричному просторі X будемо називати *лінійно зв'язною*, якщо будь-які дві точки $x_1, x_2 \in A$ можна з'єднати кривою, що лежить в A (див. розд. 13.2 в [3]). *Областю* D в X називається відкрита лінійно зв'язна множина в X, іншими словами, D – область в X тоді і тільки тоді, коли D відкрита і, крім того, будь-які дві точки $x_1, x_2 \in D$ можна з'єднати кривою γ, що цілком лежить в D.

Сім'єю кривих Γ називається довільна множина кривих γ. Борелева функція $\rho : X \to [0, \infty]$ називається *допустимою* для сім'ї Γ кривих γ в X, якщо $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant 1$ для всіх (локально спрямлюваних) кривих $\gamma \in \Gamma$. Якщо ρ допустима для Γ, то ми пишемо $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Модулем сім'ї кривих Γ порядку $p \geqslant 1$ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{X} \rho^p(x)\, d\mu(x)\,. \tag{1.3}$$

Якщо $\operatorname{adm}\Gamma = \varnothing$, покладемо: $M_p(\Gamma) = \infty$. Для заданих множин E і F, що лежать в області D простору X, позначимо через $\Gamma(E, F, D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a,b] \to X$ таких, що $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при всіх $t \in [a,b]$.

Наступна конструкція відіграє роль ріманової сфери у метричних просторах. Покладемо $\overline{X} := X \cup \{\infty\}$, і нехай $h : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}$ – деяка метрика. Будемо говорити, що h задовольняє умову *слабкої сферикалізації,* якщо $(\overline{X}, h)$ – компактний метричний простір, крім того, h і d породжують однакову топологію на X. Метричний простір X називається *простором, що допускає слабку сферикалізацію*, якщо існує хоча б одна така метрика $h : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}$. Якщо не сказане протилежне, то поняття околу точки, а також множини ∂E і $\overline{E}$, що відносяться до довільної множини $E \subset X$ (або $E \subset \overline{X}$) за означенням асоційовані із топологією простору $\overline{X}$ у випадку, коли X допускає слабку сферикалізацію. Збіжність в X та $\overline{X}$ також буде розумітися в сенсі метрики h.

Тут і надалі α та α' позначають хаусдорфові розмірності просторів X та X' відповідно, якщо не сказане протилежне. Простір X називається *локально лінійно зв'язним,* якщо для кожної точки $x_0 \in X$ і довільного її околу U знайдеться лінійно зв'язний окіл $V \subset U$ точки x_0 (іншими словами, будь-які дві точки $x_1, x_2 \in V$ можна з'єднати кривою, що цілком лежить в V).

Згідно до [15, розд. 9], простір X будемо називати *слабко плоским* в точці $x_0 \in X$, якщо для будь-якого околу U точки x_0 і кожного

$P > 0$ знайдеться окіл V цієї точки, що міститься в U, такий, що

$$M_\alpha(\Gamma(E,F,X)) \geqslant P$$

для будь-яких континуумів $E, F \subset X$, що задовольняють умову $E \cap \partial U = \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U = \varnothing \neq F \cap \partial V$, див. [3, розд. 13.9]. Простір X будемо називати *слабко плоским*, якщо вказана властивість виконується для кожного $x_0 \in X$. Якщо простір X допускає слабку сферикалізацію, то для області $G \subset \overline{X}$ і множин $E, F \subset G$ покладемо

$$M_\alpha(\Gamma(E,F,G)) := M_\alpha(\Gamma(E\setminus\{\infty\}, F\setminus\{\infty\}, G\setminus\{\infty\}))\,.$$

Більше того, для сім'ї кривих Γ на $\overline{X}$ покладемо $M_\alpha(\Gamma) = M_\alpha(\Gamma^*)$, де за означенням Γ^* складається з тих і тільки тих кривих сім'ї Γ, що не проходять через точку ∞. У цьому випадку, розуміння слабкої плоскості, що стосується X, дослівно можна перенести на довільну область $G \subset \overline{X}$. Нехай $y_0 \in X'$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ і

$$A = A(y_0, r_1, r_2) = \left\{y \in X' : r_1 < d'(y, y_0) < r_2\right\}\,. \tag{1.4}$$

Якщо $f : D \to X'$ – задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} d'(y, y_0)$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ ми позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S_1, S_2, A)$, де

$$S_i = \{y \in D' : d'(y, y_0) = r_i\}, \quad i = 1, 2\,,$$

а множина A визначена в (1.4). Нехай $Q : X' \to [0, \infty]$ – вимірна функція. Будемо говорити, що $f : D \to X'$ *задовольняє обернену нерівність Полецького* в точці $y_0 \in f(D)$, якщо співвідношення

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{f(D)\cap A(y_0,r_1,r_2)} Q(y)\cdot \eta^{\alpha'}(d'(y, y_0))\, d\mu'(y) \tag{1.5}$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,.$$

Сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : X \to X'$ називається *одностайно неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ таке, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $x \in X$ таких, що $d(x, x_0) < \delta$ і для всіх $f \in \mathfrak{F}$. Сім'я $\mathfrak{F}$ *одностайно неперервна*, якщо $\mathfrak{F}$

одностайно неперервна в кожній точці $x_0 \in X$. Наступне твердження можна знайти в [14, пропозиція 2.1])

Відображення $f : D \to X'$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in X'$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в X'. Будемо говорити, що область $D \subset X$ *задовольняє умову* $\boldsymbol{A}$, якщо будь-які дві пари точок $a \in D, b \in \overline{D}$, і $c \in D, d \in \overline{D}$ можна з'єднати непересічними кривими C_1 і C_2 в області D. Зауважимо, що таку умову задовольняють довільні області евклідового простору, локально зв'язні на своїй межі (див. [20, пропозиція 1]).

Припустимо, X допускає слабку сферикалізацію. Тоді для областей $D \subset \overline{X}$, $D' \subset X'$ і довільної вимірної функції $Q : X' \to [0, \infty]$ позначимо через $\mathfrak{F}_Q(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень f області D на область D' таких, що співвідношення (1.5) виконується для кожної точки $y_0 \in D'$. Основним результатом даної статті є наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай* (X, d, μ) *і* (X', d', μ') *– метричні простори з хаусдорфовими розмірностями* $2 \leqslant \alpha, \alpha' < \infty$, X' *– локально лінійно зв'язний простір, а* X *допускає слабку сферикалізацію, причому відповідний простір* $(\overline{X}, h)$ *є локально зв'язним. Нехай також* D *і* D' *– області в* $\overline{X}$ *і* X', *відповідно, причому, простір* D *є слабко плоским, крім того,* $\overline{D'}$ *є компактом в* X' , *а множина* $\partial D'$ *містить не менше двох точок.*

Якщо область D' *задовольняє умову* $\boldsymbol{A}$ *і* $Q \in L^1(D')$, *то сім'я* $\mathfrak{F}_Q(D, D')$ *є одностайно неперервною в* D.

