

Приймак М., д-р техн. наук
Тернопольський нац. техн. ун-т імені Івана Пулюя, Тернопіль

ФУНКЦИИ С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПЕРИОДОМ

Дано определение функции с переменным периодом как обобщение периодической функции. Рассмотрены примеры таких функций, исследованы их свойства. Построена ортогональная система тригонометрических функций с изменяющимся периодом.

Pryjmak M., Full Doctor
Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University, Ternopil

FUNCTIONS WITH VARIABLE PERIOD

The definitions of functions with variable period as a generalization of periodic function are given. Examples of such functions are considered and their properties are investigated. Orthogonal of trigonometric functions with variable period is constructed here.

УДК 519.6

Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Вакал, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Л. Вакал, канд. техн. наук
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ
e-mail: jvakal@gmail.com

НАЙКРАЩА АПРОКСИМАЦІЯ ЯДРА ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА З ВИКОРИСТАННЯМ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ

Для розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма II роду з ядром довільного вигляду запропоновано неперервний генетичний алгоритм для найкращої (середньоквадратичної, рівномірної) апроксимації ядра сумами скінченного числа добутків функцій, що залежать тільки від однієї змінної. Показано, що запропонований алгоритм є ефективним засобом апроксимації ядер.

ВСТУП. Інтегральні рівняння відіграють важливу роль у математичному моделюванні різноманітних фізичних процесів і явищ. Вони виникають у багатьох областях науки і техніки, наприклад, у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, теорії масо- і теплоперенесення, біомеханіці, геофізиці, астрономії тощо. Зокрема, до інтегральних рівнянь Фредгольма II роду приводять задачі про вимушені поперечні коливання струни, задачі оптимальної лінійної фільтрації за наявності білого шуму, визначення інтенсивності народження частинок в атмосфері під впливом світлового потоку тощо. [4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглядається лінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

де $K(x,t)$ – задана неперервна в квадраті $Q(a,b) = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ функція, яка називається ядром рівняння, $f(x)$ – задана неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, $y(x)$ – шукана функція (розв'язок рівняння).

Одним з найбільш розповсюджених методів наближеного розв'язання рівняння (1) є метод вироджених ядер [1, 6, 9]. Ядро $\tilde{K}(x,t)$ називається виродженим, якщо воно є сумою скінченного числа добутків функцій, що залежать тільки від одного аргументу

$$\tilde{K}(x,t) = \sum_{k=1}^n z_k A_k(x) B_k(t), \quad (2)$$

де $A_1(x), \dots, A_n(x)$ і $B_1(x), \dots, B_n(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ та лінійно незалежні між собою функції, z_1, \dots, z_n – константи. Якщо ядро інтегрального рівняння (1) є виродженим, то його розв'язок, який позначимо $\tilde{y}(x)$, можна знайти в явному вигляді

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k A_k(x). \quad (3)$$

Невідомі коефіцієнти c_1, \dots, c_n визначаються з системи лінійних рівнянь [6]

$$c_k - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} c_j = f_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

де

$$f_k = \int_a^b B_k(t) f(t) dt, \quad \alpha_{kj} = \int_a^b B_k(t) A_j(t) dt.$$

Якщо визначник системи (4) не дорівнює нулю, тобто λ не є характеристичним числом ядра $K(x,t)$, то система (4) має єдиний розв'язок. Відповідно інтегральне рівняння (1) з виродженим ядром (2) теж має єдиний розв'язок $\tilde{y}(x)$, який визначається за формулою (3) [4].

Розв'язок рівняння (1) з довільним ядром $K(x,t)$ можна апроксимувати розв'язком рівняння з виродженим ядром $\tilde{K}(x,t)$, яке підбирається так, щоб $|K(x,t) - \tilde{K}(x,t)| < \varepsilon$ в області $Q(a,b)$. Якщо побудувати достатньо

близьке до $K(x,t)$ вироджене ядро $\tilde{K}(x,t)$, то розв'язавши рівняння з ядром $\tilde{K}(x,t)$, ми отримаємо розв'язок $\tilde{y}(x)$, близький до розв'язку $y(x)$ рівняння з ядром $K(x,t)$ і тією самою правою частиною [9].

