УДК 519.21

О. Банна, асп., Ю. Мішура, д-р фіз..-мат. наук
bannaya@univ.kiev.ua , myus@univ.kiev.ua

НАИПРОСТІШІ МАРТИНГАЛИ НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ДО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

Знайдено найкраще рівномірне наближення дробового броунівського руху в просторі $L_\infty([0,T];L_2(\Omega))$ мартингалами виду $\int_0^t a(s)dW_s$, де W – вінерівський процес, $a(s)$ – стала або степенева функції.

The best uniform approximation of fractional Brownian motion in the space $L_\infty([0,T];L_2(\Omega))$ by martingales of the form $\int_0^t a(s)dW_s$, where W is Wiener process, $a(s)$ is a constant or a power function, is established.

1. Вступ.

Дробовим броунівським рухом (ДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$ називається гауссівський процес $\{B_t^H,\ t \ge 0\}$ з середнім $\mathrm{E}B_t^H = 0$, коваріацією $\mathrm{E}B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$, такий, що $B_0^H = 0$. Ми будемо розглядати лише випадок, коли індекс Хюрста $H \in (\frac{1}{2},1)$. Відомо, що ДБР з індексом $H \in (\frac{1}{2},1)$ не є семімартингалом, зокрема, він не є ні мартингалом, ні процесом обмеженої варіації. Виникає природне питання: чи можна наблизитися до ДБР в деякій метриці за допомогою мартингалів, семімартингалів або процесів обмеженої варіації. Що стосується процесів обмеженої варіації та семімартингалів, відповідь позитивна, і ці задачі розв'язано в роботах [1, с. 11–20; 3, с. 281–300] та [5, с. 255–260]. В даній роботі розглянуто наближення дробового броунівського руху мартингалами, точніше, стохастичними інтегралами по вінерівському процесу. Задачу поставлено наступним чином: нехай задано відрізок $[0,T]$. Відомо з [3], що ДБР $\{B_t^H,\ t \in [0,T]\}$ допускає зображення $B_t^H = \int_0^t z(t,s)dW_s$, де $\{W_t,\ t \in [0,T]\}$ – вінерівський процес, $z(t,s) = \left(H - \frac{1}{2}\right)c_H s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}du$, де $c_H = \left(\frac{2H\cdot\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$, $\Gamma(x)$, $x>0$ – гамма-функція. Нехай в подальшому $\alpha = H - \frac{1}{2}$.

Нехай тепер $a:[0,T] \to \mathbf{R}$ – вимірна функція з класу $L_2[0,T]$, тобто така, для якої існує стохастичний інтеграл $\int_0^t a(s)dW_s$, $t \in [0,T]$, по цьому ж вінерівському процесу $\{W_t,\ t \in [0,T]\}$. Треба знайти $\inf\limits_{a \in L_2[0,T]} \sup\limits_{0 \le t \le T} \mathrm{E}(B_t^H - \int_0^t a(s)dW_s)^2$. В даній роботі розв'язано спрощені варіанти цієї загальної задачі, коли замість всього класу $L_2[0,T]$ інфімум береться: (а) по всіх сталих; (б) по всіх степеневих функціях вигляду $a(s) = k \cdot s^{H-\frac{1}{2}}$, $k \in \mathbf{R}$; (в) по всіх функціях вигляду $k \cdot s^\gamma$, $k \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$. В кожному випадку знайдено ту функцію, на якій інфімум досягається, та значення самого інфімума. Зауважимо, що всі ці значення ненульові.

2. Основні результати.

Ми будемо дотримуватись позначень, що введені в статті [4, с. 571–587]. Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо $\mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2$, $0 \le t \le T$, де B_t^H – дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $\frac{1}{2} < H < 1$, M_t – квадратично інтегрований мартингал виду $M_t = \int_0^t a(s)dW_s$, причому виконується умова $\int_0^T a^2(s)ds < \infty$, тобто $a \in L_2[0,T]$. Будемо шукати $\min\limits_{a \in L_2[0,T]} \max\limits_{0 \le t \le T} \mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2$ у деяких часткових випадках.

