УДК 517.9

Ю. Гріник, асист.

ПРО ІСТОТНИЙ СПЕКТР ОДНОГО МАТРИЧНОГО НЕЕЛІПТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Досліджується істотний спектр однієї нееліптичної граничної задачі
The essential spectrum of a non-elliptic boundary value problem is studied

Вступ. Задача вивчення спектру систем диференціальних операторів змішаного порядку часто виникає в математичній фізиці (див., наприклад, [6; 14]). Найбільш загальні результати для еліптичних за Дугласом-Ніренбергом систем були отримані в [11]. Абстрактний підхід до дослідження істотного спектру блочних матричних операторів був запропонований в [10] (див. також [9; 13]). В роботах [12; 5; 15] цей підхід застосовувався до матричних диференціальних операторів. Зокрема, в [15; 16] було знайдено істотний спектр класу матричних диференціальних операторів змішаного порядку, пов'язаного з моделлю лінійних коливань ідеально провідної нев'язкої плазми у зовнішньому магнітному полі (див. [14]). Ці результати були розвинуті і узагальнені в роботах [1; 2; 4]. В даній роботі ми продовжуємо дослідження [2; 4].

Розглянемо нееліптичні диференціальні оператори вигляду

$$L=\begin{pmatrix} -\rho^{-1}\partial_1\rho a\partial_1+b_{11} & -\rho^{-1}\partial_1\rho a\partial_2+b_{12} & -\rho^{-1}i\partial_1\rho c_1 \\ -\rho^{-1}\partial_2\rho a\partial_1+b_{21} & -\rho^{-1}\partial_2\rho a\partial_2+b_{22} & -\rho^{-1}i\partial_2\rho c_1 \\ -ic_2\partial_1 & -ic_2\partial_2 & d \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$D(L)=\left\{ f=\left(f_1,f_2,f_3\right)^t\in\left(L^2\left(\Omega,\rho\right)\right)^3 \middle| \partial_1 f_1+\partial_2 f_2\in W_2^1\left(\Omega\right), \nu_1 f_1+\nu_2 f_2\,|_{\partial\Omega}=0, f_3\in W_2^1\left(\Omega\right)\right\}$$

у просторі $H=\left(L^2\left(\Omega,\rho\right)\right)^3$. Тут $L^2\left(\Omega,\rho\right)$ – ваговий простір квадратично сумовних на Ω функцій з вагою ρ, $\Omega\subset\mathrm{R}^2$ – обмежена сильно ліпшицева область, тобто для кожної точки границі $\partial\Omega$ існує окіл цієї точки U, що в деякій ортогональній системі координат $U\cap\Omega=\left\{\left(y_1,y_2\right)\in U \middle| y_2=g(y_1)\right\}$ і функція g задовольняє умову Ліпшиця. $\partial_1=\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $\partial_2=\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $\nu=\left(\nu_1,\nu_2\right)$ – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$. Будемо також припускати, що функції a,ρ, c_1, c_2 задовольняють умову Ліпшиця на $\overline{\Omega}$, $b_{ij}, d\in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Крім того, нехай функції a,ρ додатні на $\overline{\Omega}$ (функції b_{ij}, d, c_1, c_2 можуть приймати комплексні значення).

Істотним спектром замкненого оператора S, що діє в банановому просторі E, називається множина тих $\lambda\in\mathrm{C}$, при яких оператор $S-\lambda$ не є фредгольмовим. Фредгольмовим називається замкнений оператор, який має скінченновимірне ядро і образ якого є замкненим підпростором скінченної корозмірності. Теорема Вейля (див [3]) стверджує, що істотний спектр зберігається при відносно компактних збуреннях.