Слід зазначити, що при заданій точності ε заміни ядра $K(x,t)$ скінченною сумою (2) можна чекати тим меншою похибки розв'язку δ , чим більш віддаленим буде параметр λ від власного значення ядра $K(x,t)$. Навпаки, чим ближче буде λ до власного значення, тим більш точною має бути заміна ядра $K(x,t)$ на вироджене, щоб можна було сподіватися отримати розв'язок $y(x)$ з потрібною точністю. [9].

Існують різні способи побудови вироджених ядер, близьких до даного [1, 3, 5, 6, 9]. Для побудови ядра $\tilde{K}(x,t)$ можна скористатися, наприклад, частковою сумою розкладу функції $K(x,t)$ в ряд Тейлора, відрізком однократного чи подвійного ряду Фур'є або застосувати інтерполювання функції $K(x,t)$ по одній чи обох змінних.

По суті, задача побудови вироджених ядер, близьких до даного, є задачею наближення заданої в області $Q(a,b)$ функції двох змінних $K(x,t)$ за допомогою білінійної комбінації (2) функцій, що залежать тільки від однієї змінної (кількість і вигляд функцій $A_k(x)$ та $B_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, можна вибирати). Тому для побудови вироджених ядер можна застосовувати найкращу (рівномірну, середньоквадратичну) апроксимацію функції $K(x,t)$ [3, 8].

Задача найкращої апроксимації полягає у знаходженні для функції K з деякого класу такої функції \tilde{K} у більш вузькому класі, щоб у заданій області величина відхилення $\|\Delta\| = \|K - \tilde{K}\|$ була б мінімально можливою. Величина відхилення (похибка апроксимації) служить характеристикою точності наближення і залежить від вибраної норми. На практиці найчастіше застосовують квадратичну (або середньоквадратичну) та чебишовську норми.

Якщо область $Q(a,b)$ покрита сіткою $\{(x_i, t_i) : i = 1, 2, \dots, m\}$ з m вузлів, то величина відхилення $\|\Delta\|$ у випадку використання чебишовської (рівномірної) норми визначається як

$$\|\Delta\| = \max_{i=1,m} |K(x_i, t_i) - \tilde{K}(x_i, t_i)|, \quad (5)$$

а у випадку середньоквадратичної норми –

$$\|\Delta\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (K(x_i, t_i) - \tilde{K}(x_i, t_i))^2}{m}}. \quad (6)$$

Функція \tilde{K} , на якій досягається мінімум норми (5) чи (6) в області апроксимації, називається найкращим чебишовським або найкращим середньоквадратичним апроксимантом відповідно.

Найкращі апроксиманти (рівномірні та середньоквадратичні) наближають ядра інтегральних рівнянь з більшою точністю, ніж, наприклад, часткові суми рядів Тейлора, проте на практиці останні використовуються значно частіше. Головною перешкодою для широкого застосування найкращих апроксимантів є складність і громіздкість відповідних алгоритмів чебишовського і середньоквадратичного наближення у випадку функцій декількох аргументів, а також їх недостатня реалізація у загальнодоступних математичних пакетах [7].

Тому актуальним є створення ефективних і водночас досить простих алгоритмів для знаходження виродженого ядра, близького до даного, на основі мінімізації чебишовського (5) або середньоквадратичного відхилення (6). З цієї точки зору перспективним є підхід, що ґрунтується на застосуванні апарату генетичних алгоритмів [2].

Генетичні алгоритми (ГА) – це новітній ефективний інструмент розв'язання складних оптимізаційних задач. Ідея ГА полягає в комп'ютерній організації еволюційного процесу створення, модифікації та відбору кращих розв'язків (в термінах ГА – особин) з метою появи нових, більш прийнятних варіантів розв'язання задачі. Кожна особина в ГА кодується у вигляді хромосоми, в генах якої зберігається інформація про відповідні параметри розв'язку. Оцінку якості закодованого в хромосомі розв'язку служить значення функції пристосованості.

Пошук найкращих розв'язків у генетичних алгоритмах здійснюється одразу з цілої множини точок – популяції особин, а не з єдиної точки, як у більшості традиційних методів оптимізації. Генетичні алгоритми прості в реалізації, використовують тільки значення функції пристосованості і не потребують іншої інформації про поведінку функції, відносно стійкі до попадання в локальні оптимуми і можуть застосовуватися для різних класів задач [10].