Теорема 1. Нехай $a(s)$ – стала, тобто $a(s) = a$, $s \in [0,\ T]$. Тоді $\min\limits_{a} \max\limits_{0 \le t \le T} \mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H}(1 - c_1^2)$, де $c_1 = c_1(H) = \alpha\ \ c_H \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot B(1-\alpha,\ \alpha)$. Причому $a_{\min} = c_1(H) \cdot T^\alpha$. Тут $B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds$, $x > 0$, $y > 0$ – бета-функція.

Зауваження 1. Як буде видно з доведення теореми, $c_1(H) < 1$.

Доведення.

Оскільки $a(s)$ – стала, то $M_t = \int_0^t a(s)dW_s = \int_0^t a dW_s = a(W_t - W_0) = aW_t$.

З цього випливає, що
$\mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2 = \mathrm{E}(B_t^H - aW_t)^2 = (\mathrm{E}B_t^H)^2 - 2a\mathrm{E}B_t^H \cdot W_t + a^2\mathrm{E}W_t^2 = t^{2H} - 2a\mathrm{E}B_t^H W_t + a^2 t.$

Знайдемо $\mathrm{E}B_t^H W_t$:

$$\mathrm{E}B_t^H W_t = \mathrm{E}\int_0^t z(t,\ s)dW_s \cdot W_t = \int_0^t z(t,\ s)ds = \alpha\ \ c_H \int_0^t s^{-\alpha}\ \ \cdot\left(\int_s^t u^{\alpha}(u-s)^{\alpha-1}du\right)\ ds. \quad (1)$$

Змінимо в (1) порядок інтегрування. Отримаємо: $\mathrm{E}B_t^H W_t = \alpha\ \ c_H \int_0^t u^{\alpha}\left(\int_0^u s^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1}ds\right)\ du$.

Лінійною заміною змінних $s = ux$ зведемо останній інтеграл до вигляду:

$\mathrm{E}B_t^H W_t = \alpha\ \ c_H \int_0^t u^{\alpha}\left(\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}dx\right)\ du = \alpha\ \ c_H \cdot \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot B(1-\alpha,\ \alpha)$.

Отже, $\mathrm{E}(B_t^H - aW_t)^2 = t^{2H} - 2a\mathrm{E}B_t^H W_t + a^2 t = t^{2H} - 2a\ \ c_1 t^{\alpha+1} + a^2 t =: f(t)$.

Продиференціюємо функцію f по t і прирівняємо до нуля отриману похідну: $2H \cdot t^{2\alpha} - 2ac_1 t^{\alpha} \cdot (\alpha+1) + a^2 = 0$.

Після заміни змінних $t^{\alpha} =: x$ отримаємо квадратне рівняння:

$$2Hx^2 - 2ac_1(\alpha+1)x + a^2 = 0. \quad (2)$$

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння (2):

$$D = 4(\alpha+1)^2 c_1^2 a^2 - 4 \cdot 2H \cdot a^2 = 4a^2 \cdot \left((\alpha+1)^2 c_1^2 - 2H\right). \quad (3)$$

Доведемо, що $D < 0$ при $\frac{1}{2} < H < 1$. Справді,

$$(\alpha+1)^2\left(\alpha c_H \cdot \frac{B(1-\alpha,\ \alpha)}{\alpha+1}\right)^2 - 2H = \left(\alpha \cdot \left(\frac{2H\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(1-2\alpha)}\right)^{1/2} \cdot \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)\right)^2 - 2H = 2H \cdot \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\left(\Gamma(1-\alpha)\right)^3}{\Gamma(1-2\alpha)} - 1\right). \quad (4)$$

Оскільки $\frac{1}{2} < H < 1$, $1-\alpha = \frac{3}{2} - H > 0$, $1-2\alpha = 2-2H > 0$, і всі Γ-функції в (4) – додатні. Отже, достатньо довести, що

$$\Gamma(\alpha+1)\cdot\left(\Gamma(1-\alpha)\right)^3 < \Gamma(1-2\alpha) \text{ при } 0 \le \alpha < \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Якщо $\alpha = 0$, маємо рівність: $\ln\Gamma(\alpha+1) + 3\ln\left(\Gamma(1-\alpha)\right) = \ln\Gamma(1-2\alpha)$.