Частинний випадок (1), коли $b_{12}(x)=b_{21}(x)=0$, $b_{11}(x)=b_{22}(x)=b(x)$, $x\in\overline{\Omega}$, а область Ω є обмеженою і кусково класу C^2 всі кути якої опуклі (не більші 180^0), був розглянутий в [15]. При цьому оператор L розглядався на області

$$D(L)=\left\{ f=\left(f_1,f_2,f_3\right)^t\in\left(W_2^1\left(\Omega\right)\right)^3 \middle| \partial_1 f_1+\partial_2 f_2\in W_2^1\left(\Omega\right), \nu_1 f_1+\nu_2 f_2\,|_{\partial\Omega}=0\right\} \tag{2}$$

Було показано, що за наведених вище умов оператор L допускає замикання і істотний спектр цього замикання рівний $\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\overline{L}\right)=b\left(\overline{\Omega}\right)\cup\left(d-\dfrac{c_1c_2}{a}\right)\left(\overline{\Omega}\right)$.

У роботі [2] був розглянутий випадок $b_{12}(x)=b_{21}(x)=0$, $x\in\overline{\Omega}$ з різними коефіцієнтами $b_1(x)=b_{11}(x)$, $b_2(x)=b_{22}(x)$, $x\in\overline{\Omega}$ для оператора виду (1). При цьому була знята умова на гладкість границі $\partial\Omega$ і було показано, що в такому разі оператор L допускає замикання і істотний спектр цього замикання рівний $\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\overline{L}\right)=\bigcup\limits_{x\in\overline{\Omega}}\overline{I}(b_1(x),b_2(x))\cup\left(d-\dfrac{c_1c_2}{a}\right)\left(\overline{\Omega}\right)$. Тут $\bigcup\limits_{x\in\overline{\Omega}}\overline{I}(b_1(x),b_2(x))$ – відрізок комплексної площини з кінцями в точках $b_1(x)$ та $b_2(x)$.

У роботі [4] було запропоновано абстрактний підхід до вивчення істотнього спектра оператора L виду (1) з областю визначення типу (2) у випадку гладкої області Ω. Нарешті, в [1] розглядалося узагальнення результатів [15] на n-вимірний випадок.

Дана робота продовжує дослідження [2; 4; 15]. Зокрема, результати [4] переносяться на довільні обмежені сильно ліпшицеві області. Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. Нехай Ω – обмежена сильно ліпшицева область і функції a, ρ, b_{ij}, d, c_1, c_2 задовольняють вищенаведеним умовам. Припустимо, що симетризована матриця $B^s(x) = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & \dfrac{b_{12}(x)+b_{21}(x)}{2} \\ \dfrac{b_{12}(x)+b_{21}(x)}{2} & b_{22}(x) \end{pmatrix}$ є дійсною для всіх $x \in \overline{\Omega}$. Нехай $\lambda_1^s(x) \le \lambda_2^s(x)$ власні числа матриці $B^s(x)$, $m = \min\left\{\lambda_1^s(x), x \in \overline{\Omega}\right\}$, $M = \max\left\{\lambda_2^s(x), x \in \overline{\Omega}\right\}$. Тоді оператор L виду (1) допускає замикання $\overline{L}$ і істотний спектр цього замикання рівний $\sigma_{\text{ess}}\left(\overline{L}\right) = [m, M] \cup \left(d - \dfrac{c_1 c_2}{a}\right)\left(\overline{\Omega}\right)$.

Пояснимо основні етапи доведення теореми. Нехай оператор T діє з простору $\left(L^2(\Omega, \rho)\right)^2$ в $L^2\left(\Omega, \rho^{-1}\right)$ і визначається наступним чином

$$D(T) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in \left(L^2(\Omega, \rho)\right)^2 \middle| \nabla^t f \in L^2(\Omega, \rho), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 |_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$Tf = \rho a^{\frac{1}{2}} \nabla^t f, \quad f \in D(T).$$