У статті пропонується генетичний алгоритм для найкращої (рівномірної, середньоквадратичної та ін.) апроксимації функцій двох змінних за допомогою функцій вигляду (2).

ГЕНЕТИЧНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ЯДРА ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ. Схема стандартного ГА складається з таких основних кроків:

- 1) створення початкового покоління популяції особин;
- 2) оцінювання особин за значенням функції пристосованості;
- 3) моделювання еволюційного процесу: вибір батьків, схрещування для отримання нащадків, мутація нащадків, формування нового покоління популяції;
- 4) перевірка критерію закінчення алгоритму, і в разі його невиконання повернення до кроку 2. Якщо критерій завершення алгоритму виконано, то здійснюється відбір найкращої особини (з найбільшим або найменшим значенням функції пристосованості).

Можливі різні варіанти реалізації стандартної схеми ГА, які відрізняються формою представлення хромосом (бінарне чи дійсне кодування), операторами схрещування, мутації та селекції, процедурами вибору батьків для схрещування, критеріями закінчення алгоритму тощо [10]. Вибір того чи іншого варіанту реалізації стандартних

складових при розробці ГА для розв'язання конкретної задачі залежить, зокрема, від особливостей предметної області, структури даних та ін.

Позначимо S_j – j -у хромосому, $j = \overline{1, N}$, де N – число особин популяції. Кожна хромосома $S_j = (s_1^j, \dots, s_n^j)$ складається з n генів. Ген s_k^j відповідає деякому значенню параметра z_k апроксиманта $\tilde{K}(x, t)$. В ГА для апроксимації ядра інтегрального рівняння сумами вигляду (2) пропонується використовувати дійсне кодування хромосом, коли гени s_k^j напряду подаються у вигляді дійсних чисел. Такі алгоритми називаються неперервними ГА.

Неперервний генетичний алгоритм, що пропонується для найкращої апроксимації ядра інтегрального рівняння (1) виродженням ядром вигляду (2), має такі особливості реалізації схеми стандартного ГА.

1. Початкове покоління популяції формується з особин (хромосом) S_j , $j = \overline{1, N}$, гени яких s_k^j , $k = \overline{1, n}$ – це випадкові числа з заданого інтервалу (за умовчанням обирається інтервал $[-1, 1]$). Слід зазначити, що границі цього інтервалу мають значення лише на кроці ініціалізації, у подальшій еволюції простір пошуку ϵ , взагалі кажучи, необмеженим.

2. Значення функції пристосованості Fit для кожної хромосоми S_j , $j = \overline{1, N}$, обчислюються за формулою

$$Fit(S_j) = \Delta(S_j), \quad (7)$$

де

$$\Delta(S_j) = \max_{1 \leq i \leq m} \left| K(x_i, t_i) - \sum_{k=1}^n s_k^j A_k(x_i) B_k(t_i) \right| \quad (8)$$

у випадку чебишовської норми (5) та

$$\Delta(S_j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \left(K(x_i, t_i) - \sum_{k=1}^n s_k^j A_k(x_i) B_k(t_i) \right)^2}{m}} \quad (9)$$

у випадку середньоквадратичної норми (6).

Чим ближче значення функції (7) до нуля, тим краще пристосованою є особина і тим ближче закодовані в її генах значення параметрів z_k до оптимальних. Слід додати, що за цим алгоритмом можна знаходити найкращу

апроксимацію ядра $K(x, t)$ у випадку використання інших норм, наприклад $\|\Delta\| = \sum_{i=1}^m |K(x_i, t_i) - \tilde{K}(x_i, t_i)|$. Для цього потрібно лише відповідним чином змінити формулу для обчислення $\Delta(S_j)$.

3. На кроці моделювання еволюційного процесу батьківські особини визначаються за процедурою парного турнірного відбору. З поточної популяції випадковим чином вибираються дві особини, і та з них, значення функції пристосованості якої менше, заноситься у проміжний масив. Ця операція повторюється n разів, після чого у створенні нащадків бере участь кожна пара сусідніх особин з проміжного масиву.

