

Останню нерівність можна довести за індукцією, оскільки при $m = 1$ вона виконується, бо $k \geq 13$, а при збільшенні m на одиницю, ліва частина збільшується менше, ніж права.

Зауваження 1. Для достатньо великих k константу 4 у правій частині останньої нерівності можна "покрощити" до константи $3 + \varepsilon$, де значення ε є як завгодно малим.

Зауваження 2. За певних умов на функцію f можна "покрощити" і рівномірну оцінку полінома найкращого наближення на відрізьку. Якщо максимальні абсолютні величини відхилень на ділянках не рівні між собою, то шляхом додавання до многочлена константи або лінійної функції, можна досягти, що максимальне відхилення полінома від функції на всьому відрізьку зменшиться. Рівномірна оцінка покращиться тим більше, чим більша різниця вищезгаданих абсолютних величин.

Висновки. Отримано поточкову оцінку величини відхилення поліномів Крякіна всередині відрізька, де ця оцінка набагато краща за відому рівномірну. Також отримано деякі умови на функцію, за яких відому рівномірну оцінку величини найкращого наближення можна покращити.

Основний результат статті дає підстави припускати, що оцінку в нерівності Уїтні можна покращити шляхом зміни полінома таким чином, що всередині відрізька оцінка "погіршиться", а на кінцях "покрощиться", і тим самим "покрощиться" і рівномірна оцінка. Це дасть можливість наблизитися до розв'язання задачі Сендова [2, 3] про найкращу сталу в нерівності Уїтні. Це дослідження було підтримано у межах Проекту 0118U003795 відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України.

This research was supported by the Project 0118U003795 from the Department of Targeted Training of Taras Shevchenko National University of Kyiv at the NAS of Ukraine.

Список використаних джерел:

1. Gilewicz J. Boundedness by 3 of the Whitney Interpolation Constant / Gilewicz J., I.A. Shevchuk, Yu.V. Kryakin // J. of Approximation Theory, 2002. – Vol. 119, Issue 2. P. 271–290.
2. Kryakin Yu.V. Whitney's constants and Sendov's Conjectures / Yu.V. Kryakin // Mathematica Balcanica, 2002. – Vol. 16, fasc. 1–4.
3. Sendov Bl. On the constants of H. Whitney / Bl. Sendov // C.R. Acad. Bulg. Sci., 1982. – Vol. 35, Issue 4. – P. 431–434.

Надійшла до редколегії 05.03.19

Н. Щеглов, студ.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЙ ПОЛИНОМА КРЯКИНА ОТ НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ

Получены новые оценки для алгебраических полиномов, которые приближают непрерывную на отрезке функцию, через модули непрерывности высших порядков, а именно поточечные оценки.

Ключевые слова: приближения непрерывных функций, полиномы Крякина, полином наилучшего приближения, оценка отклонения.

M. Shcheglov, stud.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

POINTWISE ESTIMATE OF DEVIATION OF KRIAKIN POLYNOMIAL FROM A FUNCTION, CONTINUOUS ON A SEGMENT

New estimates for the algebraic polynomials that approximate a function continuous on a segment involving moduli of continuous of high orders are obtained, namely the pointwise estimates.

Keywords: approximation of continuous functions, Kryakin polynomials, polynomial of best approximation, estimation of deviation.

УДК 517.9

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.04.14-19>

Г. Верьовкіна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,

І. Гап'як, канд. фіз.-мат. наук, асист.,

В. Самойленко, д-р фіз.-мат., проф.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

Т. Телятник, студ.

Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна

E-mail: valsamyul@gmail.com

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ІЗ РЕГУЛЯРНИМ ЗБУРЕННЯМ

Для квадратного рівняння, що містить малий параметр, який входить до рівняння регулярним чином, і рівняння Дюфінга з малою нелінійністю побудовано їхні асимптотичні розв'язки у вигляді асимптотичних за Пуанкаре рядів за малим параметром і проаналізовано властивості отриманих розв'язків, коли малий параметр прямує до нуля. Продемонстровано суть теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра для систем із регулярним збуренням. Для квадратного рівняння проведено порівняльний аналіз ряду Тейлора для точних і отриманих асимптотичних розв'язків, а для рівняння Дюфінга з малою нелінійністю проведено порівняльний аналіз графіків точних і асимптотичних розв'язків з однаковими початковими умовами.

Ключові слова: асимптотичний аналіз, метод малого параметра, регулярні збурення, асимптотичний ряд за Пуанкаре, рівняння Дюфінга.

