$$(\psi_n)'_z(z,\theta) := T_n\theta e^{T_n z\theta}\left(I - ze^{T_n z}\right)^{-1} + e^{T_n z\theta}(zT_n + I)e^{T_n z}\left(I - ze^{T_n z}\right)^{-2} =$$
$$= T_n\theta\psi_n(z,\theta) + (zT_n + I)\psi_n(z,\theta)\psi_n(z,1),\ z\in S,\ \theta\in[0,1],$$
$$(\psi_n)''_z(z,\theta) := T_n\theta(\psi_n)'_z(z,\theta) + T_n\psi_n(z,\theta)\psi_n(z,1) + (zT_n + I)\Big((\psi_n)'_z(z,\theta)\psi_n(z,1) + \psi_n(z,\theta)(\psi_n)'_z(z,1)\Big),$$
$$z\in S,\ \theta\in[0,1].$$

Тоді, враховуючи, що за умовою $\|T_n\| = O(n),\ n\to\infty$,

$$\sup_{\theta\in[0,1]}\|\psi_n(\theta,\cdot)\|_\infty = O(1),\ n\to\infty,\quad \sup_{\theta\in[0,1]}\left\|(\psi_n)''_z(\theta,\cdot)\right\|_\infty = O\left(n^2\right),\ n\to\infty.$$

З [3] випливає, що $\|\psi_n(M)\| = O(n),\ n\to\infty$. Тому $\|T_n x_n\|_\infty \le \|\psi_n(M)T_n\|\cdot\|P_n y\|_\infty = O\left(n^2\right)\cdot\|P_n y\|_\infty,\ n\to\infty$.

Покладемо

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n .$$

Оскільки з умови випливає рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$, то $\exists Tx\in C(\mathbf{R},\mathbf{B})$ – обмежена і функція x задовольняє рівняння (1). Теорему 2 доведено.

4. Висновки

Знайдено необхідні і достатні умови існування та єдиності обмеженого на осі розв'язку абстрактного лінійного диференціального рівняння першого порядку з запізненням аргументу для довільної відомої обмеженої функції та достатні умови для спеціальної відомої функції.

1. *Рисс Ф., Сёкефальдви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с. 2.*Чайковський А. В.* Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доповіді НАН України. – 2000. – № 8. – С. 33–37. 3. *Чайковський А. В.* Функції від оператора зсуву та їх застосування до різницевих рівнянь // Укр. мат. Журн. – 2010. – №10. – С. 1408–1419.

Надійшла до редакції 08.11.2010 р.

УДК 519.21

І. Дубовецька, асп.

ЗАДАЧА ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Вивчається задача оцінювання лінійного функціонала від невідомих значень періодично корельованої послідовності за спостереженнями, які забруднені шумом. У випадку відомих спектральних щільностей знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала. Для заданого класу допустимих спектральних щільностей визначено найменш сприятливу спектральну щільність та мінімаксну спектральну характеристику оптимальної оцінки функціонала.

The problem of optimal estimation of linear functional depending on unknown values of periodically correlated stochastic sequence from observations of the sequence and noise is considered. Formulas for calculation of mean square error and spectral characteristic of optimal estimate of the functional are proposed in the case when spectral densities are exactly known. The least favorable spectral density and minimax spectral characteristic of optimal estimate of the functional are found for the given class of admissible spectral densities.

1. Вступ

У статті Е. Г. Гладишева [1] проведено аналіз спектральних властивостей та зображень періодично корельованих процесів, який базується на зв'язку періодично корельованих та векторних стаціонарних послідовностей. Завдяки результатам Гладишева задача оцінювання періодично корельованих послідовностей зводиться до відповідної задачі для векторних стаціонарних послідовностей.