Для схрещування застосовується лінійний кросовер: у батьків $S_1 = (s_1^1, \dots, s_n^1)$ і $S_2 = (s_1^2, \dots, s_n^2)$ створюються три нащадки $D_1 = (d_1^1, \dots, d_n^1)$, $D_2 = (d_1^2, \dots, d_n^2)$ і $D_3 = (d_1^3, \dots, d_n^3)$ за правилом

$$d_k^1 = \frac{s_k^1 + s_k^2}{2}, \quad d_k^2 = \frac{3s_k^1 - s_k^2}{2}, \quad d_k^3 = \frac{3s_k^2 - s_k^1}{2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Результати розрахунків показали, що в задачах апроксимації цей кросовер за ефективністю переважає більшість операторів схрещування.

Мутація нащадків у алгоритмі не проводиться, оскільки при застосуванні лінійного кросовера значення гена нащадка може виходити за межі значень батьківських генів.

У нове покоління включаються лише N найкращих особин (тобто особин з найменшими значеннями функції пристосованості) з розширеної популяції батьків та їхніх нащадків.

4. Алгоритм завершує роботу, якщо виконується одна з умов: 1) значення функції пристосованості найкращої особини покоління менше заданої величини η , 2) досягнуто максимальне число поколінь p_{\max} . Якщо задати $\eta = 0$, то буде знайдено апроксимацію ядра сумою заданого числа добутків $A_k(x) B_k(t)$ з мінімально можливою за p_{\max} поколінь похибкою наближення.

Зазначимо, що оскільки ГА базується на ймовірнісному підході, то прийнятний розв'язок можна отримати лише за наявності достатнього числа запусків алгоритму.

Описаний алгоритм може бути реалізований за допомогою проблемно-орієнтованих мов програмування (Pascal, C, C++) або засобами систем комп'ютерної математики (Matlab, Mathcad та ін.). Зокрема, в системі Matlab існує спеціальний пакет Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox для створення і налаштування генетичних алгоритмів.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ. Як зазначено вище, розв'язок $y(x)$ інтегрального рівняння (1) буде близьким до розв'язку $\tilde{y}(x)$ рівняння з виродженням ядром і тією самою правою частиною, якщо вироджене ядро $\tilde{K}(x, t)$ є достатньо близьким до ядра $K(x, t)$. Для оцінки близькості цих розв'язків використовується теорема про рівномірну апроксимацію [11]. Згідно з теоремою, якщо $\max_{a \leq x, t \leq b} |K(x, t) - \tilde{K}(x, t)| < \epsilon$, $R_K(x, t; \lambda)$ і $R_{\tilde{K}}(x, t; \lambda)$ – резольвенти відповідних ядер і λ не є власним значенням цих ядер, то існує така константа $\beta = \beta(\lambda, H_f, H_K, H_{\tilde{K}})$, що

$$\max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \beta \epsilon. \tag{10}$$

Тут $H_f = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, $H_K(\lambda) = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b R_K(x, t; \lambda) dt \right|$, $H_{\tilde{K}}(\lambda) = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b R_{\tilde{K}}(x, t; \lambda) dt \right|$.

Константа β може бути обчислена за формулою

$$\beta = |\lambda| \cdot (1 + |\lambda| H_{\tilde{K}}(\lambda)) \cdot (1 + |\lambda| H_K(\lambda)) \cdot (b - a) \cdot H_f. \tag{11}$$

Для практичного застосування зручно користуватися наступною оцінкою для величин $B_K(\lambda)$ і $B_{\tilde{K}}(\lambda)$. Якщо $K(x, t) \leq M$ в квадраті $Q(a, b)$ і $|\lambda|$ – менше радіусів збіжності резольвентних рядів, тоді

$$\left| \int_a^b R_K(x, t; \lambda) dt \right| \leq \frac{M(b-a)}{1 - |\lambda|M(b-a)} = B_K(\lambda).$$

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ. Проведено серію обчислювальних експериментів по розв'язуванню інтегральних рівнянь Фредгольма II роду з використанням запропонованого генетичного алгоритму для найкращої (середньоквадратичної, рівномірної) апроксимації ядер. Виконано порівняння отриманих розв'язків з точними розв'язками рівнянь, а також з наближеними розв'язками, знайденими іншими способами (наприклад, із застосуванням апроксимації ядра частковою сумою ряду Тейлора).

