УДК 531.01

Т. Клімчук, студ.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: TaraSyniv@ukr.net

ІНТЕГРОВНІСТЬ СИСТЕМ З МИТТЄВИМИ В'ЯЗЯМИ

Проведено дослідження руху стрижня в однорідному полі сил тяжіння при накладанні миттєвих в'язей. Доведено існування та руйнування інтегралів руху динамічної системи у випадку абсолютно пружного удару. Побудовано перерізи Пуанкаре для дослідження хаотичної поведінки системи.

ВСТУП. Явище удару представляє собою особливий випадок руху матеріальної системи. Удар характеризується тим, що швидкості та кількості руху точок матеріальної системи набувають скінченних приростів за малий проміжок часу, рівний тривалості удару. Відомо, що кінетична енергія системи у випадку абсолютно пружного удару не змінюється [3]. Для того, щоб визначити рух гамільтонової системи з n степенями вільності, необхідно знайти n незалежних інтегралів руху [4]. Неінтегровні системи, в свою чергу, не мають достатньої кількості збережних величин. Рух таких систем може характеризуватися виникненням хаосу [1]. Існує багато прикладів неінтегровних гамільтонових систем, в яких виникає хаос, наприклад, система Ено-Ейлеса [1] чи система Лоренца [2]. В дійсності, багато механічних систем демонструють хаотичну поведінку. Тому дослідження виникнення хаосу в неінтегровних системах є важливим завданням сучасної науки. У даній статті розглядається динамічна система з двома степенями вільності. Аналізується вплив явища удару на інтегровність системи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. У даній статті досліджується рух абсолютно твердого стрижня в однорідному полі сил тяжіння (рис. 1) під дією миттєвих в'язей, що накладаються в скінченні моменти часу. Під миттєвими в'язями будемо розуміти послідовність гладких ударів кінців стрижня (точки M_1 та M_2) об нерухому поверхню з коефіцієнтом відновлення K.

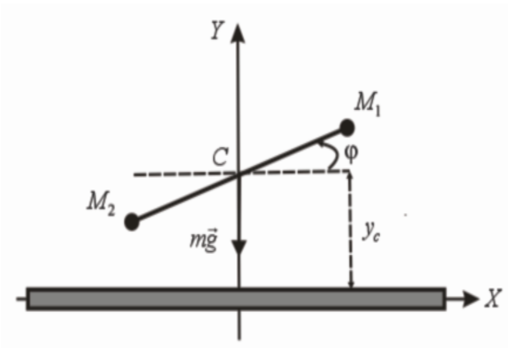

Рис. 1. Схема задачі

Відомі параметри абсолютно твердого стрижня: маса m, довжина L та момент інерції J; параметр задачі – коефіцієнт відновлення після удару K. Диференціальні рівняння руху системи мають вигляд:

$$\ddot{y}_c = -g, \quad J\ddot{\varphi} = 0.$$

Початкові умови руху системи:

$$y_c(t_0) = y_{c0},\ \varphi(t_0) = \varphi_0,\ \dot{y}_c(t_0) = V_{c0},\ \dot{\varphi}(t_0) = \omega_{c0}.$$

ЗАКОНИ ТА ІНТЕГРАЛИ РУХУ СИСТЕМИ НА ПРОМІЖКАХ ЧАСУ МІЖ УДАРАМИ. Досліджувана система має дві степені вільності: y_c – вертикальна координата центра інерції та φ – кут повороту стрижня навколо осі, що проходить через центр інерції (точка C) ортогонально до площини рисунка задачі.

Нехай t_k^- – момент часу безпосередньо перед k-им ударом, t_k^+ – момент часу безпосередньо після k-го удару. Запишемо закони руху системи на проміжках часу між ударами:

$$y_c = -\frac{g}{2}\left(t - t_k^+\right)^2 + V_{ck}^+\left(t - t_k^+\right) + y_{ck}^+, \quad \varphi = \omega_k^+\left(t - t_k^+\right) + \varphi_k^+, \quad t \in \left[t_k^+, t_{k+1}^-\right), \tag{1}$$

де $V_{ck}^\pm = \dot{y}_c\left(t_k^\pm\right),\ y_{ck}^\pm = y_c\left(t_k^\pm\right),\ \omega_k^\pm = \omega\left(t_k^\pm\right),\ \varphi_k^\pm = \varphi\left(t_k^\pm\right).$

Момент удару визначається з умови:

$$y_c\left(t_k^-\right) = \frac{1}{2}L\left|\sin\varphi\left(t_k^-\right)\right|, \ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

На проміжках часу між ударами існують два перших інтеграли руху: інтеграл енергії (система є консервативною) $E = \frac{1}{2}m\dot{y}_c^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mgy_c$ та інтеграл кінетичного моменту $L_z = J\dot{\varphi}$. Система має дві степені вільності, для неї існує два збережних інтеграли руху, а отже, за теоремою Ліувілля вона є інтегровною на проміжках часу між ударами.