Класичні методи розв'язування задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів із відомими спектральними щільностями запропоновані А. Н. Колмогоровим [2], Н. Вінером [8], А. М. Ягломом [9, 10]. Задача прогнозу векторних стаціонарних послідовностей досліджена Ю. А. Розановим [3]. У тому випадку, коли повна інформація про точні значення спектральних щільностей відсутня, але задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовують мінімаксний метод розв'язування задачі оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує значення похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. У. Гренадер [4] вперше застосував мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. У статтях М. П. Моклячука [7], М. П. Моклячука та А. Ю. Масютки [6] досліджено задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей.

У даній статті вивчається задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(j)$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(n)$ за спостереженнями послідовності $\zeta(n)+\theta(n)$ при $n<0$, де $\theta(n)$ – некорельована з $\zeta(n)$ періодично корельована послідовність. Виведено формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оцінки функціонала $A\zeta$ за допомогою класичного методу А. М. Колмогорова у тому випадку, коли відомі спектральні щільності послідовності $\zeta(n)$ та шуму $\theta(n)$.

У випадку, коли спектральні щільності невідомі, але задана множина допустимих спектральних щільностей, вказано формули для визначення найменш сприятливої спектральної щільності та мінімаксної спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\zeta$.

2. Періодично корельовані послідовності, які породжуються векторними стаціонарними.

Періодично корельовані послідовності є стохастичними послідовностями з періодичною структурою [5].

Означення 1. Послідовність комплекснозначних випадкових величин $\zeta(n)$, $M\left|\zeta(n)\right|^2<\infty$, $n\in \mathrm{Z}$, називається періодично корельованою з періодом T (T-періодично корельованою), якщо

$$M\zeta(n+T)=M\zeta(n)\,,\ R(n.m)=R(n+T,m+T),\forall n,m\in \mathrm{Z} \tag{1}$$

і не існує меншого за $T>0$ числа такого, що виконуються рівності (1).

Теорема Гладишева [1]. *Послідовність $\zeta(n),n\in \mathrm{Z},$ є періодично корельованою з періодом T тоді і лише тоді, коли існує така T-вимірна стаціонарна послідовність $\vec{\xi}(n)=\left\{\xi_k(n)\right\}_{k=0}^{T-1}$, що $\zeta(n)$ має зображення*

$$\zeta(n)=\sum_{q=0}^{T-1}e^{2\pi inq/T}\xi_q(n),n\in \mathrm{Z}.$$

Послідовність $\vec{\xi}(n)=\left\{\xi_k(n)\right\}_{k=0}^{T-1}$ називають такою, що породжує $\zeta(n)$.

Позначимо через $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$ матрицю спектральних щільностей T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\xi}(n)$. Через $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ – матрицю спектральних щільностей T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(n)$, отриманої в результаті розбиття на блоки періодично корельованої послідовності $\zeta(n)$, тобто p-та її координата дорівнює

$$\left[\vec{\zeta}(n)\right]^p=\zeta(nT+p),\quad n\in \mathrm{Z},\quad p=0,\ 1,...,T-1.$$

У випадку існування спектральної щільності $f^{\vec{\xi}}(\lambda)$, існує спектральна щільність $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ і виконується рівність

$$f^{\vec{\zeta}}(\lambda)=T\cdot V(\lambda)f^{\vec{\xi}}\left(\lambda/T\right)V^{-1}(\lambda), \tag{2}$$

де $V(\lambda)$ – унітарна матриця з (p,k)-тим елементом $v_{pk}(\lambda)=\dfrac{1}{\sqrt{T}}\exp\left\{\dfrac{2\pi ipk}{T}+\dfrac{i\lambda p}{T}\right\},\ \ p,k=0,1,...,T-1$.