Вступ. На практиці досить часто доводиться використовувати наближені значення для різних числових величин і функціональних виразів [1]. Найпростішим таким прикладом є представлення ірраціональних чисел їхніми раціональними наближеннями. Задача про наближене обчислення певних числових виразів є однією з порівняно простих мате-

матичних задач, хоча і не завжди дуже простою. Значно складнішими є задачі, коли доводиться відшукувати наближені розв'язки певних рівнянь, які неможливо проінтегрувати у замкненому (явному) вигляді. Подібні задачі часто виникають, наприклад, при вивченні математичних моделей нелінійних процесів чи явищ. Для знаходження наближених розв'язків таких рівнянь використовуються різні математичні методи, зокрема, методи, які орієнтовані на використання сучасних обчислювальних машин. При цьому отримуються наближені (чисельні) розв'язки, для яких потім будуються їхнє графічне зображення, тобто здійснюється візуалізація отриманих наближених (чисельних) розв'язків, що дає можливість наочно уявити властивості тих чи інших систем.

З іншого боку, не всі математичні моделі можуть бути ефективно проаналізовані за допомогою методів обчислювальної математики, оскільки задача, що вивчається, може мати певні сингулярні характеристики, які визначаються геометричними характеристиками області, де розглядається та чи інша задача, і відповідна система може характеризуватися наявністю певних процесів, для яких властива значна нестійкість. Зокрема, застосування методів обчислювальної математики проблематичне до систем і задач, яким властива так звана чутливість до початкових умов, і до так званих некоректних задач. Тому для дослідження багатьох математичних задач досить часто використовуються так звані асимптотичні методи, бо, незважаючи на значний прогрес у розвитку сучасних засобів обчислювальної техніки і розробку значної кількості різних пакетів прикладних програм для них, асимптотичні методи [2, 3] залишаються досить ефективним інструментом для аналізу математичних моделей у техніці та природознавстві, скільки їхнє використання дає можливість не лише побудувати в аналітичному вигляді наближені розв'язки диференціальних рівнянь, що вивчаються, але й дослідити їхні якісні властивості та проаналізувати поведінку відповідних складних систем.

З іншого боку, досить часто становить інтерес вивчення питання про певні властивості асимптотичних методів і розв'язків, які побудовані за допомогою цих методів, зокрема, питання про те, наскільки точно побудовані асимптотичні розв'язки наближають відповідний точний розв'язок задачі, що досліджується. Відповідь на дане питання залежить від багатьох чинників, як від асимптотичного методу, який використовується для побудови певних асимптотичних розв'язків, так і від типу задач, які розглядаються.

Асимптотичні методи успішно використовуються для наближених обчислень вже тривалий час. Зокрема, такі методи знайшли широке застосування при дослідженні задач небесної механіки вже в XVI ст. У подальшому асимптотичні методи ефективно використовувалися в теорії спеціальних функцій. Зокрема, ще Леонард Ейлер у 1754 р. за допомогою асимптотичних методів наближено обчислив інтеграл вигляду

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{z+t} dt, \quad (1)$$

який, як відомо, неможливо обчислити в явному вигляді. Для наближеного знаходження даного інтеграла Ейлер записав знаменник підінтегрального виразу за допомогою формули для геометричної прогресії, а потім на проміжку $(0; \infty)$ почленно проінтегрував отриманий розклад за змінною t . Таким чином, він отримав рівність [4]:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}. \quad (2)$$

Очевидно, що ці обчислення не повністю математично коректні, оскільки при отриманні ряду (2) використано ряд для нескінченної геометричної прогресії, який збігається лише на деякому проміжку для значень $t \in (-|z|; |z|)$ і є розбіжним для будь-яких інших значень z . Проте формула (2) має сенс при $|z| \rightarrow \infty$, оскільки різниця між значенням інтеграла (1) і частинною сумою ряду (2), при будь-якій фіксованій кількості N доданків у частинній сумі ряду (2), але великих значеннях $|z|$, є малою величиною порівняно з доданками частинної суми, останній з яких має порядок $1/|z|^N$. Зауважимо, що відповідна різниця (між значенням інтеграла (1) та частинною сумою ряду (2)) не перевищує величини $N!/|z|^{N+1}$, де N – кількість доданків у частинній сумі. Таким чином, хоча ряд (2) розбіжний, але його частинні суми при великих значеннях $|z|$ добре (у певному сенсі) наближають значення інтеграла (1).

Ряд (2) є прикладом асимптотичного ряду за незалежною змінною $|z| \rightarrow \infty$. Такі ряди широко використовуються в теорії спеціальних функцій для обчислення значень різних функцій. Зазвичай подібні ряди є розбіжними, хоча у багатьох випадках вони збігаються, наприклад, збіжними є ряди для функцій Бесселя [5] всіх значень їх порядку ν .

