УДК 532.5

О.Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, О.Хорошилов, канд. фіз.-мат. наук
Email: alex_z_ua@ukr.net

УТОЧНЕННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГАЗОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ, ЩО МАЮТЬ ОСОБЛИВІСТЬ НА ВІЛЬНІЙ МЕЖІ

На прикладі математичної моделі надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, проведено вдосконалення методу побудови розв'язку крайової задачі з вільною межею в околі якої існує особливість. Розроблений алгоритм чисельного розв'язання крайової задачі дає змогу виконати умови незмінності функції ентропії на поверхні розділу двох потоків, поперечний перетин якої має форму кола.

On the example of mathematical model of the supersonic flowing around of of conical porous bodies without axial symmetry, everywhere surface of which the strong is carried out blew gas, perfection of method of construction of decision of regional task is conducted with free granitseyu in okoli which a feature is. The algorithm of numeral solution of boundary task is developed enables to execute the terms of invariability of function of entropii on the surface of section of two streams, the transversal crossing of which has a form of circle.

1. Вступ.

В роботі [3] побудована математична модель надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу. Сформульовано пряму та обернену крайові задачі із вільною границею. Слід вказати, що за межами викладеного в [3] матеріалу залишилося питання побудови розв'язку задачі у околі поверхні контактного розриву (поверхні розділу), якою на основі проведеного асимптотичного аналізу заміню-ється шар змішування (взаємодії) зовнішнього і внутрішнього потоків. В роботі [1] на базі математичної моделі з [3] розроблено метод побудови розв'язку крайової задачі з вільною границею, в околі якої існує особливість. Знайдені умови існування регулярного розв'язку та розроблений алгоритм чисельного розв'язання крайової задачі у всій області течії. Однак, аналіз результатів, отриманих за викладеним в [1] методом, показав, що для окремого випадку «прямої» задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, треба додатково розглянути питання поведінки функції ентропії у околі поверхні контактного розподілу.

Дійсно, згідно постановці задачі в [3] у загальному випадку функція ентропії S представлена у вигляді

$$S = S_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l S_l \cos(l\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m S_m \sin(m\varphi), \tag{1}$$

Для окремого випадку «прямої» задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, на цій поверхні

$$S = S_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l S_l \cos l\varphi \ . \tag{2}$$

Тобто, ентропія є функцією від змінної φ всюди, включаючи поверхню контактного розриву. У той же час, відомо, що А.Феррі, виходячі з физичних меркувань, доказав, що ентропія на поверхні вісесиметричного конуса має бути постійною [4].

Тому у околі контактної поверхні треба провести додаткове дослідження поведінки газодинамічних функцій.

2. Метод розв'язання.

Повернемося до роботи [3], де вісесиметрична течія описується нелінійною системою нульового наближення:

$$\begin{gathered} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi_N} + \frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{d\xi_N} - \sigma_0\eta_0 u_0 v_0 = 0,\ \ v_0\frac{dp_0}{d\xi_N} + \gamma p_0 \frac{dv_0}{d\xi_N} - \sigma_0\gamma p_0\left(v_0 + 2\eta_0 u_0\right) = 0, \\ \frac{dp_0}{d\xi_N} - \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{d\xi_N} = 0,\ \ {u_0}^2 + {v_0}^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c. \end{gathered} \tag{3}$$

У загальному випадку для визначення збурень вісесиметричної течії маємо дві лінійні системи диференційних рівнянь. Перша з них не залежить від параметра Θ_m, а друга - від Θ_l. Таким чином, в кожній області I і II для визначення збурень в основному вісесиметричному потоці маємо наступні дві лінійні системи диференційних рівнянь:

$$\begin{gathered} v_0\frac{dv_i}{d\xi_N} + v_i\frac{dv_0}{d\xi_N} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{dp_i}{d\xi_N} - \frac{\rho_i}{\rho_0}\frac{dp_0}{d\xi_N}\right) - \sigma_0\left(\eta_0 u_0 v_i + \eta_0 u_i v_0 + \eta_i u_0 v_0\right) - \sigma_i\eta_0 u_0 v_0 = 0, \\ v_0\frac{dw_i}{d\xi_0} - \sigma_0\left[w_i\left(v_0 + \eta_0 u_0\right) - \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\rho_0}\left(p_i + \frac{\eta_i}{\Theta_0 - \Delta_0}\frac{dp_0}{d\xi_0}\right)\right] = 0, \\ v_0\frac{dp_i}{d\xi_0} + v_i\frac{dp_0}{d\xi_0} + \gamma\left(p_i\frac{dv_0}{d\xi_0} + p_0\frac{dv_i}{d\xi_0}\right) - \gamma\sigma_0\Big\{p_i\left(v_0 + 2\eta_0 u_0\right) + \\ p_0\left[v_i + 2\left(\eta_0 u_i + \eta_i u_0\right) + w_i\sqrt{1+\eta_0^2}\right]\Big\} - \sigma_i\gamma p_0\left(v_o + 2\eta_0 u_0\right) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