Зауваження 1.1. В теоремі 1.1 одностайна неперервність розуміється в сенсі відображень, що діють між просторами $(\overline{X}, h)$ і (X', d'). Іншими словами, $\mathfrak{F}_Q(D, D')$ є одностайно неперервною в точці $x_0 \in D$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ таке, що нерівність $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ виконується одночасно для всіх $f \in \mathfrak{F}_Q(D, D')$ і всіх $x \in D$ таких, що $h(x, x_0) < \delta$.

2. Допоміжні міркування

Для зручності покладемо

$$h(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1, y \in E_2} h(x, y)\,, \qquad E_1, E_2 \subset \overline{X}\,,$$

$$h(E) = \sup_{x, y \in E} h(x, y)\,, \quad d(F_1, F_2) = \inf_{x \in F_1, y \in F_2} d(x, y)\,,$$

де $E \subset \overline{X'}$ і $F_1, F_2 \subset X$, і $d(F) = \sup\limits_{x,y \in F} d(x,y)$, де $F \subset X$. Для відображення $f : D \to X'$ і множини $E \subset \overline{X}$ покладемо

$$C(f,E) := \{y \in X' : \exists\, x_k \in D, x_0 \in E : x_k \overset{h}{\to} x_0, f(x_k) \to y\,, k \to \infty\}\,.$$

Наступне поняття є принципово важливим при дослідженні будь-яких відображень з розгалуженням (див., напр., [2, розділ 3, гл. II]). Нехай $f : D \to X'$ – відображення, $\beta : [a, b) \to X'$ – деяка крива і $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Крива $\alpha : [a, c) \to D$ називається *максимальним підняттям* кривої β при відображенні f з початком у точці x, якщо (1) $\alpha(a) = x$; (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\,c)}$; (3) якщо $c < c' \le b$, то не існує кривої $\alpha' : [a, c') \to D$, такої що $\alpha = \alpha'|_{[a,\,c)}$ і $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,\,c')}$. Існування максимальних піднять при відкритих дискретних відображеннях в n-вимірному евклідовому просторі доведене Рікманом [2, теорема 3.2.II]. У випадку метричних просторів відповідне твердження можна знайти, напр., у [13, лема 2.1]. Нехай $\beta : [a, c) \to D$ – крива зі значеннями в області $D \subset (X, d)$. Скрізь далі ми пишемо $\beta(t) \to \partial D$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $d(\beta(t), \partial D) < \varepsilon$ для всіх $t \in (\delta, c)$. Тут, звісно, припускається, що $\partial D \ne \varnothing$. Виконується наступне твердження.

Лема 2.1. *Нехай (X, d) – метричний простір, що допускає слабку сферикалізацію, $(\overline{X}, h)$ є локально зв'язним, (X', d') є компактним, крім того, нехай D, D' – області в $\overline{X}$ та X', відповідно. Нехай f – відкрите дискретне відображення області D на D'. Тоді для будь-якої кривої $\beta : [a, b) \to D'$, такої, що $\beta(t) \to \partial D'$ при $t \to b - 0$ будь-яке її максимальне підняття $\alpha : [a, c) \to D$ з початком в довільній точці $x \in f^{-1}(\beta(a))$ при відображенні f задовольняє умову: $h(\alpha(t), \partial D) \to 0$ при $t \to c - 0$.*

Доведення. Передусім зауважимо, що формулювання леми 2.1 є коректним, а саме, за умов леми ∂D не порожня. Дійсно, оскільки за умовою $\beta(t) \to \partial D'$, маємо: $\partial D' \ne \varnothing$. Тоді знайдеться послідовність точок $y_k = \beta(t_k) \in D'$ така, що $d'(y_k, \partial D') \to 0$ при $k \to \infty$, де $t_k \in [a, b)$. Оскільки простір X' є компактним, ми можемо вважати, що $y_k \to y_0 \in X'$. Тоді $y_0 \in \partial D'$, бо $d'(y_k, \partial D') \to 0$ при $k \to \infty$. Оскільки $f(D) = D'$ за умовою леми, існують $x_k \in D$ такі, що $f(x_k) = y_k$. Оскільки $\overline{X}$ є компактом, то ми також можемо вважати послідовність x_k збіжною до якоїсь точки x_0 при $k \to \infty$. Точка x_0 не може бути внутрішньою для області D, бо в протилежному випадку в силу відкритості відображення f такою була б і точка y_0. Тоді $x_0 \in \partial D$, отже, $\partial D \ne \varnothing$.

Оскільки тепер нами встановлено, що $\partial D \neq \varnothing$, то можливі тільки два випадки: або $h(\alpha(t), \partial D) \to 0$ при $t \to c-0$, або $h(\alpha(p_k), \partial D) \geqslant \delta_0 > 0, k = 1, 2, \dots,$ за певного $\delta_0 > 0$ і деякої послідовності $p_k \to c-0$ при $k \to \infty$. Здійснимо доведення леми 2.1 від супротивного, користуючись підходом, застосованим при доведенні [12, лема 3]. Нехай існує така крива $\beta : [a, b) \to D'$, відносно якої її максимальне підняття $\alpha : [a, c) \to D$, $c \in (a, b)$, задовольняє умову $h(\alpha(p_k), \partial D) \geqslant \delta_0 > 0, k = 1, 2, \dots,$ для деякої послідовності $p_k \in [a, c)$ такої, що $p_k \to c - 0$ при $k \to \infty$. Оскільки простір $\overline{X}$ – компактний, в цьому випадку можна вважати, що $\alpha(p_k) \to x_1 \in D$ при $k \to \infty$. Розглянемо множину

$$D_0 = \left\{ x \in \overline{X} : x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k), \quad t_k \in [a, c), \quad \lim_{k\to\infty} t_k = c \right\}.$$

Зауважимо, що $c \neq b$. Дійсно, якщо $c = b$, то за неперервністю f в області D ми мали б, що $f(\alpha(p_k)) = \beta(p_k) \to x_1 \in D$ при $k \to \infty$. Останнє суперечить обранню кривої β, бо $\beta(t) \to \partial D'$ при $t \to b - 0$ за умовою леми.