ОПИС ЯВИЩА УДАРУ. Вважатимемо удар гладким з коефіцієнтом відновлення K. Оскільки $t_k^+ - t_k^- = \tau << 1,$ то можна знехтувати приростами координат системи [3] і покласти $\varphi_k^+ = \varphi_k^- = \varphi_k,\ \ y_{ck}^+ = y_{ck}^- = y_{ck}.$

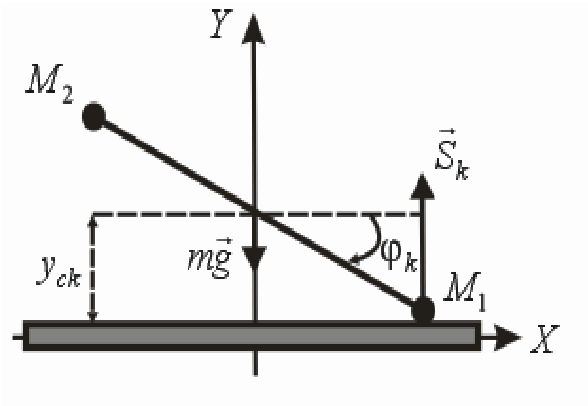

Рис. 2. Удар в точці M_1 **(** $\varphi_k < 0$ **).**

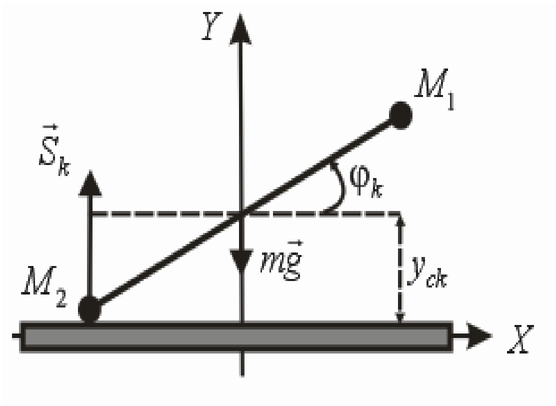

Рис. 3. Удар в точці M_2 **(** $\varphi_k > 0$ **).**

Рівняння першого етапу удару мають вигляд:

$$m\left(V_{ck}-V_{ck}^{-}\right)=S_k^{(1)},\quad J\left(\omega_{ck}-\omega_{ck}^{-}\right)=\pm\frac{1}{2}LS_k^{(1)}\cos\varphi_k. \tag{2}$$

Рівняння другого етапу удару:

$$m\left(V_{ck}^{+}-V_{ck}\right)=S_k^{(2)},\ \ J\left(\omega_{ck}^{+}-\omega_{ck}\right)=\pm\frac{1}{2}LS_k^{(2)}\cos\varphi_k, \tag{3}$$

де $S_k^{(1)}, S_k^{(2)}$ – ударні імпульси на першому та другому етапах удару відповідно; V_{ck},ω_{ck} – швидкості центра інерції системи в момент зупинки. Умова зупинки:

$$V_{ck}=\mp\frac{1}{2}L\omega_{ck}\cos\varphi_k. \tag{4}$$

Верхній знак у формулах (2), (3), (4) відповідає випадку, коли $\varphi_k < 0$ (рис.2), нижній – випадку, коли $\varphi_k > 0$ (рис.3).

Коефіцієнт відновлення після удару:

$$K=S_k^{(2)}\ /\ S_k^{(1)}. \tag{5}$$

Відомі величини: $V_{ck}^{-},\omega_{ck}^{-},\varphi_k$. Маємо систему з 6-ти алгебраїчних рівнянь (2), (3), (4), (5). Невідомих величин також шість: $V_{ck}^{+},\omega_{ck}^{+},V_{ck},\omega_{ck},S_k^{(1)},S_k^{(2)}$.