Символами ∇, ∇^t будемо позначати градієнт і дивергенцію. Зауважимо, що нормальна складова на границі є коректно визначеною у випадку сильно ліпшицевої області для функцій $f \in \left(L^2(\Omega, \rho)\right)^2$, у яких $\nabla^t f \in L^2(\Omega, \rho)$ (див. [6]). Оператор T є замкненим і спряжений до нього оператор T^* має вигляд

$$D\left(T^*\right) = W_2^1(\Omega), \qquad T^* g = -\rho^{-1} \nabla a^{\frac{1}{2}} g, \quad g \in D\left(T^*\right).$$

Введемо самоспряжений оператор $A = T^* T$. Зрозуміло, що

$$D(A) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in \left(L^2(\Omega, \rho)\right)^2 \middle| \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 |_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$Af = -\rho^{-1} \nabla \rho a \nabla^t f, \quad f \in D(A).$$

У роботі [15] розглядався оператор A^0, заданий диференціальним виразом (1) на області визначення

$$D(A^0) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^2 \middle| \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 |_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$A^0 f = -\rho^{-1} \nabla \rho a \nabla^t f, \quad f \in D(A^0).$$

Було показано, що оператор A^0 є істотно самоспряженим у випадку обмеженої області Ω з границею кусково класу C^2, усі кути якої опуклі. Зокрема, $\overline{A^0} = A$. Розглянемо оператор $\hat{\Delta} = TT^*$. Маємо

$$\hat{\Delta} g = -\rho a^{\frac{1}{2}} \nabla^t \rho^{-1} \nabla a^{\frac{1}{2}} g, \quad D(\hat{\Delta}) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) \middle| \nabla^t \rho^{-1} \nabla a^{\frac{1}{2}} g \in L^2(\Omega), \nu^t \nabla a^{\frac{1}{2}} g |_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \tag{3}$$

Доведення в [15] істотно використовує те, що для вказаного класу областей

$$D(\hat{\Delta}) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) \middle| a^{\frac{1}{2}} g \in W_2^2(\Omega), \nu^t \nabla a^{\frac{1}{2}} g |_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

У випадку загальної сильно ліпшицевої області це твердження є, взагалі кажучи, невірним (див., наприклад, [8]). Це вимагає відповідної модифікації доведення теореми 1.

Позначимо $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Нехай P – ортогональний проектор на ядро оператора A. Це ядро має вигляд

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in \left(L^2(\Omega, \rho)\right)^2 \middle| \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = 0, \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 |_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Аргументи [4, 15] показують, що

$$\sigma_{\text{ess}}\left(\overline{L}\right) = \sigma_{\text{ess}}(A + B) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a}\right)\left(\overline{\Omega}\right).$$

Множина $\operatorname{Ker} A$ є підпростором $\left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2$, а тому сама є гільбертовим простором з індукованим з $\left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2$ скалярним добутком. Розглянемо в $\operatorname{Ker} A$ оператор

$$\hat{B}f = PBf\,,\ f \in \operatorname{Ker} A\,. \tag{4}$$

В [15] було показано, що $\sigma_{\text{ess}}(A+B) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B})$. Отже, $\sigma_{\text{ess}}(PBP) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}) \cup \{0\}$. Остаточно,

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a}\right)\left(\overline{\Omega}\right). \tag{5}$$

Для знаходження $\sigma_{\text{ess}}(\hat{B})$ в кожній точці $x_0 \in \Omega$ будується сингулярна послідовність функцій $\{f_n, n \ge 1\}$ з носіями, що лежать у відкритих паралелограмах ω_n таких, що $x_0 \in \omega_n \subset \Omega$. При цьому ω_n стягуються до точки x_0. Область Ω можна представити у вигляді $\Omega = \omega_n \cup (\Omega \setminus \omega_n)$, $n \ge 1$. Аналогічно, [4] можна розглядати ортогональні суми операторів типу A та $\hat{\Delta}$ на областях ω_n та $\Omega \setminus \omega_n$ (A' та $\hat{\Delta}'$ відповідно). Ортогональну суму проекторів на ядра операторів типу A розглянутих на областях ω_n та $\Omega \setminus \omega_n$ позначимо P'. При цьому $\Omega \setminus \omega_n$ обов'язково містить кути по 225^0 що не дозволяє безпосередньо застосувати результати [4, 15]. Для вирішення цієї проблеми потрібно внести зміни в наведені в цих работах аргументи. Зокрема, це стосується областей визначення операторів A, $\hat{\Delta}$ і відповідної модіфікації доведення теореми 1.