Нехай тепер $c \neq b$. Переходячи до підпосліовностей за необхідності, ми можемо обмежитись тільки монотонними послідовностями t_k. Нехай $x \in D_0 \cap D$, тоді з огляду на неперервність f ми отримаємо, що $f(\alpha(t_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, де $t_k \in [a, c), t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однак, $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Тоді відображення f стале на $D_0 \cap D$. Зауважимо, що

$$D_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} \neq \varnothing.$$

Тому, з огляду на [23, теорема 5.II.47.5] множина D_0 зв'язна. Також зазначимо, що D_0 – непорожня, що безпосередньо випливає із включення $x_1 \in D_0$, де x_1 визначена вище. Нехай L_0 – зв'язна компонента $D_0 \cap D$, що містить точку x_1. Якщо D_0 містить дві і більше точок, то за означенням зв'язності таким є і L_0. Оскільки f – дискретне відображення і $L_0 \subset D$, множина L_0 є одноточковою. Отже, D_0 є одноточковою також. У такому випадку, криву $\alpha : [a, c) \to D$ можна продовжити до замкненої кривої $\alpha : [a, c] \to D$, причому $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Тоді за [13, лема 2.1] знайдеться ще одне максимальне підняття α' кривої $\beta|_{[c,b)}$ з початком в точці $\alpha(c)$. Об'єднуючи підняття α і α', ми отримаємо нове підняття α'' кривої β, визначене на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, що суперечить "максимальності" вихідного підняття α. Отримане протиріччя вказує на те, що $h(\alpha(t), \partial D) \to 0$ при $t \to c - 0$. □

3. Доведення теореми 1.1

Здійснимо доведення теореми від супротивного. Припустимо, що сім'я $\mathfrak{F}_Q(D, D')$ не є одностайно неперервною в точці $x_0 \in D$. Іншими словами, знайдуться такі $x_0 \in D$ і $\varepsilon_0 > 0$ з наступною умовою: для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ знайдеться $x_m \in D, m = 1, 2, \ldots$ і відображення $f_m \in \mathfrak{F}_Q(D, D')$ такі, що $h(x_0, x_m) < \frac{1}{m}$ і

$$d'(f_m(x_0), f_m(x_m)) \geqslant \varepsilon_0\,. \tag{3.1}$$

Оскільки за умовою $\overline{D'}$ – компакт, ми можемо вважати, що послідовності $f_m(x_0)$ і $f_m(x_m)$ збігаються при $m \to \infty$ до точок a_1 та $a_2 \in \overline{D'}$, відповідно. Тоді, з нерівності (3.1), за нерівністю трикутника та за неперервністю метрики маємо: $d'(a_1, a_2) \geqslant \varepsilon_0$. За умовами теореми знайдуться точки $w_1, w_2 \in \partial D'$, $w_1 \neq w_2$. Визначимо криві γ_1 і γ_2 наступним чином. Якщо обидві точки a_1 і a_2 є межовими, то позначимо через γ_i вироджену криву, образ якої збігається з відповідною точкою a_i, $i = 1, 2$. Якщо лише одна з точок a_1 або a_2 є межовою, наприклад, точка a_1, то знову позначимо через γ_1 відповідну вироджену криву, образ якої збігається з a_1; нехай, наприклад, $a_1 \neq w_2$, тоді точку a_2 з'єднаємо з точкою w_2 кривою γ_2, що лежить в D' повністю, за виключенням кінцевої точки w_2 (це можливо за умовою **A**).

І нарешті, якщо обидві точки a_1 і a_2 є внутрішніми, з'єднаємо точки a_1 і w_1, a_2 і w_2 непересічними кривими γ_1 та γ_2 в D', що можливо за умовою **A**, (див. рисунок 1). Зауважимо, що $|\gamma_i|, i = 1, 2$ – компакти в X' як неперервні образи відповідних відрізків у метричний простір, тому існує $l_0 > 0$ таке що $d'(|\gamma_1|, |\gamma_2|) = l_0 > 0$. Оскільки простір X'

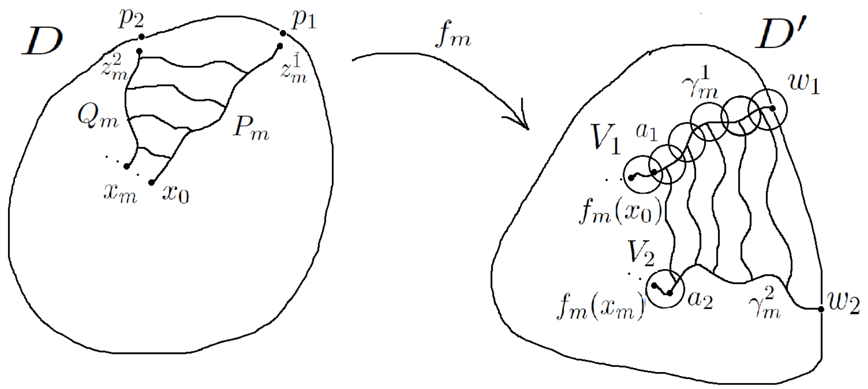

Рис. 1: До доведення теореми 1.1

локально лінійно зв'язний, знайдуться лінійно зв'язні околи V_i точок

a_i, $i = 1, 2$ такі, що $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Можна вважати, що $V_1 \subset B(a_1, \frac{l_0}{4})$. З'єднаємо точки a_1 та a_2 з точками $f_m(x_0)$ та $f_m(x_m)$ кривими α_m та β_m всередині околів V_1 та V_2, відповідно. Тепер утворимо нові криві: нехай $\gamma_m^{1*} : [0, 1] \to X'$ крива, що є поєднанням кривих γ_1 та α_m, а $\gamma_m^{2*} : [0, 1] \to X'$ – крива, що є поєднанням кривих γ_2 та β_m, де $\gamma_m^{1*}(0) = f_m(x_0)$ і $\gamma_m^{2*}(0) = f_m(x_m)$.

Нехай

$$t_m = \sup_{t\in[0,1]} \{t : \gamma_m^{1*}(t) \in D'\}, \;\; p_m = \sup_{t\in[0,1]} \{t : \gamma_m^{2*}(t) \in D'\}.$$

Покладемо

$$\gamma_m^1 = \gamma_m^{1*}|_{[0,t_m)}\,, \gamma_m^2 = \gamma_m^{2*}|_{[0,p_m)}.$$

Покажемо, що умови леми 2.1 в [13] виконуються. Перш за все, локальна компактність $\overline{X}$ випливає із його компактності, також він є локально зв'язним за умовами теореми. Крім того, оскільки за умовою $\overline{D'}$ – компакт, то простір D' локально компактний. Отже, за [13, лема 2.1] знайдуться максимальні підняття кривих γ_m^1 та γ_m^2 при відображенні f_m з початками в точках x_0 та x_m, відповідно.