Наведемо два приклади розв'язання інтегральних рівнянь з використанням запропонованого ГА.

Приклад 1. Знайти методом вироджених ядер наближений розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)y(t) dt = e^x - x, \tag{12}$$

застосовуючи для апроксимації ядра $K(x, t) = x(e^{xt} - 1)$ многочлен найкращого середньоквадратичного наближення вигляду $\tilde{K}(x, t) = z_1 x^2 t + z_2 x^3 t^2 + z_3 x^4 t^3$, та оцінити точність отриманого розв'язку.

Для знаходження оптимальних значень невідомих параметрів z_1, z_2, z_3 застосовано ГА з такими налаштуваннями: число генів $n = 3$, розмір популяції $N = 100$, максимальна кількість поколінь $p_{\max} = 300$, $\eta = 0$, число вузлів сітки $m = 441$ (крок 0,05 по кожному аргументу), число запусків алгоритму 10.

У результаті роботи ГА було знайдено, що найкращим наближенням для ядра $K(x, t) = x(e^{xt} - 1)$ є многочлен

$$\tilde{K}(x, t) = 1,00923x^2t + 0,443055x^3t^2 + 0,26401x^4t^3, \tag{13}$$

при цьому середньоквадратична похибка апроксимації дорівнює 0,00021.

Далі замість інтегрального рівняння (12) розв'язуємо рівняння з виродженим ядром (13). Згідно з формулою (3) його розв'язком є функція $\tilde{y}(x) = e^x - x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4$. Коефіцієнти c_i знаходимо з системи лінійних рівнянь (4): $c_1 = 0,4987$, $c_2 = -0,16455$, $c_3 = -0,05057$. Тоді наближеним розв'язком інтегрального рівняння (12) є функція

$$\tilde{y}(x) = e^x - x - 0,50459x^2 - 0,14769x^3 - 0,06601x^4. \tag{14}$$

Для порівняння апроксимуємо ядро $K(x, t) = x(e^{xt} - 1)$ сумою перших 3-х членів розкладу в ряд Тейлора

$$\bar{K}(x, t) = x^2t + \frac{x^3t^2}{2} + \frac{x^4t^3}{6}. \tag{15}$$

У цьому випадку наближений розв'язок інтегрального рівняння (12) має вигляд [1]

$$\bar{y}(x) = e^x - x - 0,50102x^2 - 0,16713c_2x^3 - 0,0422c_3x^4. \tag{16}$$

Оскільки відомий точний розв'язок $y(x) = 1$ інтегрального рівняння (12) [1], то можна порівняти точність наближених розв'язків (14) і (16). Як видно з табл. 1, розв'язок (14), для знаходження якого застосовувалась найкраща середньоквадратична апроксимація ядра $K(x, t)$, досить добре узгоджується з точним розв'язком рівняння. Абсолютна похибка $\delta_1 = 0,0000681$ наближеного розв'язку (14) є на два порядки меншою, ніж похибка $\delta_2 = 0,00832$ розв'язку (16), який одержано з використанням відрізка ряду Тейлора для апроксимації функції $K(x, t)$.

Таблиця 1

Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння (12)

Значення x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Розв'язок $\tilde{y}(x)$	0,9999319	0,9999479	1,0000102	0,9999492	0,9999956
Розв'язок $\bar{y}(x)$	0,9999581	0,9998950	1,0002331	1,0021920	1,0083211
Похибка $\delta_1 = \tilde{y} - y $	0,0000681	0,0000521	0,0000102	0,0000508	0,0000044
Похибка $\delta_2 = \bar{y} - y $	0,0000419	0,0001050	0,0002331	0,0021920	0,0083211

Приклад 2. Знайти методом вироджених ядер наближений розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(xt) y(t) dt = \cos x, \quad (17)$$

застосовуючи для апроксимації ядра $K(x, t) = \cos(xt)$ многочлен найкращого рівномірного наближення вигляду

$$\tilde{K}(x, t) = z_1 + z_2 x^2 t^2 + z_3 x^4 t^4, \quad (18)$$

та оцінити точність знайденого розв'язку.