Для $\lambda \in \rho(\hat{\Delta})$ визначимо допоміжний оператор $Q^0(\lambda)$ наступним чином

$$D(Q^0(\lambda)) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in \left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2 \middle| \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 \,|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$Q^0(\lambda) := \rho^{-1} \nabla a^{\frac{1}{2}} \left(\hat{\Delta} - \lambda\right)^{-1} \rho a^{\frac{1}{2}} \nabla^t f\,,\ f \in D\left(Q^0(\lambda)\right).$$

Подібний оператор, але з іншою областю визначення розглядався в [15]. Елементарні викладки показують, що $Q^0(\lambda)$ є обмеженим на своїй області визначення оператором, а отже, може бути по неперервності розширений до обмеженого на всьому просторі $\left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2$ оператора $Q(\lambda)$. Позначимо $R^0(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{I} + Q^0(\lambda)\right)$, $\lambda \in \rho(\hat{\Delta})$. Нехай $R(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{I} + Q(\lambda)\right)$, $\lambda \in \rho(\hat{\Delta})$ – замикання $R^0(\lambda)$ в $\left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2$. Тоді

$$R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}\,,\ \lambda \in C \setminus R\,. \tag{6}$$

Використовуючи спектральну теорему отримаємо

$$P = -\lim_{\lambda \to 0} \lambda (A - \lambda)^{-1}\,,\ P' = -\lim_{\lambda \to 0} \lambda (A' - \lambda)^{-1} \tag{7}$$

При $\lambda \in \rho(\hat{\Delta})$ визначимо $V^0(\lambda)$ як оператор з простору $\left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2$ в $L^2(\Omega,\rho^{-1})$

$$D(V^0(\lambda)) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in \left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2 \middle| \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 \,|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$V^0(\lambda) := \left(\hat{\Delta} - \lambda\right)^{-1} \rho a^{\frac{1}{2}} \nabla^t f\,,\ f \in D\left(V^0(\lambda)\right).$$

Оператор $V^0(\lambda)$ є обмеженим на своїй області визначення у просторі $L^2(\Omega,\rho^{-1})$, а також (враховуючи обмеженість $Q^0(\lambda)$) одночасно у просторі $W_2^1(\Omega)$. Позначимо неперервне продовження оператора $V^0(\lambda)$ з усього простору $\left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2$ в $L^2(\Omega,\rho^{-1})$ через $V(\lambda)$. Зрозуміло, що неперервне продовження оператора $V^0(\lambda)$ з $\left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2$ в $W_2^1(\Omega)$ буде таким самим. Використовуючи компактність вкладення простору $W_2^1(\Omega)$ в $\left(L^2(\Omega)\right)^2$, отримаємо компактність оператора $V(\lambda)$. З компактності $V^*(\lambda)$ отримаємо компактність $\rho^{-1} \nabla a^{\frac{1}{2}} \left(\hat{\Delta} - \lambda\right)^{-1}$ як оператора з $L^2(\Omega)$ в $\left(L^2(\Omega)\right)^2$.

У просторі $\left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2$ розглянемо оператор

$$D(A_M) = \left\{ f = (f_1, f_2)^t \in \left(L^2(\Omega,\rho)\right)^2 \middle| \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \,|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$A_M f = -\rho^{-1} \nabla \rho a \nabla^t f\,,\ f \in D(A_M)\,.$$

Нехай P_M – ортогональний проектор на ядро оператора A_M. Доведення теореми 1 спирається на метод сингулярних послідовностей і наступні леми (пор., [2; 4; 15]).