За лемою 2.1 $h(\alpha_m^*(t), \partial D) \to 0$ і $h(\beta_m^*(t), \partial D) \to 0$ при $t \to c_1 - 0$ і $t \to c_2 - 0$, відповідно. Отже, на кривих α_m^* та β_m^* знайдуться точки z_m^1 та z_m^2, відповідно, такі що $h(z_m^1, \partial D) < \frac{1}{m}$ та $h(z_m^2, \partial D) < \frac{1}{m}$. Оскільки $\overline{X}$ є компактним, можна вважати, що z_m^1 і z_m^2 збіжні до точок p_1 і p_2, відповідно. Нехай P_m – частина носія кривої α_m^* в X, що знаходиться між точками x_0 та z_m^1, а Q_m – частина носія кривої β_m^* в X, що знаходиться між точками x_m та z_m^2. Розглянемо сім'ю

$$\Gamma_m^* := \Gamma(P_m, Q_m, D)$$

кривих, що з'єднують P_m та Q_m в D. За означенням максимального підняття при відображенні f_m у точках x_0 та x_m маємо:

$$f_m(P_m) \subset |\gamma_m^1|, \;\; f_m(Q_m) \subset |\gamma_m^2|. \tag{3.2}$$

Розглянемо покриття $A_0 := \bigcup\limits_{y\in|\gamma_1|} B(y, l_0/4)$ множини $|\gamma_1|$. Оскільки $|\gamma_1|$ – компактна множина, за лемою Гейне-Бореля-Лебега можна обрати скінченну кількість індексів $1 \leqslant N_0 < \infty$ і відповідні точки $z_1, \ldots, z_{N_0} \in |\gamma_1|$ так, щоб $|\gamma_1| \subset B_0 := \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(z_i, l_0/4)$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що всі точки z_i належать D', так як у протилежному випадку за нерівністю трикутника можна замінити кулю $B(y, l_0/4)$ на кулю $B(y^*, l_0^*/4)$ з центром в деякій точці $y^* \in D'$, де l_0^* – деяке додатне число, яке можна обрати так, що

$l_0/4 < l_0^*/4 < l_0/2$. Крім того, оскільки $V_1 \subset B(a_1, \frac{l_0}{4})$, можна вважати, що $V_1 \subset B(z_{i_0}, \frac{l_0}{4})$ для деякого $z_{i_0} \in D'$ і $1 \leqslant i_0 \leqslant N_0$.

Нехай Γ_m' – сім'я всіх кривих, що з'єднують $f_m(P_m)$ та $f_m(Q_m)$ в D', а Γ_m – сім'я всіх кривих, що з'єднують $|\gamma_m^1|$ та $|\gamma_m^2|$ в D'. Тоді, користуючись (3.2), маємо:

$$\Gamma_m' \subset \Gamma_m = \bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma_{mi}\,, \tag{3.3}$$

де Γ_{mi} – сім'я всіх кривих $\gamma : [0,1] \to D'$ таких, що $\gamma(0) \in B(z_i, l_0/4) \cap |\gamma_m^1|$ і $\gamma(1) \in |\gamma_m^2|$ при $1 \leqslant i \leqslant N_0$. Беручи до уваги [23, теорема 1.I.5, §46], ми можемо показати, що

$$\Gamma_{mi} > \Gamma(S(z_i, l_0/4), S(z_i, l_0/2), A(z_i, l_0/4, l_0/2))\,. \tag{3.4}$$

Нехай $\gamma \in \Gamma_m^*$, тоді $\gamma : [0,1] \to D$, $\gamma(0) \in P_m$, $\gamma(1) \in Q_m$. Зокрема, $f_m(\gamma(0)) \in f_m(P_m)$, $f_m(\gamma(1)) \in f_m(Q_m)$. З огляду на співвідношення (3.3), маємо: $f_m(\gamma) \in \Gamma_{mi}$ для деякого $1 \leqslant i \leqslant N_0$. Тоді з (3.4) випливає, що $f_m(\gamma)$ має підкриву $\triangle : (t_1, t_2) \to D'$ таку, що $\triangle \in \Gamma(S(z_i, \frac{l_0}{4}), S(z_i, \frac{l_0}{2}), A(z_i, \frac{l_0}{4}, \frac{l_0}{2}))$. Тобто, за означенням, $\gamma_1 = \gamma|_{[t_1,t_2]}$ і $f_m(\gamma_1) = \triangle \in \Gamma(S(z_i, \frac{l_0}{4}), S(z_i, \frac{l_0}{2}), A(z_i, \frac{l_0}{4}, \frac{l_0}{2}))$. Еквівалентно, $\gamma > \gamma_1$, де $\gamma_1 \in \Gamma_{f_m}(z_i, \frac{l_0}{4}, \frac{l_0}{2})$. Отже,

$$\Gamma_m^* > \bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma_{f_m}\left(z_i, \frac{l_0}{4}, \frac{l_0}{2}\right)\,.$$

Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/l_0, & t \in [l_0/4, l_0/2], \\ 0, & t \notin [l_0/4, l_0/2]\,. \end{cases}$$

Оскільки відображення f_m задовольняють співвідношення (1.5) в D', маємо:

$$M_\alpha(\Gamma_m^*) \leqslant \sum_{i=1}^{N_0} M_\alpha\left(\Gamma_{f_m}(z_i, \frac{l_0}{4}, \frac{l_0}{2})\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4^{\alpha'} N_0 / l_0^{\alpha'} \cdot \|Q\|_1 := c < \infty\,, \tag{3.5}$$

оскільки $Q \in L^1(D')$. Тут $\|Q\|_1$ позначає норму функції Q в $L^1(D')$.

З іншого боку, для достатньо великих m виконується:

$$h(P_m) \geqslant h(z_m^1, x_0) \geqslant h(x_0, p_1) - h(z_m^1, p_1) \geqslant \frac{1}{2} h(x_0, p_1)\,,$$

$$h(Q_m) \geqslant h(z_m^2, x_m) \geqslant h(z_m^2, x_0) - h(x_m, x_0) \geqslant$$

$$\geqslant h(p_2, x_0) - h(z_m^2, p_2) - h(x_m, x_0) \geqslant \frac{1}{2} h(x_0, p_2)\,.$$

Покладемо

$$U = B_h\left(x_0, \frac{R_0}{2}\right) = \left\{x \in \overline{X} : h(x, x_0) < \frac{R_0}{2}\right\}\,,$$