Асимптотичні ряди є одним з основних елементів асимптотичного аналізу. У теорії асимптотичних методів зазвичай використовується поняття асимптотичного ряду за Пуанкаре за малим параметром.

Означення. Кажуть, що функція $f(x, \varepsilon)$ зображується асимптотичним рядом за Пуанкаре вигляду

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

якщо для будь-якого цілого $N \geq 0$ і для всіх значень x (з деякої множини) виконується умова

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ f(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n f_n(x) \right\} \varepsilon^{-N} = 0.$$

Ряд (3) є прикладом асимптотичного ряду за малим параметром ε . Саме у такому сенсі ми розуміємо у подальшому поняття "асимптотичного ряду за малим параметром".

У даній статті розглянуто дві досить прості задачі про побудову асимптотичних розв'язків для рівнянь з малим збуренням, а саме: задачу про побудову за допомогою методу малого параметра асимптотичних розв'язків для квадратного рівняння з регулярним збуренням та задачу про побудову за допомогою методу Крилова–Боголюбова–Митропольського [6] асимптотичних розв'язків для класичного рівняння Дюфінга з малим нелінійним збуренням, тобто рівняння вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon x^3, \quad \text{де } \varepsilon - \text{ малий параметр.} \quad (4)$$

Проаналізовано властивості побудованих асимптотичних розв'язків, коли малий параметр прямує до нуля, проведено порівняльний аналіз точних і отриманих асимптотичних розв'язків, продемонстровано суть теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра для системи, що містить малий параметр регулярним чином.

Отримані результати роботи мають певний науково-методичний характер і можуть становити інтерес для студентів, аспірантів і фахівців фізико-математичного профілю та можуть знайти своє застосування при викладанні навчальних курсів із сучасних методів прикладної математики і теорії математичного моделювання.

Квадратне рівняння з малим параметром. Квадратне рівняння:

$$ax^2 + 2\epsilon bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (5)$$

з дійсними коефіцієнтами у полі комплексних чисел має два розв'язки, які легко можна записати в явному вигляді. Не втрачаючи загальності, розглянемо випадок, коли рівняння (4) має два (різні) дійсні корені (вважаємо, що $b \neq 0$). Більше того, надамо в (4) коефіцієнтам рівняння такі числові значення: $a = 1, b = 1, c = -1$. Таким чином, маємо рівняння

$$x^2 + 2\epsilon x - c = 0. \quad (6)$$

Розв'язки рівняння (5) записуються за допомогою формул

$$x_+(\epsilon) = -\epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2}, \quad x_-(\epsilon) = -\epsilon - \sqrt{1 + \epsilon^2}. \quad (7)$$

За допомогою методу малого параметра знайдемо асимптотичні розв'язки рівняння (6). Такі розв'язки шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots, \quad (8)$$

де коефіцієнти розкладу (8) є дійсними величинами.

Використовуючи стандартні ідеї і методи асимптотичного аналізу, отримуємо алгебраїчні рівняння для коефіцієнтів асимптотичного розкладу (8), з яких легко знаходимо асимптотичні розклади для обох розв'язків незбуреного (при $\epsilon = 0$) рівняння (6):

$$x_+(\epsilon) = 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} + \dots, \quad x_-(\epsilon) = -1 - \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \dots. \quad (9)$$

Ряди (9) є асимптотичними рядами Пуанкаре для функцій (7). Окрім того, виконується властивість

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_+(\epsilon) = 1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_-(\epsilon) = -1, \quad (10)$$

яка свідчить про те, що побудованим асимптотичним розв'язкам (7) притаманна властивість неперервності за малим параметром, оскільки при $\epsilon \rightarrow 0$ ці розв'язки прямують до відповідних значень незбуреного рівняння (6).

Порівняємо тепер отримані асимптотичні розклади (9) з відповідними степеневими рядами Тейлора за малим параметром для точних розв'язків рівняння (7). Для цього скористаємося формулою

$$(1 + \epsilon^2)^{1/2} = 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} - \frac{\epsilon^8}{640} + \dots$$

і знайдемо степеневі ряди Тейлора для функцій (7). Маємо

$$x_+(\epsilon) = -\epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2} = 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} + \dots, \quad x_-(\epsilon) = -\epsilon - \sqrt{1 + \epsilon^2} = -1 - \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \dots, \quad (11)$$