Отримано наступні вирази для невідомих швидкостей центра інерції системи після k -го удару:

$$\begin{gathered}V_{ck}^{+}=\frac{1}{J+\dfrac{mL^2}{4}\cos^2\varphi_k}\left(\mp(K+1)J\frac{L}{2}\omega_{ck}^{-}\cos\varphi_k-\left(JK-\frac{mL^2}{4}\cos^2\varphi_k\right)V_{ck}^{-}\right),\\ \omega_{ck}^{+}=\frac{1}{J+\dfrac{mL^2}{4}\cos^2\varphi_k}\left(\left(J-K\frac{mL^2}{4}\cos^2\varphi_k\right)\omega_{ck}^{-}\mp(K+1)\frac{mL}{2}V_{ck}^{-}\cos\varphi_k\right).\end{gathered} \tag{6}$$

ІНТЕГРОВНІСТЬ СИСТЕМИ. Враховуючи закони руху системи (1), маємо

$$V_{ck+1}^{-}=-g\left(t_{k+1}^{-}-t_k^{+}\right)+V_{ck}^{+},\quad \omega_{ck+1}^{-}=\omega_{ck}^{+}. \tag{7}$$

Із рівностей $(6), (7)$ випливає, що

$$\omega_{ck+1}^{+}=\Omega\left(V_{ck}^{+},\omega_{ck}^{+},t_{k+1}^{-}-t_k^{+}\right),\ \ V_{ck+1}^{+}=W\left(V_{ck}^{+},\omega_{ck}^{+},t_{k+1}^{-}-t_k^{+}\right).$$

Система має властивість запам'ятовувати свій попередній стан.

Використовуючи співвідношення (6) при умові K =1, вдалося підтвердити, що $E_k^{-}=E_k^{+}=E,$ тобто інтеграл енергії зберігається.

Кінетичний момент системи не зберігається під час удару. Його існування вимагає виконання умови $\omega_{ck}^{+}=\omega_{ck}^{-}$, що є можливим у таких вироджених випадках:

1) $S_k=0$ – відсутність удару об нерухому поверхню,

2) $\omega_{ck}^{-}=\omega_{ck}^{+}=0$ – стрижень ударяється без кутового обертання.

Отже, після удару досліджувана система втрачає один з двох інтегралів руху і стає потенційно неінтегровною. Така динамічна система в залежності від початкових умов руху може демонструвати хаотичну поведінку.

Побудуємо графік зміни кінетичного моменту системи L_z на проміжку часу, що містить $n=60$ послідовних ударів кінців стрижня об нерухому поверхню при значенні коефіцієнта відновлення $K=1$.

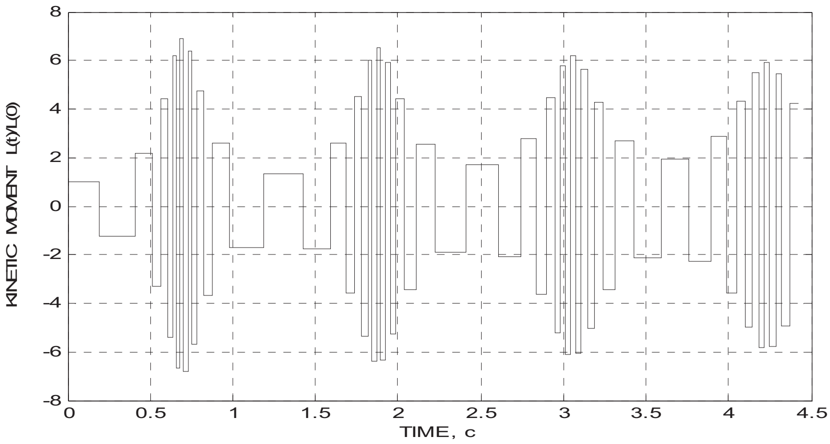

Рис. 4: Стрибки значень кінетичного моменту L_z в послідовні моменти удару.

ГАМІЛЬТОНІВ ОПИС СИСТЕМИ. Нехай y, φ – узагальнені координати системи, а p_y, p_φ – узагальнені імпульси, спряжені до узагальнених координат: $p_y = m\dot{y},\ p_\varphi = J\dot{\varphi}$. Запишемо функцію Гамільтона для початкової системи:

$$H = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2J} + mgy.$$

Оскільки $H = H\left(P_y, P_\varphi, y\right),$ то координата φ – циклічна.