де

$$R_0 = \min\{h(x_0, p_1), h(x_0, p_2), h(x_0, \partial D)\}.$$

Оскільки $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$, при цьому $h(P_m) \geqslant \delta_1$ і $h(Q_m) \geqslant \delta_2$ при всіх $m \geqslant m_0$ і деякому $m_0 \in \mathbb{N}$, з огляду на [23, теорема 1.I.5, §46] існує номер $m_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $P_m \cap \partial U \neq \varnothing \neq Q_m \cap \partial U$ при $m \geqslant m_1$. Оскільки D – слабко плоский простір, для будь-якого числа $P > 0$ знайдеться інший окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що

$$M_\alpha(\Gamma(E, F, D)) > P \tag{3.6}$$

для будь-яких континуумів $E, F \subset D$ таких, що $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial U$ і $E \cap \partial V \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$. Оскільки $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$, при цьому $h(P_m) \geqslant \delta_1$ і $h(Q_m) \geqslant \delta_2$ при всіх $m \geqslant m_0$ і деякому $m_0 \in \mathbb{N}$, з огляду на [23, теорема 1.I.5, §46] існує номер $m_2 \in \mathbb{N}$, $m_2 > m_1$, такий, що $P_m \cap \partial V \neq \varnothing \neq Q_m \cap \partial V$. Тоді з (3.6) випливає, що

$$M_\alpha(\Gamma_m(P_m, Q_m, D)) > P\,, \quad m > m_2\,. \tag{3.7}$$

Співвідношення (3.7) суперечить (3.5), оскільки число P може бути обраним більше за $4^{\alpha'} N_0 / l_0^{\alpha'} \cdot \|Q\|_1$. Отримана суперечність доводить теорему. □

4. Приклади

Приклад 4.1. Скористаємося прикладом 1 з нашої попередньої статті [18]. Обмежимося евклідовою розмірністю $n = 2$. Зафіксуємо довільне число $p \geqslant 1$ з умовою $2/p < 1$ і покладемо $\alpha \in (0, 2/p)$. Визначимо послідовність відображень f_m одиничного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на круг $B(0, 2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ наступним чином:

$$f_m(z) = \begin{cases} \frac{1+|z|^\alpha}{|z|} \cdot z\,, & 1/m \leqslant |z| \leqslant 1, \\ \frac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot z\,, & 0 < |z| < 1/m\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що f_m задовольняє умову

$$M(f_m(\Gamma(S_1, S_2, D))) \leqslant \int\limits_{A \cap \mathbb{D}} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \tag{4.1}$$

для всіх $z_0\in\mathbb{D}$ і всіх $0<r_1<r_2<d_0:=\sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$ і всіх вимірних за Лебегом функцій $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ з умовою

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1$$

для функції $Q(z)=\frac{1+|z|^\alpha}{\alpha|z|^\alpha}$ при кожному $z_0\in\mathbb{D}$, більше того, $Q\in L^p(\mathbb{D})$ (див., напр., міркування, застосовані при розгляді [3, пропозиція 6.3]). Тут $\mu=\mu'=m$ – плоска міра Лебега, M – конформний модуль сімей кривих (у (1.3) $\mu=m$, $X=\mathbb{C}$, $p=2$, крім того, A як і раніше визначено у (1.4) при $d'(x,y)=|x-y|$, $X'=\mathbb{C}$ і $y_0=z_0$). Прямими обчисленнями можна переконатися в тому, що обернені відображення $g_m=f_m^{-1}(z)$ обчислюються шляхом співвідношення

$$g_m(z)\;=\;\left\{\begin{array}{ll}\frac{(|z|-1)^{1/\alpha}}{|z|}\cdot z\,, & 1+1/(m^\alpha)\leqslant|z|\leqslant 2,\\ \frac{1/m}{1+(1/m)^\alpha}\cdot z\,, & 0<|z|<1+1/(m^\alpha)\;.\end{array}\right.$$

Більше того, співвідношення (4.1) можна записати в вигляді

$$M(\Gamma_{g_m}(z_0,r_1,r_2))\leqslant\int\limits_{A\cap\mathbb{D}}Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z)\,. \tag{4.2}$$

Зауважимо, що сім’я відображень g_m задовольняє усі умови теореми 1.1. Зокрема, простір $\mathbb{C}$ (а, отже, і $\overline{\mathbb{C}}$) є слабко плоским (див., напр., [18, лема 2.2]). Роль слабкої сферикалізації відіграє розширена комплексна площина з хордальною метрикою h (див. співвідношення (1.3) в [18]).

Приклад 4.2. Для того, щоб отримати відповідну сім’ю відображень з розгалуженням, можна покласти $h_m=(g_m\circ l)(z)$, де $l(z)=z^2$. Зауважимо, що

$$M(\Gamma)\leqslant 2\cdot M(l(\Gamma))\,, \tag{4.3}$$

оскільки $N(l,B(0,2))=2$ і $K_O(l,z)=1$, де $N(f,D)$ – максимальна кратність відображення f в D, а $K_O(f,z)$ позначає зовнішню дилатацію відображення f в точці z (див. [1, теорема 3.2]). Зауважимо, що $l(\Gamma_{h_m}(z_0,r_1,r_2))\subset\Gamma_{g_m}(z_0,r_1,r_2)$. Отже, зі співвідношень (4.2) і (4.3) випливає, що

$$M(\Gamma_{h_m}(z_0,r_1,r_2))\leqslant 2\int\limits_{A\cap\mathbb{D}}Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z)\,.$$

Сім’я відображень h_m також задовольняє всі умови теореми 1.1.

Приклад 4.3. Побудуємо тепер аналогічний приклад сім'ї відображень між метричними просторами. Для цього розглянемо дві ріманові поверхні, записані у вигляді фактор-просторів $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$ по деяких групах G і G_* дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга $\mathbb{D}$, що діють розривно і не мають нерухомих точок (див., напр., [25, розд. 2]). Скористаємося схемою, застосованою при розгляді прикладу 3) зауваження 5.2 в [14]. Нагадаємо, що кожен елемент p_0 фактор-простору $\mathbb{D}/G$ є *орбітою* точки $z_0 \in \mathbb{D}$, тобто, $p_0 = \{z \in \mathbb{D} : z = g(z_0), g \in G\}$. Нехай $\widetilde{h}$ і $\widetilde{h}_*$ – метрики на $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$, відповідно. Докладніше, для $p_1, p_2 \in \mathbb{D}/G$ покладемо

$$\widetilde{h}(p_1, p_2) := \inf_{g_1, g_2 \in G} h(g_1(z_1), g_2(z_2)), \tag{4.4}$$

де h – гіперболічна метрика:

$$h(z_1, z_2) = \log \frac{1+t}{1-t}, \quad t = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \overline{z_2}|}. \tag{4.5}$$