Якщо $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ і $\varphi'(x) < \psi'(x)$, $x \in (x_0,\ x_1)$, то $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in (x_0, x_1)$.

У нас $\varphi(x) = \ln\Gamma(x+1) + 3\ln\Gamma(1-x)$, $\psi(x) = \ln\Gamma(1-2x)$, при $x_0 = 0$, $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$.

Знайдемо похідні: $\varphi'(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - 3\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}$, $\psi'(x) = -2\frac{\Gamma'(1-2x)}{\Gamma(1-2x)}$.

Скористаємось формулою Гауса [2, с. 772]: $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}\ dt - C$, де C – стала Ейлера, $C \approx 0{,}57721566490$.

Маємо: $\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\ dt - C - 3\int_0^1 \frac{1-t^{-x}}{1-t}\ dt + 3C = 2C + \int_0^1 \frac{3t^{-x} - t^x - 2}{1-t}\ dt$, $\psi'(x) = -2\int_0^1 \frac{1-t^{-2x}}{1-t}\ dt + 2C.$

Таким чином, достатньо довести, що при $t \in (0,1)$ та $x > 0$

$$3t^{-x} - t^x < 2t^{-2x}. \quad (6)$$

Позначимо $t^{-x} =: y$. Тоді нерівність (6) еквівалентна нерівності: $3y^2 - 1 < 2y^3$, $(y-1)^2(2y+1) > 0$, яка, очевидно, має місце при всіх $y = t^{-x}$, $x > 0$ та $t \in (0,1)$.

Таким чином ми довели (5), а отже і те, що дискримінант рівняння (3) є від'ємним. Крім того, ми довели, що $c_1 < \frac{(2H)^{1/2}}{\alpha+1} < 1$. Таким чином, рівняння (2) не має дійсних коренів, коефіцієнт при x^2 в (2) додатний, отже $\frac{df}{dt} > 0$, тобто $f(t)$ зростає по t. Тоді $\max_{[0,T]} f(t) = f(T)$.

Оскільки

$$f(T) = \mathrm{E}(B_T^H - aW_T)^2 = a^2 T - 2c_1 T^{\alpha+1} a + T^{2H}, \quad (7)$$

шукаємо точку мінімуму квадратного тричлена (7) від a: $a_{\min} = \frac{2c_1 \cdot T^{\alpha+1}}{2T} = c_1 \cdot T^{\alpha}$.

Отже, $\min_{\alpha}\max_{t} \mathrm{E}(B_t^H - aW_t)^2 = \left(c_1 T^{\alpha}\right)^2 T - 2c_1^2 T^{\alpha+1} T^{\alpha} + T^{2H} = c_1^2 T^{2\alpha+1} - 2c_1^2 T^{2\alpha+1} + T^{2H} = T^{2H} - c_1^2 T^{2H}$

Розглянемо тепер степеневу функцію зі сталим показником α.

□

Теорема 2. Нехай $a(s)$ – степенева функція виду $a(s)=k\cdot s^{\alpha}$, $k\in\mathbf{R}$, тоді $\min_{k}\max_{0\le t\le T}\mathrm{E}(B_t^H-M_t)^2=T^{2H}\left(1-\frac{c_H^2}{2H}\right)$, де $c_H=\left(\frac{2H\cdot\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$. Причому $k_{\min}=c_H$.

Доведення.

Оскільки $a(s)$ – степенева функція виду $a(s)=k\cdot s^{\alpha}$, то $M_t=\int_0^t a(s)dW_s=k\int_0^t s^{\alpha}dW_s$.