3. Оцінка невідомих значень періодично корельованої послідовності

Користуючись результатами Гладишева, можна записати наступні перетворення

$$A\zeta=\sum_{j=0}^{\infty}a(j)\zeta(j)=\sum_{j=0}^{\infty}a(j)\sum_{q=0}^{T-1}e^{2\pi ijq/T}\xi_q(j)=\sum_{j=0}^{\infty}\vec{a}^T(j)\vec{\xi}(j)=A\vec{\xi},$$

$$\vec{a}(j)=(a_0(j),a_1(j),...,a_{T-1}(j))^T,a_q(j)=a(j)e^{2\pi ijq/T}.$$

Нехай послідовність коефіцієнтів $a(j),j\geq 0,$ що задає функціонал $A\zeta$, задовольняє умови

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|a(j)\right|<\infty,\ \ \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left|a(j)\right|^2<\infty, \tag{3}$$

матриці спектральних щільностей $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ векторних стаціонарних послідовностей $\vec{\zeta}(n)$, $\vec{\theta}(n)$, що отримані розбиттям на блоки $\zeta(n)$, $\theta(n),$ задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi}Tr[(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}]d\lambda<\infty. \tag{4}$$

За умов (3) функціонал $A\zeta$ має скінчений другий момент. Умова (4) є необхідною і достатньою для того, щоб безпомилкова екстраполяція невідомих значень послідовності, що спостерігається, була неможливою.

Позначимо через $L_2^-(f+g)$ підпростір, породжений в $L_2(f+g)$ функціями вигляду $e^{in\lambda}\delta_k$, $\delta_k=\{\delta_{kj}\}_{j=0}^{T-1}$, $k=0,1,...,T-1,\ \ n<0$. Лінійна оцінка $\hat{A}\zeta$ функціонала $A\zeta$ за даними спостережень $\zeta(n)+\theta(n)$ при $n<0$ визначається спектральною характеристикою $h(e^{i\lambda})\in L_2^-(f+g)$. Спектральна характеристика $h(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки $A\zeta$ мінімізує значення середньоквадратичної похибки

$$\min_{h\in L_2^-(f+g)}\Delta(h;f,g)=\min_{\hat{A}\zeta}M\left|A\zeta-\hat{A}\zeta\right|^2=\Delta(h(f,g);f,g)=\Delta(f,g).$$

Застосувавши класичний метод А. М. Колмогорова, встановлюємо справедливість наступної теореми.

Теорема 1. *Оптимальна лінійна оцінка функціонала $A\zeta$ за спостереженнями $\zeta(n)+\theta(n)$ при $n<0$ обчислюється за формулою*

$$\hat{A}\zeta=\int_{-\pi}^{\pi}h^T(f,g)\vec{Z}^{\xi+\eta}(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{T-1}h_k(f,g)Z_k^{\xi+\eta}(d\lambda),$$

де $\vec{\xi}(n)$, $\vec{\eta}(n)$ – векторні стаціонарні послідовності, які породжують $\zeta(n)$, $\theta(n)$, відповідно. Спектральна характеристика $h(f,g)$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f,g)$ такої оцінки визначаються формулами

$$h^T(f,g) = \left(A^T(e^{i\lambda})V^{-1}(T\lambda)f(T\lambda) - T\cdot C^T(e^{i\lambda})V^{-1}(T\lambda)\right)[f(T\lambda)+g(T\lambda)]^{-1}V(T\lambda), \quad (5)$$

$$\Delta(f,g) = \langle \vec{a}, R\vec{a}\rangle + \langle \vec{c}, B\vec{c}\rangle,$$

$$A(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty}\vec{a}(j)e^{i\lambda j}, \quad a_q(j) = a(j)e^{2\pi ijq/T}, \quad q = 0,1,\dots,T-1, \quad C(e^{i\lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty}\vec{c}(n)e^{i\lambda n}, \quad \vec{c} = B^{-1}D\vec{a}, \quad \vec{c} = \{\vec{c}(k)\}_{k=0}^{\infty},$$