Зауважимо, що $\widetilde{h}$ у (4.4) дійсно є метрикою (див. міркування після формули (2.8) у [25]). Можна також визначити елемент площі $d\widetilde{v}$ на $\mathbb{D}/G$. З цією метою, введемо до розгляду так звану *фундаментальну множину* F, яка визначається як підмножина $\mathbb{D}$, що містить одну і тільки одну точку орбіти $z \in G_{z_0}$ (див. [26, § 9.1, розд. 9]). *Фундаментальною областю* D_0 називається область в $\mathbb{D}$, з властивістю $D_0 \subset F \subset \overline{D_0}$ така, що $v(\partial D_0) = 0$ (див. там же). Найважливішим прикладом фундаментальної області є *багатокутник Діріхле*,

$$D_\zeta = \bigcap_{g \in G, g \neq I} H_g(\zeta),$$

де $H_g(\zeta) = \{z \in \mathbb{D} : h(z, \zeta) < h(z, g(\zeta))\}$ (див. [25, співвідношення (2.6)]). Нехай π – натуральна проекція $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}/G$, тоді π – аналітична функція, конформна на D_0 (див. [26, пропозиція 9.2.2] і коментар після (2.11) в [25]). Для вимірної множини $E \subset \mathbb{D}/G$ покладемо

$$\widetilde{v}(E) := v(\pi^{-1}(E)),$$

де v – гіперболічна міра в одиничному крузі з елементом площі

$$dv(z) = \frac{4\, dm(z)}{(1 - |z|^2)^2}, \tag{4.6}$$

m – плоска міра Лебега. Таким чином, $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$ – метричні простори з мірами, більше того, ці простори лінійно зв'язні і локально гомеоморфні простору $\mathbb{C}$ (див., напр., [26, теорема 6.2.1]). Зауважимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \mathbb{D}/G$ знайдеться окіл $U \subset \mathbb{D}/G$, який називається *нормальним околом* цієї точки, такий що $\pi(V) = U$, де V – компактний окіл у $\mathbb{D}$, π є гомеоморфізмом в V, причому $\widetilde{h}(p_1, p_2) = h(\varphi(p_1), \varphi(p_2))$ для будь-яких $p_1, p_2 \in U$ і $\varphi := (\pi|_V)^{-1}$. Переходячи до еквівалентного фактор-простору за допомогою дробово-лінійного автоморфізму одиничного круга $g_0(z) = (z - z_0)/(1 - z\overline{z_0})$, ми завжди можемо вважати, що $0 \in V$ і $\pi(0) = p_0$. Існування нормальних околів випливає зі співвідношення (2.10) у [25] (докладне обґрунтування їх існування наведено в міркуваннях після формули (15) публікації [27]).

Нехай тепер $r_0 > 0$ таке, що куля $B(0, r_0)$ зі своїм замиканням лежить в околі $V \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, де $\pi(V) = U$. Аналогічно, для точки $p_0^* \in \mathbb{D}/G_*$ знайдеться нормальний окіл $U_* \subset \mathbb{D}/G_*$ і відповідний йому компактний окіл $V_* \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ такий, що $\pi_*(0) = p_0^*$, $\pi_*(V_*) = U_*$, π є гомеоморфізмом V_* на U_* і $\widetilde{h}_*(p_1, p_2) = h(\varphi_*(p_1), \varphi_*(p_2))$ для будь-яких $p_1, p_2 \in U_*$ і $\varphi_* := (\pi_*|_{V_*})^{-1}$. Нехай тепер $1 > R_0 > 0$ таке, що куля $B(0, R_0)$ зі своїм замиканням лежить в околі $V_* \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, де $\pi_*(V_*) = U_*$. Покладемо

$$F_m(z) = \begin{cases} \frac{r_0}{1+r_1^\alpha} \cdot \frac{1+|z|^\alpha}{|z|} \cdot z\,, & r_1/m \leqslant |z| \leqslant R_0, \\ \frac{r_0}{1+r_1^\alpha} \cdot \frac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot z\,, & 0 < |z| < R_0/m\,. \end{cases}$$

Відображення F_m переводять кулю $B(0, R_0)$ на кулю $B(0, r_0)$. Покладемо

$$\widetilde{F}_m := (\pi \circ F_m \circ \varphi_*)(p_*)\,, \quad p_* \in \pi_*(B(0, R_0))\,.$$

Відображення $\widetilde{F}_m$ діють між областями $\pi_*(B(0, R_0))$ і $\pi(B(0, r_0))$ фактор-просторів $\mathbb{D}/G_*$ і $\mathbb{D}/G$, відповідно (див. рисунок 4.3). Можна показати, що відображення F_m та $\widetilde{F}_m$ належать класу Соболєва і мають скінченне спотворення (див. міркування, наведені при доведенні теореми 7.1 в [28]). Зауважимо, що функція $Q(p_*) = \frac{1+|\varphi_*(p_*)|^\alpha}{\alpha|\varphi_*(p_*)|^\alpha}$ є інтегровною в $\pi_*(B(0, R_0))$, оскільки

$$\int\limits_{\pi_*(B(0,R_0))} Q(p_*)\, d\widetilde{v}_*(p) = \int\limits_{B(0,R_0)} \frac{4(1+|z|^\alpha)\, dm(z)}{(1-|z|^2)^2\alpha|z|^\alpha}$$

$$\leqslant C \cdot \int\limits_{B(0,R_0)} \frac{(1+|z|^\alpha)\, dm(z)}{\alpha|z|^\alpha} < \infty\,.$$

Тоді за лемою 3.1 в [25] відображення $\widetilde{F}_m$ задовольняють умову

$$\widetilde{M}(\widetilde{F}_m(\Gamma(\widetilde{S_1}, \widetilde{S_2}, \pi_*(B(0, R_0))))) \leqslant$$

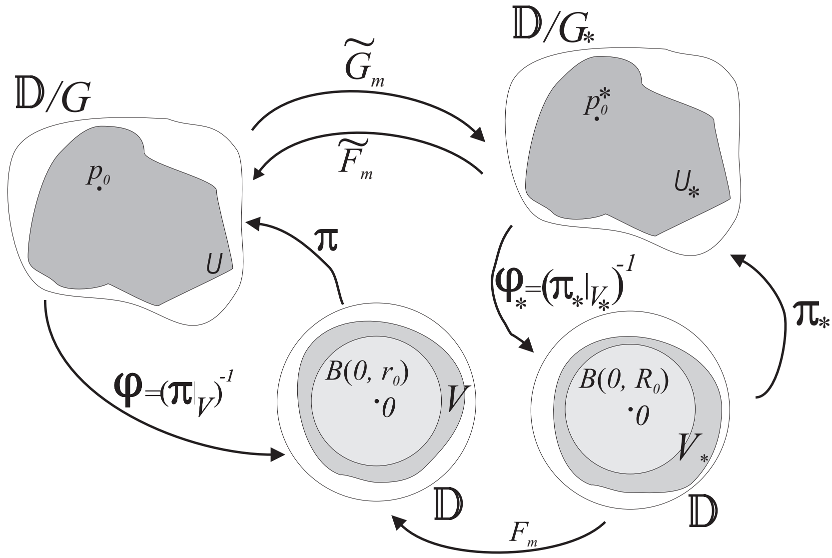

Рис. 2: До конструкції прикладу 4.3

$$\leqslant \int\limits_{\widetilde{A}\cap\pi_*(B(0,R_0))} Q(p_*)\cdot\eta^2(\widetilde{h}_*(p_*,p_0^*))\,d\widetilde{v}_*(p_*)$$