Для визначення найкращих значень параметрів z_1, z_2, z_3 функції (18) застосовувався ГА з такими ж налаштуваннями, як і в прикладі 1. Були отримані наступні результати: $z_1 = 0,9999582$, $z_2 = -0,4992427$, $z_3 = 0,0396285$, похибка апроксимації $0,0000418$. Отже, многочлен для наближеної заміни ядра $K(x, t) = \cos(xt)$ рівняння (17) має вигляд

$$\tilde{K}(x, s) = 0,9999582 - 0,4992427 x^2 t^2 + 0,0396285 x^4 t^4. \quad (19)$$

Далі знаходимо розв'язок інтегрального рівняння з виродженим ядром (19). Ним є функція

$$\tilde{y}(x) = \cos x + 0,8022936 - 0,1206231 x^2 + 0,0054869 x^4. \quad (20)$$

Оскільки точний розв'язок інтегрального рівняння (17) невідомий, то для оцінки похибки наближеного розв'язку (20) застосовуємо формули (10) і (11). У нашому випадку $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \cos x$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0,0000418$ і $M = 1$.

Обчислюємо значення величин $H_f, H_K, H_{\tilde{K}}$: $H_f = 1$, $H_K\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $H_{\tilde{K}}\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Далі за формулою (11) знаходимо константу $\beta = 2$. Остаточо маємо таку оцінку для похибки наближеного розв'язку рівняння (17):

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq 0,0000836.$$

Для порівняння апроксимуємо ядро $K(x, t) = \cos(xt)$ інтегрального рівняння (17) сумою перших 3-х членів розкладу в ряд Тейлора

$$\bar{K}(x, t) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 t^2 + \frac{1}{4!} x^4 t^4. \quad (21)$$

Як видно з рис. 1, многочлен найкращого рівномірного наближення (19) апроксимує ядро $K(x, t) = \cos(xt)$ зі значно меншою похибкою, ніж сума (21). Крім того, многочлен (19) забезпечує гарне наближення ядра в усій області $Q(0, 1)$, в той час як використання часткової суми ряду Тейлора (21) дає значну похибку поблизу точки $x = 1$, $t = 1$.

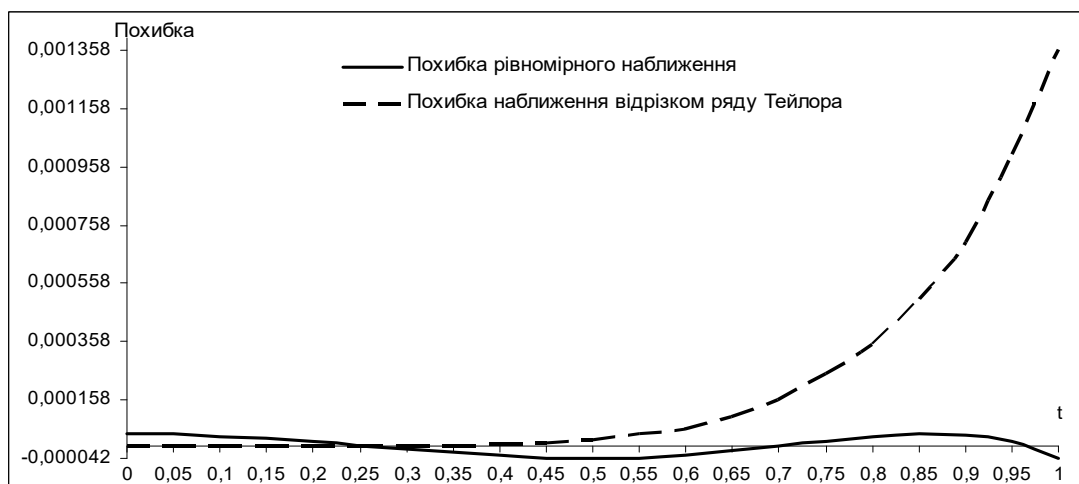


Рис. 1. Графіки похибок апроксимації ядра інтегрального рівняння (17) при $x = 1$