$$u_0u_i+v_0v_i+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p_i}{p_0}-\frac{\rho_i}{\rho_0}\right)=0,$$

$$\frac{p_i}{p_0}-\gamma\frac{\rho_i}{\rho_0}=S_i,\qquad i=l,m$$

У рівняннях систем (3) і (4) прийняті такі позначення:

$$\sigma_0=\frac{\Theta_0-\Delta_0}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)},\quad \eta_0=\Theta_0+\xi\left(\Delta_0-\Theta_0\right),\quad \sigma_l=\frac{\Theta_l-\sigma_0\left(1+3\eta_0^2\right)\eta_l}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)},\quad \sigma_m=\frac{\Theta_m-\sigma_0\left(1+3\eta_0^2\right)\eta_m}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)},$$

$$\eta_l=\Theta_l\left(1-\xi\right),\quad \eta_m=\Theta_m\left(1-\xi\right),\quad c=\frac{c_{kp_\infty}}{c_{kp_{bd}}},$$

N - номер області течії.

Для окремого випадку «прямої» задачі в [3], коли поперечний перетин конічної поверхні розділу має форму кола, в області I залишиться лише одна система рівнянь першого наближення. В області II треба розглядати обидві системи рівнянь. Такий підхід є справедливим й для граничних умов.

Нагадаємо, що при побудові крайових задач першого наближення в рівняннях та граничних умовах залишалися лише члени першого порядку відносно δ_i. Внаслідок цього, у системі рівнянь Ейлера в рівнянні для ентропії не був врахований член:

$$Bw\sqrt{1+\eta^2}\,\frac{\partial S}{\partial\varphi}, \tag{5}$$

який має другий порядок малості по δ_i, але стає головним при малих значеннях ξ, коли перший додаток рівняння наближається до нуля.

На перший погляд може здатися, що врахування членів другого порядку малості відносно δ_i дозволить усунути цей недолік розв’язку першого наближення. Однак, в роботі [2], де наводиться обгрунтування теорії першого та другого наближень для задач обтікання вісесиметричних конічних тіл, вказано, що й в другому наближенні розв'язок для функції ентропії в околі поверхні конусу не відповідає физичній моделі.

Тому розглянемо на прикладі крайової задачі в області I дещо інший підхід, який дає змогу забезпечити постійне значення ентропії на поверхні контактного розриву, тобто при $\xi=0$. Для цього треба модифікувати системи рівнянь першого наближення, враховуючи деякі члени більшого порядку малості.

Перепишемо рівняння для ентропії у вигляді: $A\dfrac{\partial S}{\partial\xi}+\varepsilon B\tilde{w}\sqrt{1+\eta^2}\,\dfrac{\partial S}{\partial\varphi}=0,$

де ε - деякий малий параметр, який будемо вважати рівним δ_i, під час асимптотичного аналізу рівнянь. Це дає змогу зберегти в рівняннях *n-го* наближення поряд з членами *n-го* порядку ще і члени порядку δ_i^{n+1}, які стають головними при малих значеннях ξ.

Тоді, для першого наближення ми отримаємо рівняння для ентропії у такому вигляді: $E\left(\xi\right)\dfrac{\partial S_i}{\partial\xi}-\varepsilon_i\sin\varphi\dfrac{\partial S_1}{\partial\varphi}=0,$ де $E\left(\xi\right)=\dfrac{v_0}{B_0w_i\sqrt{1+\eta_0^2}}.$

Загальний розв'язок цього рівняння: $S_1=F\left(b\,\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right),$ де $b=e^{-\delta_i\int_1^\xi\frac{d\xi}{E(\xi)}}$, а F - довільна функція.