при $Q(p_*)=\frac{1+|\varphi_*(p_*)|^{\alpha}}{\alpha|\varphi_*(p_*)|^{\alpha}}$ для всіх $p_0^*\in\pi_*(B(0,R_0))$, всіх $0<r_1<r_2<\widetilde{h}_*(p_0^*,\partial\pi_*(B(0,R_0)))$ і всіх вимірних за Лебегом функцій $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ з умовою

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,,$$

де

$$\widetilde{S}_i=\{p_*\in\mathbb{D}/G_*:\widetilde{h}_*(p_*,p_0^*)=r_i\}\,,\quad i=1,2,$$

і

$$\widetilde{A}=\widetilde{A}(p_0^*,r_1,r_2)=\{p_*\in\mathbb{D}/G_*:r_1<\widetilde{h}_*(p_*,p_0^*)<r_2\}\,.$$

В такому випадку, відображення $\widetilde{G}_m:=\widetilde{F}_m^{-1}$ задовольняють умову

$$\widetilde{M}(\Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1,r_2,\widetilde{A}))\leqslant \int\limits_{\widetilde{A}\cap\pi_*(B(0,R_0))} Q(p_*)\cdot\eta^2(\widetilde{h}_*(p_*,p_0^*))\,d\widetilde{v}_*(p_*)\,,$$

де $\Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1,r_2,\widetilde{A})$ складається з тих і тільки тих кривих у $\pi(B(0,r_0))$, образи яких при відображенні $\widetilde{G}_m$ належать $\Gamma(\widetilde{S_1},\widetilde{S_2},\widetilde{A})$. Зауважимо, що відображення $\widetilde{G}_m$ задовольняють всі умови теореми 1.1 (простір

$\mathbb{D}/G$ можна наперед підібрати таким, що допускає слабку сферікалізацію, причому відповідний простір $\overline{\mathbb{D}/G}$ був би локально зв'язним). Слабка плоскість області $\pi(B(0,r_0))$ очевидна, оскільки $B(0,r_0)$ є слабко плоским в евклідовому, отже, і гіперболічному сенсі (а тому і в сенсі модуля сімей кривих на $\mathbb{D}/G$, бо цей модуль визначається в межах околу $\pi(B(0,r_0))$ саме через гіперболічну метрику і гіперболічну міру в $B(0,r_0)$). Крім того, $\overline{\pi_*(B(0,R_0))} = \pi_*(\overline{B(0,R_0)})$ є компактом в $\mathbb{D}/G_*$ як гомеоморфний образ компакту $\overline{B(0,R_0)}$ при відображенні π_*. Наявність двох і більше точок у $\partial\pi_*(B(0,R_0))$, а також умова **A** на $\pi_*(B(0,R_0))$ очевидні. Локальна лінійна зв'язність $\mathbb{D}/G_*$ є результатом вже згаданої вище [26, теорема 6.2.1] (хоча може бути отримана і безпосередньо: $\mathbb{D}/G_* = \pi_*(\mathbb{D})$, отже, $\mathbb{D}/G_*$ є лінійно зв'язним як неперервний образ лінійно зв'язної множини $\mathbb{D}$ при неперервному відображенні π_*).

Приклад 4.4. Нарешті, вкажемо відповідний приклад сім'ї відображень між метричним просторами з розгалуженням. Для цього в крузі $B(0,\sqrt{r_0})$ розглянемо відображення $l(z) = z^2$. Неважко бачити, що l переводить $B(0,\sqrt{r_0})$ в $B(0,r_0)$, причому має місце співвідношення (4.3). Нехай $M_h(\Gamma)$ – "гіперболічний" модуль сімей кривих, тобто, модуль сімей кривих, що визначається за допомогою гіперболічного елементу площі (4.6) і гіперболічної довжини кривої згідно метрики h у (4.5). Зауважимо, що $M_h(\Gamma) = M(\Gamma)$ (див., напр., [14, зауваження 5.2]). Тоді з (4.3) будемо мати

$$M_h(\Gamma) \leqslant 2 \cdot M_h(l(\Gamma))\,. \tag{4.7}$$

Нехай $G_m := F_m^{-1}$. Покладемо тепер

$$\widetilde{H}_m := (\pi_* \circ G_m \circ l \circ \varphi)(p)\,, \qquad p \in \pi(B(0,\sqrt{r_0}))\,.$$

Покладемо

$$L := \varphi^{-1} \circ l \circ \varphi = \pi \circ l \circ \varphi\,.$$

Доведемо, що

$$L(\Gamma_{\widetilde{H}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})) \subset \Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})\,. \tag{4.8}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_m &= (\pi_* \circ G_m \circ l \circ \varphi)(p) = \\ &= (\pi_* \circ G_m \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ l \circ \varphi)(p) = (\widetilde{G}_m \circ \varphi^{-1} \circ l \circ \varphi)(p) = \\ &= (\widetilde{G}_m \circ L)(p)\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Нехай $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{H}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})$, тоді $\widetilde{H}_m(\gamma) \in \Gamma(\widetilde{S_1}, \widetilde{S_2}, \widetilde{A})$, $\widetilde{A} = \widetilde{A}(p_0^*, r_1, r_2)$. Тоді з огляду на (4.9) маємо: $L(\gamma) \in \Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})$. Включення (4.8) доведене.

Тепер зауважимо, що

$$\widetilde{M}(\Gamma) \leqslant 2\widetilde{M}(L(\Gamma)) \tag{4.10}$$

для будь-якої сім'ї кривих Γ у $\pi(B(0, r_0))$, де $\widetilde{M}$, як і вище, позначає модуль сімей кривих у $\mathbb{D}/G$. Дійсно, нехай Γ – вказана сім'я кривих. За вибором $B(0, r_0) \subset V$ і околу $V \subset U$, а також в силу рівності $M_h(\Gamma) = M(\Gamma)$ (див., напр., [14, зауваження 5.2]),

$$\widetilde{M}(\Gamma) = M_h(\varphi(\Gamma)) = M(\varphi(\Gamma))\,. \tag{4.11}$$

За нерівністю (4.7)

$$M(\varphi(\Gamma)) \leqslant 2 \cdot M(l(\varphi(\Gamma)))\,. \tag{4.12}$$

Знову, за вибором $B(0, r_0) \subset V$ і околу $V \subset U$, а також в силу рівності $M_h(\Gamma) = M(\Gamma)$ ([14, зауваження 5.2]))

$$M(l(\varphi(\Gamma))) = M_h(l(\varphi(\Gamma))) = \widetilde{M}((\pi \circ l \circ \varphi)(\Gamma)) = \widetilde{M}(L(\Gamma))\,. \tag{4.13}$$

Поєднуючи (4.11), (4.12) і (4.13), отримаємо бажане співвідношення (4.10).