елементи $T\times T$ блок-матриць $B = \{B(m,j)\}_{m,j=0}^{\infty}$, $D = \{D(m,j)\}_{m,j=0}^{\infty}$, $R = \{R(m,j)\}_{m,j=0}^{\infty}$ дорівнюють

$$B(m,j) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V^T(T\lambda)\left[(f(T\lambda)+g(T\lambda))^{-1}\right]^T\overline{V}(T\lambda)e^{i\lambda(j-m)}d\lambda,$$

$$D(m,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V^T(T\lambda)\left[f(T\lambda)(f(T\lambda)+g(T\lambda))^{-1}\right]^T\overline{V}(T\lambda)e^{i\lambda(j-m)}d\lambda,$$

$$R(m,j) = \frac{1}{T\cdot 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}V^T(T\lambda)\left[f(T\lambda)(f(T\lambda)+g(T\lambda))^{-1}g(T\lambda)\right]^T\overline{V}(T\lambda)e^{i\lambda(j-m)}d\lambda, m,j\ge 0.$$

За формулою (2) відновлюється матриця спектральної щільності T-блокової стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(n)$.

Нехай послідовність $\vec{\xi}(n) = \{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$, що породжує $\zeta(n)$, допускає канонічний розклад рухомого середнього $\vec{\xi}(n) = \sum_{u=-\infty}^{n}d(n-u)\vec{\varepsilon}(u)$, $d(k) = \{d_{jl}(k)\}_{j=\overline{0,T-1}}^{l=\overline{0,m-1}}$, $\vec{\varepsilon}(u) = \{\varepsilon_l(u)\}_{l=0}^{m-1}$ – векторна стаціонарна послідовність з некорельова- ними значеннями. Тоді матриця спектральної щільності T-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(n)$ допускає канонічну факторизацію

$$\frac{1}{T}\cdot V^{-1}(T\lambda)f(T\lambda)V(T\lambda) = \varphi(\lambda)\varphi^*(\lambda), \varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}d(k)e^{-i\lambda k}. \quad (6)$$

Теорема 2. *Оптимальна лінійна оцінка функціонала $A\zeta$ за спостереженнями $\zeta(n)$ при $n<0$, без шуму $\theta(n)$, обчислюється згідно формули*

$$\hat{A}\zeta = \int_{-\pi}^{\pi}h^T(f)\vec{Z}^{\xi}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{T-1}h_k(f)Z_k^{\xi}(d\lambda), \quad (7)$$

де $\vec{\xi}(n)$ – векторна стаціонарна послідовність, яка породжує $\zeta(n)$. Середньоквадратична похибка $\Delta(f)$ та спектральна характеристика $h(f)$ оцінки $\hat{A}\zeta$ визначаються формулами

$$\Delta(f) = \Delta(h(f),f) = \sum_{k=0}^{\infty}\|(Ad)_k\|^2 = \|Ad\|^2, \quad (8)$$

$$h(f) = A(e^{i\lambda}) - \psi^T(\lambda)r^T(e^{i\lambda}), \quad (9)$$

$(Ad)_k = \sum_{j=k}^{\infty}\vec{a}^T(j)d(j-k)$, $r(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{i\lambda k}$, $\psi(\lambda) = \{\psi_{jk}(\lambda)\}_{j=\overline{0,m-1}}^{k=\overline{0,T-1}}$, $\psi(\lambda)\varphi(\lambda) = I_m$. *Матриця спектральної щільності T-блокової стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(n)$ визначається формулою (2).*

Теорема 3. *Для функціонала $A_N\zeta = \sum_{j=0}^{N}a(j)\zeta(j)$ оптимальна оцінка за спостереженнями $\zeta(n)$ при $n<0$ визначається формулою (7), де середньоквадратична похибка $\Delta_N(f)$ та спектральна характеристика $h_N(f)$ рівні*

$$\Delta_N(f) = \Delta(h_N(f),f) = \sum_{k=0}^{N}\|(A_Nd)_k\|^2 = \|A_Nd\|^2, \quad (10)$$

$$h_N(f) = A_N(e^{i\lambda}) - \psi^T(\lambda)r_N^T(e^{i\lambda}), \quad (11)$$

$$A_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N}\vec{a}(j)e^{i\lambda j}, (A_Nd)_k = \sum_{j=k}^{N}\vec{a}^T(j)d(j-k), r_N(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{i\lambda k}, k = 0,1,\dots,N.$$

4. Мінімаксний метод лінійної екстраполяції

У випадку, коли матриці спектральних щільностей невідомі, проте визначена множина $D = D_f\times D_g$ можливих щільностей, шукають оцінку, яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу допустимих щільностей.