Лема 1. Нехай відкритий паралелограм ω такий, що $\overline{\omega} \subset \Omega$ і неперервна функція α фінітна в ω, тоді оператори $P\alpha - \alpha P'$, $P_M \alpha - \alpha P'$ є компактним.

Лема 2. Для довільної функції b неперервної на $\overline{\Omega}$ оператор $Pb - bP$ є компактним.

Лема 3. Нехай Ω – обмежена, сильно ліпшицева область. Визначимо матрицю $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді оператор $P\rho^{-1}\tilde{B}P = 0$.

Зауважимо, що доведення лем 1, 2 спирається на рівності (6) , (7) і компактність оператора $V(\lambda)$. Лема 3 дозволяє перейти до симетризованої матриці B і явно обчислити $\sigma_{\text{ess}}(\hat{B})$. Пояснимо доведення леми 3.

Нехай спочатку $\rho \equiv 1$. Доведемо, що для всіх $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ виконується $\tilde{B}f \in \left(\operatorname{Ker} A\right)^{\perp}$. З [6; 8] відомо, що $\left(\operatorname{Ker} A\right)^{\perp} = \left\{ g = \begin{pmatrix} \partial_1 h \\ \partial_2 h \end{pmatrix} \middle| h \in W_2^1(\Omega) \right\}$. Зокрема, розклад $\left(L^2(\Omega)\right)^2 = \operatorname{Ker} A \oplus \left(\operatorname{Ker} A\right)^{\perp}$ збігається з відомим розкладом Вейля.

Множина $W = \left\{ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \left(C_0^{\infty}(\Omega)\right)^2 \middle| \nabla^t w = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 = 0 \right\}$ (це так звані фінітні соленоїдальні поля) є щільною в просторі $\operatorname{Ker} A$ (див. [8]). Покажемо, що для всіх $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in W$ виконується $\left(\tilde{B}f, g\right) = 0$. Довизначимо функції g_1, g_2 нулем на $\mathrm{R}^2 \setminus \Omega$ і збережемо для них те саме позначення. При цьому $g_1, g_2 \in C_0^{\infty}(\mathrm{R}^2)$, і на R^2 виконується рівність $\partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 = 0$. Отже, форма $-g_2 dx_1 + g_1 dx_2$ є точною, а тому існує функція $h \in C_0^{\infty}(\mathrm{R}^2)$ така, що $\partial_1 h = -g_2$ і $\partial_2 h = g_1$. Використовуючи формулу інтегрування частинами (формулу Гріна), маємо

$$\left(\tilde{B}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right) := \left(f, \nabla h\right) = -\left(\nabla^t f, h\right) + \int_{\partial\Omega} \nu^t f \cdot \overline{h} d\sigma = 0.$$

Розглянемо тепер випадок довільного ρ. Зауважимо, що множина $\operatorname{Ker} A$ не залежить від функції ρ. Але в просторах $\left(L^2(\Omega)\right)^2$ і $\left(L^2(\Omega, \rho)\right)^2$ будуть різні ортогональні доповнення до цієї множини, які ми позначимо відповідно $\left(\operatorname{Ker} A\right)_1^{\perp}$ і $\left(\operatorname{Ker} A\right)^{\perp}$. Зрозуміло, що для всіх $f \in \left(L^2(\Omega, \rho)\right)^2$ (а внаслідок еквівалентності норм також для всіх $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$) має місце $Pf \in \operatorname{Ker} A$ і $\tilde{B}Pf \in \left(\operatorname{Ker} A\right)_1^{\perp}$. Зокрема, для для всіх $g \in \operatorname{Ker} A$ виконується $\left(\tilde{B}Pf, g\right) = 0$. Позначимо через $(\cdot,\cdot)_\rho$ скалярний добуток у просторі $\left(L^2(\Omega, \rho)\right)^2$. Тоді отримаємо, що для всіх $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$, $g \in \operatorname{Ker} A$

$$\left(\rho^{-1}\tilde{B}Pf, g\right)_\rho = \int_\Omega \rho^{-1}\tilde{B}Pf \cdot \overline{g\rho} dx = \int_\Omega \tilde{B}Pf \cdot \overline{g} dx = \left(\tilde{B}Pf, g\right) = 0.$$

Отже, $\rho^{-1}\tilde{B}Pf \in \left(\operatorname{Ker} A\right)^{\perp}$ і $P\rho^{-1}\tilde{B}P = 0$.