З цього випливає, що

$$\mathrm{E}(B_t^H-k\int_0^t s^{\alpha}dW_s)^2=(\mathrm{E}B_t^H)^2-2k\mathrm{E}\left(B_t^H\int_0^t s^{\alpha}dW_s\right)+k^2\mathrm{E}\left(\int_0^t s^{\alpha}dW_s\right)^2=:g(t). \tag{8}$$

Знайдемо $\mathrm{E}\left(B_t^H\int_0^t s^{\alpha}dW_s\right)$ та $\mathrm{E}\left(\int_0^t s^{\alpha}dW_s\right)^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(B_t^H\int_0^t s^{\alpha}dW_s\right)&=\mathrm{E}\left(\int_0^t z(t,\ s)dW_s\int_0^t s^{\alpha}dW_s\right)=\int_0^t z(t,s)\ s^{\alpha}ds=\alpha c_H\int_0^t\left(\int_s^t u^{\alpha}(u-\ s)^{\alpha-1}du\right)ds=\\&=\alpha c_H\int_0^t u^{\alpha}\left(\int_0^u(u-s)^{\alpha-1}ds\right)du=\ c_H\int_0^t u^{2\alpha}du=\frac{c_H}{2\alpha+1}t^{2\alpha+1},\end{aligned}\tag{9}$$

Далі, $\mathrm{E}\left(\int_0^t s^{\alpha}dW_s\right)^2=\int_0^t s^{2\alpha}ds=\frac{t^{2H}}{2H}$.

Отже, (8) має вигляд: $g(t)=t^{2H}-2k\cdot\frac{c_H t^{2H}}{2H}+k^2\cdot\frac{t^{2H}}{2H}=t^{2H}\left(1-k\cdot\frac{c_H}{H}+k^2\cdot\frac{1}{2H}\right)$.

Взагалі, $\mathrm{E}(\ \cdot\ )^2$ не від'ємне, отже і $g(t)$ не від'ємна і не спадає по $t\in[0,\ T]$. Якщо квадратний тричлен $1-k\cdot\frac{c_H}{H}+k^2\cdot\frac{1}{2H}>0$ для всіх k, то

$$\max_{[0,T]}g(t)=T^{2H}\left(1-k\cdot\frac{c_H}{H}+k^2\cdot\frac{1}{2H}\right)\tag{10}$$

Знайдемо точку мінімуму вказаного квадратного тричлена $1-k\cdot\frac{c_H}{H}+k^2\cdot\frac{1}{2H}$: $k_{\min}=c_H$, і при цьому

$$1-k_{\min}\cdot\frac{c_H}{H}+k_{\min}{}^2\cdot\frac{1}{2H}=1-\frac{c_H^2}{2H}=1-\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H-\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)}..$$

Перевіримо за допомогою формули Гаусса нерівність $\Gamma(\frac{3}{2}-H)<\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)$, $\frac{1}{2}<H<1$. Ця нерівність еквівалентна такій: $\Gamma(x)<\Gamma(2-x)\Gamma(2x-1)$, $\frac{1}{2}<x<1$. При $x=1$ маємо рівність, а для похідних потрібна нерівність $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}>-\frac{\Gamma'(2-x)}{\Gamma(2-x)}+2\frac{\Gamma'(2x-1)}{\Gamma(2x-1)}$, або, з використанням формули Гаусса $\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt>-\int_0^1\frac{1-t^{1-x}}{1-t}dt+2\int_0^1\frac{1-t^{2x-2}}{1-t}dt$, або ще $\int_0^1\frac{t^{1-x}+t^{x-1}-2t^{2x-2}}{1-t}dt<0$, $\frac{1}{2}<x<1$. При заміні $t^{x-1}=z$ чисельник перетворюється на $(1-z)(1+z+2z^2)<0$, оскільки $0<t<1$, $-\frac{1}{2}<x-1<0$, і значить, $z>1$.

Отже,

$$\min_{k}\max_{0\le t\le T}\mathrm{E}(B_t^H-k\int_0^t s^{H-\frac{1}{2}}dW_s)^2=T^{2H}\left(1-c_H\cdot\frac{c_H}{H}+c_H^2\cdot\frac{1}{2H}\right)=T^{2H}\left(1-\frac{c_H^2}{2H}\right).\qquad\square$$

Розглянемо більш загальний випадок.

Для цього використаємо такі відомі факти з математичного аналізу [2]:

Означення. Нехай $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ – функція від однієї змінної, тоді $g(x_1,x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1\ne x_2$, $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ – це функція нахилу.