Представимо ентропію у першому наближені у вигляді:

$$S_1\left(\xi_N,\varphi\right)=\sum_{k=0}^{n}S_{1_k}\left(\xi\right)\cos k\varphi\,. \tag{6}$$

Якщо в (6) позначити функції ентропії на стрибку ущільнення як S_{1k}, то, якщо обмежившись чотирма членами ряду (тобто $n=3$), отримаємо

$$S_{1k}(\xi)=(s_{10}-s_{12})q_{0k}+(s_{11}-3s_{32})q_{1k}+2s_{12}q_{2k}+4s_{13}q_{3k}, \tag{7}$$

де

$$q_{00}=1,\ q_{01}=q_{02}=q_{03}=0,$$

$$q_{10}=\frac{1-b}{1+b},\ q_{11}=\frac{4b}{(1+b)^2},\ q_{12}=-\frac{4b(1-b)}{(1+b)^3},\ q_{13}=\frac{4b(1-b)^2}{(1+b)^4},\ q_{20}=\frac{1+b^2}{(1+b)^2},$$

$$q_{21}=\frac{4b(1-b)}{(1+b)^3},\ q_{22}=-\frac{4b(1-4b+b^2)}{(1+b)^4},\ q_{23}=\frac{4b(1-b)(1-6b+b^2)}{(1+b)^5},$$

$$q_{30}=\frac{1-b^3}{(1+b)^3},\ q_{31}=\frac{6b(1+b^2)}{(1+b)^4},\ q_{32}=-\frac{6b(1-b)^3}{(1+b)^5},$$

$$q_{33}=\frac{2b}{(1+b)^6}(3-18b+38b^2-18b^3+3b^4).$$

За аналогією з (6), для інших параметрів маємо:

$$u_1=\sum_{k=0}^{n}u_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\ v_1=\sum_{k=0}^{n}v_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\ p_1=\sum_{k=0}^{n}p_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\ \rho_1=\sum_{k=0}^{n}\rho_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,$$

$$w_1=\sum_{k=0}^{n}w_{1_k}(\xi)\sin k\varphi,\ \Delta_1=\sum_{k=0}^{n}\Delta_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\ \Theta_1=\sum_{k=0}^{n}\Theta_{1_k}(\xi)\cos k\varphi,\ \Omega_1=\sum_{k=0}^{n}\Omega_{1_k}(\xi)\cos k\varphi.$$

Система рівнянь для визначення цих параметрів має вигляд:

$$\begin{aligned}&\frac{dv_{1_k}}{d\xi}=\frac{1}{v_0^2-c_0^2}\left(C_{1_k}v_0-\frac{1}{\rho_0}D_{1_k}\right),\quad \frac{dp_{1_k}}{d\xi}=\frac{1}{v_0^2-c_0^2}\left(D_{1_k}v_0-\gamma C_{1_k}p_0\right),\\ &\frac{dw_{1_k}}{d\xi}=\frac{K_{1_k}}{v_0},\\ &u_{1_k}=-\frac{1}{u_0}\left[v_0v_{1_k}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p_{1_k}}{p_0}-\frac{\rho_{1_k}}{\rho_0}\right)\right],\quad \rho_{1_k}=\frac{\rho_0}{\gamma}\left(\frac{p_{1_k}}{p_0}-S_{1_k}\right),\end{aligned}\tag{8}$$

де $C_{1_k}=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{v_{1_k}}{v_0}-\frac{\rho_{1_k}}{\rho_0}\right)\frac{dp_0}{d\xi}-u_0u_{1_k}-u_0v_0\left(\eta_0\sigma_{1_k}+\eta_{1_k}\sigma_0\right),$

$$D_{1_k}=\frac{1}{p_0}\left(v_0p_{1_k}-p_0v_{1_k}\right)\frac{dp_0}{d\xi}-\gamma p_0\left[\sigma_0\left(v_{1_k}+2\eta_0u_{1_k}+2\eta_{1_k}u_0\right)+\sigma_{1_k}\left(v_0+2\eta_0u_0\right)-\sigma_0\sqrt{1+\eta_0^2}\,w_{1_k}\right],$$

$$K_{1_k}=\frac{\sigma_0\sqrt{1+\eta_0^2}}{\rho_0}\left(p_{1_k}-\frac{\eta_{1_k}}{\Omega_0-\Theta_0}\frac{dp_0}{d\xi}\right)-\sigma_0\left(v_0+\eta_0u_0\right)w_{1_k}.$$

$$\sigma_0=\frac{\Theta_0-\Delta_0}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)},\quad \eta_0=\Theta_0+\xi_I\left(\Delta_0-\Theta_0\right),\quad \sigma_{1k}=\frac{\Theta_{1k}-\sigma_0\left(1+3\eta_0^2\right)\eta_{1k}}{\eta_0\left(1+\eta_0^2\right)},\quad \eta_{1k}=\Theta_{1k}\left(1-\xi_I\right),\quad c=\frac{c_{kp_\infty}}{c_{kp_{bd}}}.$$