Остаточно, з (4.8), (4.10) і (4.13) отримаємо, що

$$\widetilde{M}(\Gamma_{\widetilde{H}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})) \leqslant 2\widetilde{M}(L(\Gamma_{\widetilde{H}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A}))) \leqslant \tag{4.14}$$

$$\leqslant 2\widetilde{M}(\Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})) \leqslant 2 \cdot \int\limits_{\widetilde{A} \cap \pi_*(B(0, R_0))} Q(p_*) \cdot \eta^2(\widetilde{h}_*(p_*, p_0^*))\, d\widetilde{v}_*(p_*)\,.$$

Нерівності у (4.14) доводять, що відображення $\widetilde{H}_m$, $m = 1, 2, \ldots$, є відображеннями з основної нерівності (1.5), в який приймає участь деяка (не залежна від m) інтегровна функція Q, причому є відкритими і дискретними відображеннями між областями просторів $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$ з точкою розгалуження p_0. Можна показати, що для $\widetilde{H}_m$ всі умови теореми 1.1 виконуються (за умови, що простір $\mathbb{D}/G$ допускає слабку сферикалізацію та за умови, що відповідний розширений простір $\overline{\mathbb{D}/G}$ є локально лінійно зв'язним).

Література

[1] Martio, O., Rickman, S., Väisälä, J. (1969). Definitions for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, 448*, 1–40.

[2] Rickman, S. (1993). *Quasiregular mappings.* Berlin: Springer-Verlag.

[3] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* New York: Springer Science + Business Media, LLC.

[4] Gutlyanskiĭ, V.Ya., Martio, O., Ryazanov, V.I., Vuorinen, M. (1998). On convergence theorems for space qusiregular mappings. *Forum Math., 10*, 353–375.

[5] Gutlyanskiĭ, V.Ya., Martio, O., Ryazanov, V.I., Vuorinen, M. (1998). On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings. *Studia Math., 128*(3), 243–271.

[6] Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E. (2015). The Beltrami equations and prime ends. *Укр. мат. вісник, 12*(1), 27–66; trans. in *Journal of Mathematical Sciences, 210*(1), 22–51.

[7] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math., 93*, 215–236.

[8] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2015). Singularities of discrete open mappings with controlled p-module. *J. Anal. Math., 127*, 303–328.

[9] Ryazanov, V., Volkov, S. (2020). Mappings with Finite Length Distortion and Prime Ends on Riemann Surfaces. *Complex Analysis and Operator Theory, 248*, 190–202.

[10] Afanas'eva, E.S. (2014). On the Boundary Behavior of One Class of Mappings in Metric Spaces. *Ukrainian Math. J., 66*(1), 16–29.

[11] Afanas'eva, E.S., Salimov, R.R. (2015). Boundary behavior of mappings in $\lambda(\varepsilon)$-regular metric spaces. *Journal of Mathematical Sciences, 211*(5), 617–623.

[12] Севостьянов, Е.А. (2016). О локальном и граничном поведении отображений в метрических пространствах. *Алгебра и анализ, 28*(6), 118–146; transl. Sevost'yanov, E.A. (2017). Local and boundary behavior of maps in metric spaces. *St. Petersburg Math. J., 28*(6), 807–824.

[13] Sevost'yanov, E.A., Markysh, A.A. (2019). On Sokhotski-Casorati-Weierstrass theorem on metric spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations, 64*(12), 1973–1993.

[14] Sevost'yanov, E. (2019). On boundary extension of mappings in metric spaces in terms of prime ends. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 44*(1), 65–90.

[15] Рязанов, В.И., Салимов, Р.Р. (2007). Слабо плоские пространства и границы в теории отображений. *Укр. мат. вісник, 4*(2), 199–234; transl. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. (2007). Weakly flat spaces and bondaries in the mapping theory. *Ukr. Math. Bull., 4*(2), 199–233.

[16] Смоловая, Е.С. (2010). Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах. *Укр. мат. журн., 62*(5), 682–689; transl. Smolovaya, E.S. (2010). Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms in metric spaces. *Ukrainian Math. J., 62*(5), 785–793.

[17] Севостьянов, Е.А. (2010). К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности. *Изв. АН России,*

сер. мат., 74(1), 159–174; transl. Sevost'yanov, E.A. (2010). Towards a theory of removable singularities for maps with unbounded characteristic of quasi-conformity. *Izv. Math., 74*(1), 151–165.

[18] Sevost'yanov, E., Skvortsov, S. (2020). On mappings whose inverses satisfy the poletsky inequality. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, 45*, 259–277.

[19] Севостьянов, Е.А., Скворцов, С.А. (2019). О локальном поведении отображений метрических пространств. *Укр. мат. вісник, 16*(2), 215–227; transl. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2020). On the local behavior of mappings of metric spaces. *J. Math. Sci., 244*(1), 47–55.

[20] Севостьянов, Е.А., Скворцов, С.А. (2018). О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями. *Укр. мат. журн., 70*(7), 952–967; transl. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2018). On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions. *Ukr. Math. J., 70*(7), 1097–1114.

[21] Севостьянов, Є.О., Скворцов, С.О., Довгопятий, О.П. (2020). Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького. *Укр. мат вісник, 17*(3), 414–436; transl. (2020). On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences, 252*(4), 541–557.

[22] Heinonen, J. (2001). *Lectures on Analysis on metric spaces.* New York: Springer Science+Business Media.

[23] Куратовский, К. (1969). *Топология,* т. 2. М.: Мир.

[24] Куратовский, К. (1966). *Топология,* т. 1. М.: Мир.

[25] Ryazanov, V., Volkov, S. (2017). On the Boundary Behavior of Mappings in the Class $W^{1,1}_{loc}$ on Riemann Surfaces. *Complex Analysis and Operator Theory, 11*, 1503–1520.

[26] Бердон, А. (1986). *Геометрия дискретных групп.* Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.

[27] Севостьянов, Є.О.(2020). Про нерівність типу Полецького для відображень ріманових поверхонь. *Укр. мат. журнал, 72*(5), 705–720.

[28] Севостьянов, Е.А. (2012). О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой. *Математические труды, 15*(1), 178–204; transl. Sevost'yanov, E.A. (2013). Equicontinuity of homeomorphisms with unbounded characteristic. *Siberian Advances in Mathematics, 23*(2), 106–122.

Відомості про авторів

Сергій Олександрович Скворцов

Житомирський державний університет ім. І. Франко,
Житомир, Україна
E-Mail: serezha.skv@gmail.com