Теорема 3. [2] Якщо f – строго опукла донизу, то функція g строго зростає по одній змінній при фіксованій другій.

Наслідок 1. Якщо функція f – строго опукла донизу, а g – функція нахилу при фіксованих x_1 та x_2, $x_1 \neq x_2$, тоді $g(x_1+\alpha,\ x_2+\alpha)$ строго зростає по $\alpha > 0$.

Теорема 4. Нехай $a(s)$ – степенева функція виду $a(s) = k \cdot s^{\gamma}$, $k \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$, тоді $\min\limits_{\gamma}\min\limits_{k}\max\limits_{0\le t\le T} \mathrm{E}(B_t^H - M_t)^2 = T^{2H}(1-c_1^2(H))$, причому мінімум досягається при $\gamma = 0$ та $k_{\min} = c_1(H)\cdot T^{\alpha}$.

Доведення. Оскільки $a(s)$ – степенева функція виду $a(s) = k\cdot s^{\gamma}$, то $M_t = \int\limits_0^t a(s)dW_s = k\int\limits_0^t s^{\gamma}dW_s$.

Тоді, використовуючи (9) та рівність $\mathrm{E}\left(\int\limits_0^t s^{\gamma}dW_s\right)^2 = \int\limits_0^t s^{2\gamma}ds = \dfrac{t^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}$, $2\gamma+1>0$, маємо:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(B_t^H - k\int\limits_0^t s^{\gamma}dW_s)^2 &= (\mathrm{E}B_t^H)^2 - 2k\mathrm{E}\left(B_t^H\int\limits_0^t s^{\gamma}dW_s\right) + k^2\mathrm{E}\left(\int\limits_0^t s^{\gamma}dW_s\right)^2 = \\ &= t^{2H} - 2k\cdot c_2(H,\gamma)\cdot t^{\alpha+\gamma} + k^2\cdot\frac{t^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} =: h(t),\end{aligned} \tag{11}$$

де $c_2(H,\gamma) = \dfrac{\alpha\, c_H B(1-\alpha+\gamma,\alpha)}{\alpha+\gamma+1}$.

Продиференціюємо функцію h по t:

$$\frac{dh}{dt} = 2H\cdot t^{2H-1} - 2k\, c_2(H,\gamma)\cdot(\alpha+1+\gamma)\,t^{\alpha+\gamma} + k^2\cdot\frac{1}{2\gamma+1}\cdot(2\gamma+1)t^{2\gamma} =$$
$$= t^{2H-1}\left(2H - 2k\, c_2(H,\gamma)\cdot(\alpha+1+\gamma)\,t^{-\alpha+\gamma} + k^2\cdot t^{-2\alpha+2\gamma}\right).$$

Перевіримо, чи $\exists\ t\in[0,T]$ таке, що $\dfrac{dh}{dt} = 0$, тобто $k^2\cdot t^{-2\alpha+2\gamma} - 2kc_2(H,\gamma)\cdot(\alpha+1+\gamma)t^{-\alpha+\gamma} + 2H = 0$.

Зробимо заміну $k\cdot t^{-\alpha+\gamma} =: x$, отримаємо:

$$x^2 - 2c_2(H,\gamma)\cdot(\alpha+1+\gamma)\cdot x + 2H = 0. \tag{12}$$

Знайдемо дискримінант D_1 квадратного тричлена (13):

$$D_1 = 4c_2^2(H,\gamma)(\alpha+1+\gamma)^2 - 8H. \tag{13}$$

$D_1 < 0$ при $\frac{1}{2} < H < 1$, $\gamma > 0$. Доведемо це.

$$\begin{aligned}4\cdot\left(\frac{\alpha c_H B(1-\alpha+\gamma,\ \alpha)}{\alpha+\gamma+1}\right)^2\cdot(\alpha+\gamma+1)^2 - 8H &= 4\cdot\alpha^2\cdot\frac{2H\cdot\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(1-2\alpha)}\cdot\left(\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)\cdot\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\gamma)}\right)^2 - 8H = \\ &= 8H\cdot\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)}\cdot\left(\frac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}\right)^2 - 1\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Якщо в (14) $\alpha = 0$, отримаємо (4). Вище вже довели, що цей дискримінант $D < 0$.