Функція дії у випадку сепарабельної системи [1] має вигляд: $W\left(y,\varphi\right) = W_y\left(y\right) + \beta_\varphi \varphi$. Введемо змінні дії:

$$J_y = \frac{1}{\pi}\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{\partial W_y}{\partial y} dy, J_\varphi = \beta_\varphi.$$

Запишемо рівняння Гамільтона – Якобі: $\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_y}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2J}\beta_\varphi^2 + mgy = E.$

З рівняння маємо: $\frac{dW_y}{dy} = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2J}\beta_\varphi^2 - mgy\right)}$. Умова фізичності: $2m\left(E - \frac{1}{2J}\beta_\varphi^2 - mgy\right) \geq 0$. Дійсно $E \geq \frac{m\dot{y}_c^2}{2} + J\frac{\dot{\varphi}^2}{2} > 0,\ \frac{1}{2J}\beta_\varphi^2 = \frac{1}{2J}J^2\dot{\varphi}^2,$ а отже β_φ – кусково-постійний кінетичний момент. Функція Гамільтона для руху на торі:

$$H = \left(\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} gJ_y\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2J}\beta_\varphi^2.$$

Рівняння, що описують рух на поверхні тору: $\Phi = \omega_\varphi t + \tilde{\varphi}_0, \quad Y = \omega_y t + \tilde{y}_0,$

де $\omega_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \beta_\varphi} = \frac{\beta_\varphi}{J}, \omega_y = \frac{\partial H}{\partial J_y} = \sqrt{\frac{m}{g}}\pi g\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{m}{g}}\pi g J_y\right)^{-\frac{1}{3}}$ – частоти обертання, $\tilde{\varphi}_0, \tilde{y}_0$ – сталі інтегрування.

Між ударами J_y та β_φ є константами і стрибком змінюються під час удару. Якщо $\beta'_\varphi = -\beta_\varphi$, то J_y залишається незмінним. При цьому тор не руйнується, а траєкторія змінює напрямок. Тому умова $\beta'_\varphi = -\beta_\varphi$ є достатньою для інтегровності системи.

Для демонстрації хаотичної поведінки матеріальної системи побудуємо перерізи Пуанкаре [2]. Перерізи Пуанкаре для досліджуваної системи за різних початкових умов мають наступний вигляд.

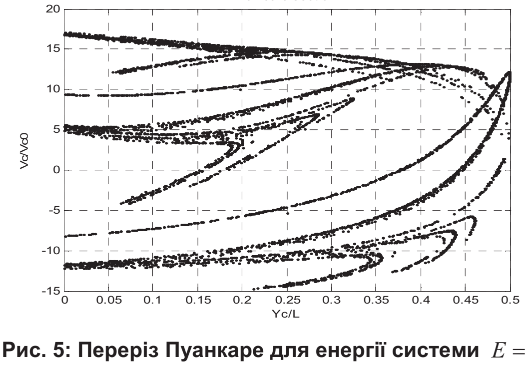

Рис. 5: Переріз Пуанкаре для енергії системи $E = 295$

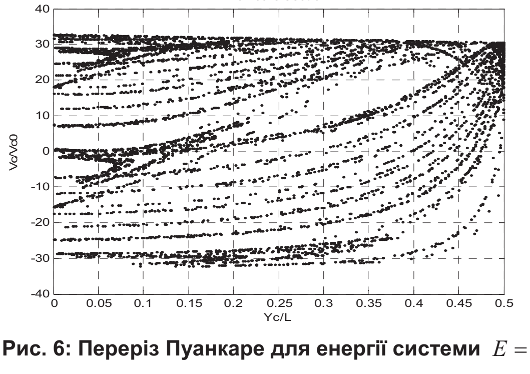

Рис. 6: Переріз Пуанкаре для енергії системи $E = 1079$

ВИСНОВКИ. Проведено аналіз руху абсолютно твердого стрижня з послідовними співударами з нерухомою поверхнею. У випадку відсутності дисипації енергії в системі ($K=1$) показано, що інтеграл енергії системи не змінюється під час удару, тобто система є консервативною. Встановлено потенційну неінтегровність системи. Використавши формалізм Гамільтона, вихідний гамільтоніан системи за допомогою канонічного перетворення зведено до гамільтоніана, залежного лише від змінних дії. Отримано умову, за якої гіперповерхня, що обмежує фазові траєкторії розглядуваної динамічної системи, не руйнується. Для дослідження наявності хаотичних рухів побудовано перерізи Пуанкаре.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гаральд Іро. Класична механіка: переклад з німецької – Львів: ЛНУ, 1999. 2. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Издательство ЛКИ, 2010. 3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. – Т.2, М.: Наука, 1972. 4. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Перевод с англ. – М.: УРСС, 2001.