Означення 2. Для заданого класу пар спектральних щільностей $D = D_f\times D_g$ спектральні щільності $f^0(\lambda)\in D_f$, $g^0(\lambda)\in D_g$ називаються найменш сприятливими в класі $g^0(\lambda)\in D_g$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\zeta$, якщо виконуються співвідношення:

$$\Delta(f^0,g^0) = \Delta(h(f^0,g^0);f^0,g^0) = \max_{(f,g)\in D}\Delta(h(f,g);f,g).$$

Означення 3. Для заданого класу пар спектральних щільностей D спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\zeta$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(\lambda)\in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D}L_2^-(f+g), \quad \min_{h\in H_D}\max_{(f,g)\in D}\Delta(h;f,g) = \max_{(f,g)\in D}\Delta(h^0;f,g).$$

Теорема 4. *Спектральні щільності* $f^0(\lambda),\ g^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в* D *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A\zeta$*, якщо коефіцієнти Фур'є матричних функцій* $V^T(T\lambda)\left[(f^0(T\lambda)+g^0(T\lambda))^{-1}\right]^T\overline{V}(T\lambda)$, $V^T(T\lambda)\left[f^0(T\lambda)(f^0(T\lambda)+g^0(T\lambda))^{-1}\right]^T\overline{V}(T\lambda)$, $V^T(T\lambda)\left[f^0(T\lambda)(f^0(T\lambda)+g^0(T\lambda))^{-1}g^0(T\lambda)\right]^T\overline{V}(T\lambda)$ *задають оператори* B^0, D^0, R^0*, які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g)\in D}\left\langle R\vec{a},\vec{a}\right\rangle+\left\langle B^{-1}D\vec{a},D\vec{a}\right\rangle=\left\langle R^0\vec{a},\vec{a}\right\rangle+\left\langle (B^0)^{-1}D^0\vec{a},D^0\vec{a}\right\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0=h(f^0,g^0)$ *обчислюється згідно формули (5) за умови, що* $h(f^0,g^0)\in H_D$.

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\zeta$ та $A_N\zeta$ у класі (6) спектральних щільностей, що допускають факторизацію

$$D_0=\left\{f(\lambda)\left|\frac{1}{T\cdot 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Tr\left(V^{-1}(T\lambda)f(T\lambda)V(T\lambda)\right)d\lambda=p\right.\right\},\quad p \text{ – задане число.}$$

За допомогою методу невизначених множників Лагранжа виводимо системи рівнянь

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\vec{a}(j+m)}\vec{a}^T(k+m)d(k)=\alpha^2 d(j),\quad j\ge 0, \tag{12}$$

$$\sum_{s=0}^{N-r}\sum_{l=0}^{N-s}\overline{\vec{a}(r+s)}\vec{a}^T(l+s)d(l)=\alpha^2 d(r),\quad r=0,...,N, \tag{13}$$

де α^2 – невідомі множники Лагранжа. Із обмежень, що накладаються на щільності із класу D_0, отримуємо умови

$$\|d\|^2=\sum_{l=0}^{\infty}\|d(l)\|^2=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{n=0}^{m-1}|d_{kn}(l)|^2=p, \tag{14}$$

$$\|d\|^2=\sum_{l=0}^{N}\|d(l)\|^2=\sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{n=0}^{m-1}|d_{kn}(l)|^2=p. \tag{15}$$