Покажемо, що $D_1 < 0$ при $\gamma > 0$.

Покажемо, що вираз $\dfrac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} =: z(\gamma)$ із (14) спадає по $\gamma > 0$. Оскільки $z(\gamma) > 0$ при $\gamma > 0$, то все одно, що довести, що $\ln z(\gamma)$ – спадає по $\gamma > 0$.

Розглянемо $\ln\left(\dfrac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}\right) = (-\alpha)\cdot\dfrac{\ln\big(\Gamma(1+\gamma)\big) - \ln\big(\Gamma(1-\alpha+\gamma)\big)}{(1+\gamma)-(1-\alpha+\gamma)}$; позначимо $\dfrac{\ln\big(\Gamma(1+\gamma)\big) - \ln\big(\Gamma(1-\alpha+\gamma)\big)}{(1+\gamma)-(1-\alpha+\gamma)} =: \omega(\gamma)$

Зауважимо, що $\ln\Gamma(x)$ –опукла донизу функція. З наслідку 1 випливає тоді, що функція нахилу $\omega(\gamma)$ зростає по γ, а $-\alpha = \frac{1}{2} - H < 0$ і не залежить від γ, тому $\ln z(\gamma)$ буде спадати по γ, отже сам вираз $z(\gamma)$ при $\gamma > 0$ буде менше, ніж $\dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1-\alpha)$. Таким чином, при $\alpha > 0$ $\dfrac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} < \dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}$. Отже $D_1 < D < 0$, де вираз для D

треба взяти з формули (4). Коефіцієнт при x^2 в (12) додатний, отже графік функції опуклий донизу, тоді $\frac{dh}{dt} > 0$, тобто функція h зростає по t. Тоді $\max_{[0,T]} h(t) = h(T) = \mathrm{E}(B_T^H - k\int_0^T s^\gamma dW_s)^2$. Оскільки

$$h(T) = h(T,\gamma,k) = T^{2H} - 2k \cdot c_2(H,\gamma) \cdot T^{H+\frac{1}{2}+\gamma} + k^2 \cdot \frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}, \tag{15}$$

то мінімізуємо квадратний тричлен (15) по k: $k_{\min} = k_{\min}(\gamma) = \dfrac{2c_2(H,\gamma)\cdot T^{\alpha+1+\gamma}}{2\cdot \frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}} = (2\gamma+1)\cdot c_2(H,\gamma)\cdot T^{\alpha-\gamma}$. Отже,

$$\begin{aligned}\min_{k\in\mathbf{R}} \max_{0\le t\le T} \mathrm{E}(B_t^H - k\int_0^t s^\gamma dW_s)^2 &= T^{2H} - 2(2\gamma+1)\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{\alpha-\gamma}\cdot T^{\alpha+1+\gamma} + \\ &+(2\gamma+1)^2 \cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{2\alpha-2\gamma}\cdot\frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} = T^{2H} - 2(2\gamma+1)\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{2H} + (2\gamma+1)\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{2H} = \\ &= T^{2H} - (2\gamma+1)\cdot c_2^2(H,\gamma)\cdot T^{2H}.\end{aligned} \tag{16}$$

Мінімізуємо (16) по γ. Для цього треба знайти, в якій точці досягається $\max_{\gamma\ge 0}(2\gamma+1)c_2^2(H,\gamma)$ або, що еквівалентно, точку, в якій досягається $\max_{\gamma\ge 0}\dfrac{\sqrt{2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1}\dfrac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$, в залежності від $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$. Розглянемо функцію $g(\gamma) := \dfrac{\sqrt{2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1}\dfrac{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$, $\gamma \ge 0$. Її похідна, з точністю до додатного множника, дорівнює $\Gamma(1+\gamma)\Gamma(1-\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma+1)\sqrt{2\gamma+1}\left(\dfrac{\Gamma'(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} - \dfrac{\Gamma'(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} + \dfrac{1}{2\gamma+1} - \dfrac{1}{\alpha+\gamma+1}\right)$. Знайдемо знак функції $p(\gamma,\alpha) := \dfrac{\Gamma'(1-\alpha+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} - \dfrac{\Gamma'(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} + \dfrac{1}{2\gamma+1} - \dfrac{1}{\alpha+\gamma+1}$, $\gamma \ge 0$. За формулою Гаусса $p(\gamma,\alpha) = \int_0^1 \dfrac{t^\gamma - t^{\gamma-\alpha}}{1-t}dt + \dfrac{1}{2\gamma+1} - \dfrac{1}{\alpha+\gamma+1}$, $\gamma \ge 0$.