Для матриці B, що задовольняє умови теореми 1 запишемо рівність

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dfrac{b_{12}+b_{21}}{2} \\ \dfrac{b_{12}+b_{21}}{2} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b_{12}-b_{21}}{2} \\ \dfrac{b_{21}-b_{12}}{2} & 0 \end{pmatrix} = B^s + \frac{b_{12}-b_{21}}{2}\tilde{B}.$$

Зрозуміло, що матриця B^s є симетричною. Тоді

$$PBP = PB^sP + P\frac{b_{12}-b_{21}}{2}\tilde{B}P =$$

$$= PB^sP + \frac{b_{12}-b_{21}}{2}\rho P\rho^{-1}\tilde{B}P + \left(P\frac{b_{12}-b_{21}}{2}\rho - \frac{b_{12}-b_{21}}{2}\rho P\right)\rho^{-1}\tilde{B}P = PB^sP + \left(P\frac{b_{12}-b_{21}}{2}\rho - \frac{b_{12}-b_{21}}{2}\rho P\right)\rho^{-1}\tilde{B}P.$$

В останній рівності була використана лема 1. Використовуючи неперервність функції $\frac{b_{12}-b_{21}}{2}\rho$ і лему 2 отримаємо, що $PBP - PB^sP$ є компактним оператором. Розглянемо оператор L з коефіцієнтами, визначеними матрицею B^s, і відповідний оператор $\hat{B}^s$, визначений рівністю (3). Використовуючи (4) отримаємо

$$PBP - PB^sP = \begin{pmatrix} \hat{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{B}^s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B}-\hat{B}^s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\hat{B}-\hat{B}^s$ є компактним оператором в $\operatorname{Ker} A$, а тому $\sigma_{\text{ess}}(\hat{B}) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}^s)$ і, враховуючи (5), отримаємо твердження теореми.

Висновки. Результати [4] узагальнені на випадок довільної сильно ліпшицевої обмеженої області $\Omega \subset R^2$.

1. *Гріник Ю. М.* Істотний спектр одного матричного диференціального оператора // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – 2003. – №9. – С. 9–13. 2. *Гриньк Ю. Н., Константинов А. Ю.* О существенном спектре одной граничной задачи // Доклады НАН Украины. – 2002. – №7. – С. 12–16. 3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов – Москва, 1972. 4. *Константинов А. Ю.* О существенном спектре одного класса матричных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. – 2002. – Том 36 вып. 3. – С. 76–78. 5. *Константинов А.Ю.* Спектральный анализ одного класса матричных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. – 1997 – Том 31, вып. 3. – С. 77–80. 6. *Копачевський Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике – Москва, 1989. 7. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно- гладкой границей – М, 1991. 8. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса – Москва, 1981. 9. *Шкаликов А.А.* О существенном спектре матричных операторов // Матем. заметки. – 1995. – № 58. – С. 945–949. 10. *Atkinson F.V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A.A.* The essential spectrum of some matrix operators // Math. Nachr. – 1994. – Vol. 167. – P. 5–20. 11. *Grubb G., Geymonat G.* // The essential spectrum of elliptic systems of mixed order // Math. Annal. – 1977. – Vol. 227, № 3. – P. 247-276. 12. *Hardt V., Mennicken R., Naboko S.* Systems of singular differential operators of mixed order and applications to 1-dimensional MHD problems // Math. Nachr. – 1999. – № 205. – P. 19–68. 13. *Konstantinov A.Yu.* Spectral theory of some matrix differential operators of mixed order // Укр. мат. журн. – 1998. – № 50. – С. 1064–1072. 14. *Lifshitz A.E.* Magnetohydrodynamics and spectral theory. – Dodrecht, 1989. 15. *Langer H., Moller M.* The essential spectrum of a non-elliptic boundary value problem // Math. Nachr. – 1996. – № 178. – P. 233–248. 16. *Raikov G.D.* The spectrum of an ideal magnetohydrodynamic model with translational symmetry // Asymptotic Analysis – 1990. – № 3. – P. 1–35.