Теорема 5. *Якщо існує послідовність матриць* $d^0=\{d^0(k),k\ge 0\}$*, що задовольняє системи рівнянь (12) та умову (14), то*

$$f^0(\lambda)=\sqrt{T}V(\lambda)(\sum_{k=0}^{\infty}d^0(k)e^{-i\lambda k/T})\left(\sqrt{T}V(\lambda)(\sum_{k=0}^{\infty}d^0(k)e^{-i\lambda k/T})\right)^*$$

є найменш сприятливою щільністю в класі D_0 *для оптимальної екстраполяції* $A\zeta$***.*** *Функція* $h(f^0)$*, яка обчислюється згідно формули (9), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A\zeta$*. Найбільше значення середньоквадратичної похибки згідно формули (8) дорівнює* $\Delta(f^0)=\alpha^2 p$.

Теорема 6. *Якщо існує послідовність матриць* $d_N^0=\{d^0(k),0\le k\le N\}$*, що задовольняє системи рівнянь (13) та умову (15), то*

$$f^0(\lambda)=\sqrt{T}V(\lambda)(\sum_{k=0}^{N}d^0(k)e^{-i\lambda k/T})\left(\sqrt{T}V(\lambda)(\sum_{k=0}^{N}d^0(k)e^{-i\lambda k/T})\right)^* \tag{16}$$

є найменш сприятливою щільністю в класі D_0 *для оптимальної екстраполяції* $A_N\zeta$***.*** *Функція* $h_N(f^0)$*, яка обчислюється згідно формули (11), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_N\zeta$*. Найбільше значення середньоквадратичної похибки згідно формули (10) дорівнює* $\Delta_N(f^0)=\alpha^2 p$.

Приклад. Розглянемо періодично корельовану послідовність $\zeta(n),\ n\in Z$, з періодом $T=2$. Нехай клас допустимих спектральних щільностей D_0 задано числом $p=4$. Оцінимо лінійний функціонал $A_1\zeta=a(0)\zeta(0)+a(1)\zeta(1)$ при $a(0)=a(1)=1$.

Розв'язками систем (13) за умови (15) у випадку мінімального рангу $m=1$ є

$$d^0(0)=\begin{pmatrix}\sqrt{1-1/\sqrt{17}}\\ \sqrt{1-1/\sqrt{17}}\end{pmatrix},\ d^0(1)=\begin{pmatrix}-\sqrt{1+1/\sqrt{17}}\\ \sqrt{1+1/\sqrt{17}}\end{pmatrix} \text{ та } \alpha^2=(3+\sqrt{17})/2.$$

Тоді найменш сприятлива спектральна щільність 2-вимірної стаціонарної послідовності $\vec{\zeta}(n)$, обчислена згідно формули (16), дорівнює

$$f^0(\lambda)=\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{17}-1 & -4\\ -4 & \sqrt{17}+1\end{pmatrix},$$

найбільше значення середньоквадратичної похибки становить $\alpha^2 p=2(3+\sqrt{17})$. Оптимальна лінійна оцінка функціонала $A_1\zeta$ має вигляд $\hat{A}_1\zeta=\vec{a}^T(0)d(1)\vec{\varepsilon}(-1)=0$.

5. Висновки

У статті отримано формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A\zeta$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності за спостереженнями, які забруднені шумом. Задача розв'язана для двох випадків: матриці спектральних щільностей послідовності та шуму – відомі, та матриці спектральних щільностей точно невідомі, але задана множина допустимих спектральних щільностей.

1. *Гладышев Е. Г.* О периодически коррелированных случайных последовательностях // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1024–1030. 2. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей. – М.: Наука, 1986. 3. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990. – 272 с. 4. *Grenander U.* A prediction problem in game theory // Ark. Mat. – 1957. – № 3. – P. 371–379. 5. *Hurd H. L., Miamee A.* Periodically correlated random sequences. – John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2007. 6. *Moklyachuk M. P., Masyutka O. Yu.* Extrapolation of multidimensional stationary processes // Random Operators and Stochastic Equations. – 2006. – № 14. – P. 233–244. 7. *Moklyachuk M. P.* Robust prediction problem for periodically correlated stochastic sequences // 5th Conference in Actuarial Science and Finance on Samos, Proceedings. – 2009. – P. 51–65. 8. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary line series. Whis engineering applications. – Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1966. 9. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results. – Springer Series in Statistics. – New York etc.: Springer-Verlag, 1987. 10. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references. – Springer Series in Statistics. – New York etc.: Springer-Verlag, 1987.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УДК 519.21

М. Луз, студ.