Надійшла до редколегії 31.10.12

Т. Климчук, студ.

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ С МГНОВЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

Проведено исследование движения стержня в однородном поле сил притяжения при наложении мгновенных связей. Доказано существование и разрушение интегралов движения динамической системы в случае абсолютно упругого удара. Построены сечения Пуанкаре для исследования хаотического поведения системы.

T. Klimchuk, BA

INTEGRABILITY OF SYSTEMS WITH INSTANTANEOUS CONSTRAINTS

Investigations of motion of the rod in the uniform field of gravity forces under the influence of instantaneous constraints were performed. The existence and destruction of motion integrals of the dynamic system in case of absolutely elastic impact were proved. Poincare sections were constructed for the study of chaotic behavior of the system.

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф.,
І. Лоос, канд. .фіз.-мат. наук, П. Голуб, студ.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: Mol_LV@univ.kiev.ua, Loiri@univ.kiev.ua

ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОСТІ НА ЗГИННІ КОЛИВАННЯ СТЕРЖНЯ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

У статті проводиться оцінка впливу геометричної нелінійності при визначенні згинних коливань стержня під дією магнітного поля. Отримані оцінки для стержня характеризують якісну сторону поведінки гнучких пластин та оболонок під дією електромагнітного поля.

ВСТУП. На даний момент у механіці деформівного твердого тіла отримали значний розвиток дослідження з вивчення ефектів взаємодії механічних полів деформування з електромагнітними полями. Фізичні основи цих ефектів детально висвітлені у ряді курсів з класичної електродинаміки та фізики твердого тіла [3–5]. З класичної фізики відомо, що ефекти зв'язаності динамічних переміщень електропровідних тіл з електромагнітним полем зумовлені пондеромоторними силами Лоренца. Останні залежать від швидкості руху елементів провідного суцільного середовища і зовнішнього магнітного поля, а для струмонесучих елементів – від величини та орієнтації струму провідності відносно зовнішнього магнітного поля. Інша важлива обставина, яку необхідно врахувати при постановці і розв'язанні конкретних задач магнітопружності, залежить від того, що істотні ефекти пондеромоторної взаємодії мають місце для високочастотних коливань електромагнітного поля, що вимагає застосування нелінійної теорії.

У даній статті вивчається вплив сталого магнітного поля та змінного електричного струму на нелінійні коливання ізотропного тонкого стержня сталого перетину, що знаходиться під дією електромагнітної сили Лоренца [1,2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ. Розглянемо прямолінійний стержень в прямокутній системі координат (x,y,z) із алюмінію довжини l при шарнірному закріпленні його торців. Вважаємо, що гнучкий стержень знаходиться в постійному зовнішньому магнітному полі і є провідником електричного струму (рис. 1). В результаті взаємодії струму з магнітним полем у стержні виникають об'ємні сили Лоренца

$$\rho\vec{F}=\vec{J}\times\vec{B}\ .$$

Густину струму задаємо виразом $\vec{J}=-J_{10}\sin\omega t\vec{i}$, де ω – кругова частота, а вектор магнітної індукції приймається сталим, $\vec{B}=B_0\vec{j}$. У цьому випадку сила Лоренца рівна $\rho\vec{F}=J_{10}B_0\sin\omega t\vec{k}$, тобто стержень навантажений симетрично до вертикальної площини симетрії xz .

Рівняння поперечного згину стержня у відповідності до рівноваги сил, які діють на елемент вздовж осі z , приймає вигляд

$$\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\sigma_x h\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=J_{10}B_0\sin\omega t\ , \tag{1}$$

де σ_x – мембрана частина нормального напруження; w – прогин стержня; h – товщина стержня; E – модуль Юнга; ρ – густина матеріалу стержня.

Граничні умови при шарнірному закріпленні мають вигляд

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ \ x=l\ . \tag{2}$$