Надійшла до редколегії 09.10.08

УДК 513.88: 517.98

А. Кірік, асп., С.Тищенко, доц.
E-mail: alona_kirik@univ.kiev.ua, tish_serg@univ.kiev.ua

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРОСТОРИ ФУНКЦІЙ, ПОБУДОВАНІ ЗА ПОЛІНОМАМИ ЛАГЕРРА (ЧАСТИНА 2)

Побудовані простори основних та узагальнених функцій однієї змінної, використовуючи поліноми Лагерра. Наведений опис простору основних функцій як множини цілих функцій певного порядку росту скінченного типу. Будується сім'я гільбертових просторів, елементи яких записуються у вигляді рядів Фур'є, побудованих за класичними поліномами Лагерра, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють певній умові спадання.

Spaces of trial and generalized functions of one variable using Lagerre polinomials are built. The description of nuclear space of trial functions as set of entire functions certain order of growth and finite type is given. The family of Hilbert spaces elements of which are written as Fur'e series built by means on classical Lagerre polynomials, coefficients Fur'e of which satisfy certain condition of decreasing are built.

1. Вступ

У попередній роботі авторів [4] була побудована і досліджена двопараметрична сім'я просторів основних $L_{s,\beta}(R_+^1)$ і узагальнених $L_{-s,-\beta}(R_+^1)$ функцій однієї змінної, записаних у вигляді рядів Фур'є, побудованих за поліномами Лагерра, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють певній умові спадання. У даній роботі описується двопараметрична сім'я просторів основних та узагальнених функцій, також записаних у вигляді рядів Фур'є, використовуючи інші умови спадання на коефіцієнти Фур'є. В результаті отримуємо інший клас функцій певного порядку росту скінченного типу. Наводиться опис ядерного простору функцій однієї змінної, який є перетином по параметру *s* двопараметричної сім'ї просторів основних функцій.

2. Основні результати роботи

У попередній роботі авторів [4] наводяться всі необхідні визначення й поняття, які стосуються просторів основних та узагальнених функцій.

Нехай $0 \le \beta < \infty$ є фіксованим. Для кожного $s \ge 1$ визначимо гільбертів простір $N_{s,\beta}(R_+^1)$ як множину

$$N_{s,\beta}(R_+^1) = \{u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k l_k(x) \in L^2(R_+^1, e^{-x}dx) : \|u\|_{s,\beta}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 k^s (k!)^\beta < \infty\},\ (u,v)_{s,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \overline{v_k} k^s (k!)^\beta,$$

де $(u_k)_{k=0}^{\infty}, (v_k)_{k=0}^{\infty}$ – коефіцієнти Фур'є розкладу функцій $u(x), v(x)$ за ортонормованим базисом із поліномів Лагерра $(l_k(\cdot))_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L^2(R_+^1, e^{-x}dx)$, $\|\cdot\|_{s,\beta}$ – норма у просторі $N_{s,\beta}(R_+^1)$. Ортонормований базис у просторі $N_{s,\beta}(R_+^1)$ утворюють вектори $(l_k(\cdot) k^{-\frac{s}{2}} (k!)^{-\frac{\beta}{2}})_{k=0}^{\infty}$. Оскільки $\|\cdot\|_{s,\beta} \ge \|\cdot\|_{L^2}$, то вкладення $N_{s,\beta}(R_+^1) \subset L^2(R_+^1, e^{-x}dx)$ є то-