ФІЛЬТРИ ВІНЕРА-КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

Отримано оптимальні в середньоквадратичному сенсі лінійні оцінки значення стаціонарного випадкового процесу та інтегрального функціонала від значень за спостереженнями стаціонарного випадкового процесу з шумом у дискретні моменти часу.

We propose the mean-square optimal linear estimate of values of stationary stochastic process and integral functional from values based on the sample of stationary stochastic process with noise at discrete moments of time.

1. Вступ

Задача оцінювання стаціонарних у широкому сенсі випадкових процесів вперше поставлена та досліджена у працях Н. Вінера та А. М. Колмогорова в першій половині минулого століття. Основні результати теорії прогнозування стосуються процесів з неперервним або дискретним часом. Такі процеси мають широке застосування у промисловості, економетриці, радіофізиці. Проте часто на практиці отримати спостереження деякого процесу можливо лише через великі проміжки часу, натомість необхідно знаходити оптимальні прогнози у довідльні моменти часу.

У даній статті розв'язано задачу знаходження оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного прогнозу значення стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу, а також лінійного функціоналу від нього, за спостереженнями з шумом через дискретні проміжки часу.

2. Прогноз значення процесу за спостереженнями з шумом

Розглянемо незалежні стаціонарні в широкому сенсі випадкові процеси $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ та $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$ з середніми 0 та коваріаційними функціями $R_X(t)$, $R_Y(t)$, які допускать спектральні розклади

$$R_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} F(d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda, \quad R_Y(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} G(d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} g(\lambda) d\lambda .$$

Припустимо, що відомі значення процесу $\{X_t + Y_t : t \in \mathbb{R}\}$ в точках $t = -1, -2, \ldots$, за якими необхідно побудувати оптимальний в середньоквадратичному сенсі лінійний прогноз значення X_t, $t > 0$.

Спектральну щільність послідовності $\{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ можна отримати наступним чином

$$R(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu n} f(\mu + 2\pi k) d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\mu + 2\pi k) d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu n} \tilde{f}(\mu) d\mu ,$$

тобто $\tilde{f}(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\mu + 2\pi k)$, де $\mu \in (-\pi, \pi]$, – спектральна щільність випадкової послідовності $\{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Випадкові процеси $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ допускають спектральні розклади $X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} Z_X(d\lambda)$, $Y_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} Z_Y(d\lambda)$. Тому шуканий прогноз можна подати у вигляді $\hat{X}_t = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_t(\lambda)(Z_X + Z_Y)(d\lambda).$

Нехай $H_-(X+Y) = L_2^-(X+Y)$ – замкнутий в середньоквадратичному сенсі лінійний підпростір, породжений $X^- = (\ldots, X_{-2} + Y_{-2}, X_{-1} + Y_{-1})$, а $H_-(F+G) = L_2^-(F+G)$ – замкнений в середньоквадратичному сенсі лінійний підпростір, породжений елементами $(\ldots, e^{-2\lambda}, e^{-i\lambda})$.

Треба мінімізувати величину $\mathbf{E}\,|X_t - \tilde{X}_t|^2$, $\tilde{X}_t \in H_-(X+Y)$. Оскільки $H(X+Y)$ – гільбертів простір [2], то даний мінімум досягається на елементі $\hat{X}_t$, який задовольняє наступні умови:

1) $\hat{X}_t \in H_-(X+Y)$;

2) $(\hat{X}_t - X_t) \perp H_-(X+Y)$.