Розв'язок інтегрального рівняння з виродженим ядром (21) має вигляд.

$$\bar{y}(x) = \cos x + 0,8023542 - 0,1208175 x^2 + 0,0057694 x^4. \quad (22)$$

Оцінимо точність цього розв'язку. Оскільки

$$\max_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \cos x - \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 t^2 + \frac{1}{4!} x^4 t^4 \right) \right| < \varepsilon = \frac{1}{6!} \approx 0,00139,$$

то для похибки наближеного розв'язку (22) має місце оцінка

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y(x) - \bar{y}(x)| \leq 0,0028.$$

Отже, похибка розв'язку (20), для знаходження якого застосовувалась найкраще рівномірне наближення ядра $K(x, t)$, є значно меншою (в 33 рази), ніж похибка розв'язку (22), отриманого з використанням для апроксимації $K(x, t)$ відрізка ряду Тейлора.

ВИСНОВКИ. При розв'язанні інтегральних рівнянь Фредгольма II роду методом вироджених ядер використання найкращих середньоквадратичних або чебишовських наближень для апроксимації ядер довільного вигляду дозволяє отримати більш точні розв'язки цих рівнянь, ніж при застосуванні інших видів наближень (зокрема, наближень частковими сумами рядів Тейлора). В роботі запропоновано неперервний генетичний алгоритм для найкращої апроксимації ядра інтегрального рівняння як функції двох змінних за допомогою суми скінченного числа добутоків функцій, що залежать тільки від однієї змінної. Пошук найкращих розв'язків в ГА здійснюється одразу з цілої множини точок, а не з єдиної точки, як у більшості традиційних методів оптимізації. Алгоритм простий в реалізації та може застосовуватися для розв'язання інших подібних задач. Отримані результати обчислювальних експериментів дають підстави вважати, що запропонований ГА є ефективним засобом апроксимації ядер інтегральних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т.2 – М.: Наука, 1966. – 640 с.
2. Вакал Л. П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2013. – № 12. – С. 20–26.
3. Вакал Л. П. Застосування чебишовської апроксимації при розв'язанні інтегральних рівнянь // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2011. – № 10. – С. 78–84.
4. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
5. Верлань Д. А. Ітераційні алгоритми апроксимації функцій двох змінних // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – 2009. – Вип. 2. – С.24–32.
6. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
7. Каленчук-Порханова А. О., Вакал Л. П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2007. – № 6. – С. 141–148.
8. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
9. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. – Минск: Вышэйшая школа, 1975. – 672 с.
10. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы. – Астрахань: Издательский дом "Астраханский университет", 2007. – 87 с.
11. Zemyan S. M. The classical theory of integral equations: a concise treatment. – Secaucus: Birkhauser Boston Inc., 2012. – 344 p.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.16

Вакал Е., канд. физ.-мат. наук, Вакал Ю., канд. физ.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Вакал Л., канд. техн. наук
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Київ

НАИЛУЧШАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Для решения интегрального уравнения Фредгольма II рода с ядром произвольного вида предложен непрерывный генетический алгоритм для наилучшей (среднеквадратической, равномерной) аппроксимации ядра суммы конечного числа произведений функций, зависящих только от одной переменной. Показано, что предложенный алгоритм является эффективным средством аппроксимации ядер.

Vakal E., PhD, Vakal Yu., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
Vakal L., PhD
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv

BEST APPROXIMATION FOR A KERNEL OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATION WITH USING GENETIC ALGORITHM

A continuous genetic algorithm for the best (mean-square, uniform) approximation of a kernel by sum of a finite number of one-variable functions products is proposed for solving Fredholm integral equation of the second kind with a general kernel. It is shown that the proposed algorithm is an effective mean for kernels approximation.

УДК 517.947

І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський
e-mail: konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

ГИПЕРБОЛИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі для необмеженого кусково-однорідного циліндра.

ВСТУП. Теорія гіперболічних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численным застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ механіки, фізики, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [4], Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Гром'яка М. І. [9], Самойленка А. М., Ткача Б. П. [11], Смирнова М. М. [13], Чернятина В. А. [16] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

© Конет І., Пилипюк Т., 2016