Граничні умови в області I:

на стрибку ущільнення (ξ_I =0):

$$\begin{aligned}&u_{1k}=-\frac{\Omega_0\Omega_{1ki}u_0}{1+\Omega_0^2}+\alpha_{1k},\ v_{1k}=\frac{(\gamma-1)U_{n0}^2-2\gamma p_\infty}{(\gamma+1)U_{n0}^2}U_{1k},\ w_{1k}=\frac{k\left(u_0\Omega_0+v_0\right)\Omega_{1k}}{\Omega_0\sqrt{1+\Omega_0^2}}+\beta_{1k},\\ &p_{1k}=\frac{4U_{0k}U_{1k}}{\gamma+1},\ \rho_{1k}=\frac{4\gamma(\gamma+1)p_\infty U_{0k}U_{1k}}{\left[(\gamma-1)U_{0k}^2+2\gamma p_\infty\right]^2},\end{aligned}\tag{9}$$

$\alpha_{11}=-u_0\Theta_0,\quad \beta_{11}=\Theta_0U_\infty,\quad \alpha_{10}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=\beta_{10}=\beta_{12}=\beta_{13}=0.$

на поверхні розподілу (ξ_I =1): $v_1=0$.

Далі, як і у роботі [1], для того, аби w_m мала скінчене значення на поверхні Θ , необхідно зв'язати функції w_{1k} і p_{1k} співвідношенням

$$w_{1k}(0)=k\frac{\sqrt{1+\Theta_0^2}}{\Theta_0u_0\rho_0}p_{1k}.\tag{10}$$

Після чого можна отримати аналітичний вираз для тангенціальної складової w_m вектора швидкості, який є справедливим у околі поверхні розподілу Θ :

$$w_{1k}\left(\xi_I\right)=w_{1k}(0)\pm\lambda_{1k}\xi_I^{1/2},\quad (k=1,2,...n).,\tag{11}$$

де λ_{1k} - невідомі константи інтегрування, значення яких знаходяться чисельно за допомогою розробленого в [1] алгоритму побудови розв'язку у околі поверхні контактного розриву.

Завдяки запропонованому підходу побудова чисельного розв'язку крайових задач на базі математичної моделі [3] здійснюється за допомогою алгоритмів, розроблених в [3] і [1]. Ускладнення процедури розв'язання цих задач, що пов'язане з необхідністю виконання умови незмінності функції ентропії на поверхні контактного розриву, зводится лише до техничних питань, оскільки, згідно [3], розв'язок крайової задачи будується у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних розв'язків, що задовольняють відповідним граничним умовам. В даному випадку їх кількість збільшується й визначається числом членів в співвідношені (6).

3. Висновки.

На основі математичної моделі надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, проведено вдосконалення розробленого раніш методу побудови розв'язку крайової задачі з вільною границею в околі якої існує особливість. У окремому випадку "прямої" крайової задачі для режима течії, коли поверхня розділу має поперечний перетин у формі кола, розроблений метод розв'язання, що дає змогу виконати умови незмінності функції ентропії на контактній поверхні двох потоків. При цьому зберегаються алгоритми побудови розв'язку задачі, що були розроблені в [3] і [1].

1. Антонов А.М., Зайцев О.В., Хорошилов О.В. Метод розв'язання газодинамічних задач, що мають особливість на вільній межі // Вісн. Київ. ун-ту, Мат., мех. 2006, №17, С. *2. Булах Б.М.* Сверхзвуковой поток около наклоненного кругового конуса// ПММ. 1962, т.XXVI, віп.2, С.300-307. *3.Зайцев О.В., Хорошилов О.В., Черній Д.І.* Метод розв'язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання конічних тіл із вдувом // Вісн. Київ. ун-ту, Мат., мех. 2005, №13, С.54-59. *4. Ferri A.* Supersonic flow around circular cones// NASA TN, №2236.

Надійшла до редколегії 17.08.07