Якщо $\alpha = 0$, то $p(\gamma,0) < 0$. Крім того, $\dfrac{\partial p(\gamma,\alpha)}{\partial\alpha} = \int_0^1 \dfrac{t^{\gamma-\alpha}\ln t}{1-t}dt + \dfrac{1}{(\alpha+\gamma+1)^2}$. На відрізку $[0,1]$ $\left|\dfrac{\ln t}{1-t}\right| \ge 1$ і $\ln t < 0$. Тому $\frac{\partial p(\gamma,\alpha)}{\partial\alpha} < -\int_0^1 t^{\gamma-\alpha}dt + \frac{1}{(\gamma+\alpha+1)^2} = -\frac{1}{\gamma-\alpha+1} + \frac{1}{(\gamma+\alpha+1)^2} = \frac{-\gamma^2-\alpha^2-2\gamma\alpha-3\alpha-\gamma}{(\gamma-\alpha+1)(\gamma+\alpha+1)^2} < 0$.

Отже, $p(\gamma,\alpha) < 0$ при всіх $\gamma \ge 0$. Це і означає, що похідна функції $g(\gamma)$ від'ємна при всіх $\gamma \ge 0$, а значить $\max_{\gamma\ge 0}(2\gamma+1)c_2^2(H,\gamma)$ і, відповідно $\min_\gamma$ в (16) досягається в точці $\gamma = 0$. Таким чином,

$$\min_{\gamma\ge 0}\ \min_{k\in\mathbf{R}} \max_{0\le t\le T} \mathrm{E}(B_t^H - k\int_0^t s^\gamma dW_s)^2 = \max_{0\le t\le T}\mathrm{E}(B_t^H - k_{\min}W_t)^2 = T^{2H}(1-c_2^2(H,0)) = T^{2H}(1-c_1^2),$$

і з усіх степеневих функцій найкраще наближення надає стала функція. $\square$

Зауваження 2. Покажемо, що в теоремі 4 $\min_{\gamma,k} h(T,\gamma,k) = \min_\gamma \min_k h(T,\gamma,k)$, де мінімум береться по $\gamma \ge 0$, $k \in \mathbf{R}$. Справді, нехай $\min_{\gamma,k} h(T,\gamma,k) = h(T,\gamma_0,k_0)$. Тоді, очевидно, $k_0 = k_{\min}(\gamma_0)$, а тоді і $\gamma_0 = 0$. Крім того, $\lim_{\gamma\to\infty} h(T,\gamma,k) = \begin{cases} T^{2H}, & якщо\ T \le 1 \\ \infty, & якщо\ T > 1 \end{cases}$, тобто мінімум справді досягається в деякій скінченній точці.

3. Висновки.

В статті розглянуто найпростіші мартингали найкращого наближення до дробового броунівського руху.

1. *Андрощук Т.* Наближення стохастичного інтегралу по дробовому броунівському руху інтегралами по абсолютно неперервним процесам // Теор. ймов. та мат. статистика. – 2005. – 73. 2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 2. – М., 1969. 3. *Androshchuk T., Mishura Y.* Mixed Brownian–fractional Brownian model: absence of arbitrage and related topics // Stochastics: An Int.J.Prob.Stoch.Proc. – 2006. – 78. 4. *Norros I., Valkeila E., Virtamo J.* An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions // Bernoulli. – 1999. – 5(4). 5. *Thao T.H.* A note on fractional Brownian motion // Vietnam J. Math. – 2003. – 31, № 3.

Надійшла до редколегії 20.03.2007