Отже, порівняння формул для асимптотичних розв'язків (9) рівняння (6) і рядів Тейлора (10) для функцій (7) свідчить про те, що із формул для побудованих асимптотичних розв'язків рівняння (6) з високою точністю можна знайти значення точних розв'язків (7) рівняння (6). Очевидно, що цей результат, як і співвідношення (10), має загальний характер, а не лише для випадку конкретно заданих числових коефіцієнтів рівняння (6), оскільки відповідні властивості є наслідком теореми про неперервну залежність розв'язків рівняння (6) від малого параметра, який міститься в цьому рівнянні регулярним чином. Окрім того, порівняння графіків для точних (формули (7)) та асимптотичних (формули (9)) розв'язків рівняння (6) додатково підтверджує досить високу точність побудованих асимптотичних розв'язків. Зокрема,

третє асимптотичне наближення $1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8}$ для точного розв'язку при всіх значеннях $\epsilon \in (0; 0,75)$ майже збігається з відповідним точним розв'язком рівняння (6), а при значенні $\epsilon \approx 1$ це асимптотичне наближення і точний розв'язок рівняння (6) відрізняються менше, ніж на 5 %.

Зазначимо також, що для асимптотичних наближень і точного розв'язку $x_+(\epsilon)$ рівняння (6) виконуються такі нерівності:

$$1 - \epsilon < 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} < -\epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2} < 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} < 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2}, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

де у лівій частині нерівності спочатку записано (відповідно до порядку членів цієї нерівності) перше і третє асимптотичні наближення, а у правій частині нерівності (після виразу для точного розв'язку) – четверте і друге асимптотичні наближення для розв'язку рівняння (6). Іншими словами, асимптотичні наближення поступово (зверху та знизу) "підходять" до точного розв'язку.

Рівняння Дюфінга з малою нелінійністю. Розглянемо тепер задачу про знаходження асимптотичних розв'язків для рівняння вигляду (4). Для побудови рівномірно придатного асимптотичного розкладу для розв'язку рівняння (4) скористаємося асимптотичним методом Крилова–Боголюбова–Митропольського [6–8]. Цей метод дозволяє отримати асимптотичні розклади, які не містять так званих секулярних доданків [2], які, очевидно, погіршують збіжність відповідного асимптотичного ряду.

Як відомо [6], ідея методу Крилова–Боголюбова–Митропольського полягає в тому, що розв'язок будується у вигляді асимптотичного ряду, кожен доданок якого є функцією амплітуди і фази, що змінюються у часі, а отже, є розв'язками деяких диференціальних рівнянь. Відповідно до алгоритму цього методу асимптотичний розв'язок для рівняння (4) шукається у вигляді ряду

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \quad (12)$$

де функції $u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), \dots$ є періодичними функціями змінної ψ з періодом 2π , причому ці функції задовольняють умову

$$\int_0^{2\pi} u_k(a, \psi) e^{\pm i\psi} d\psi = 0,$$

тобто не містять першої гармоніки за кутовою змінною ψ , а величини a, ψ як функції часу визначаються із системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \frac{d\psi}{dt} = 1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots. \quad (13)$$

Для того, щоб отримати асимптотичний розв'язок (12), треба визначити функції $A_1(a), B_1(a), u_1(a), A_2(a), B_2(a), u_2(a, \psi), \dots$ таким чином, щоб вираз (12), у якому замість величин a, ψ записані функції від часу, які визначаються рівняннями (13), асимптотично задовольняв рівняння Дюфінга (4). У результаті нескладних математичних обчислень стандартним чином знаходимо друге асимптотичне наближення для розв'язку рівняння (4) у вигляді

$$x = a \cos \psi + \varepsilon \frac{a^3}{32} \cos 3\psi - \varepsilon^2 \frac{a^5}{1024} (21 \cos 3\psi - \cos 5\psi),$$

де функції $a(t), \psi(t)$ задовольняють диференціальні рівняння

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 1 + \varepsilon \frac{3a^3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15a^4}{256}. \quad (14)$$

У рівняннях (14) для функцій $a(t), \psi(t)$ сталі інтегрування a_0, ψ_0 вибираються з урахуванням початкових умов. Покладемо $a_0 = 1, \psi_0 = 0$. Тоді, проінтегрувавши рівняння (14), знаходимо друге асимптотичне наближення як функцію часової змінної у такому вигляді:

$$x = \cos \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15}{256} \right) t + \varepsilon \frac{1}{32} \cos 3 \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15}{256} \right) t - \varepsilon^2 \frac{1}{1024} \left(21 \cos 3 \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15}{256} \right) t - \cos 5 \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} - \varepsilon^2 \frac{15}{256} \right) t \right). \quad (15)$$

Отже, побудований таким чином асимптотичний розв'язок не містить сингулярних доданків і є асимптотичним рядом Пуанкаре за малим параметром.

Порівняльний аналіз асимптотичного і точного розв'язків рівняння Дюфінга. Проведемо порівняння значень для побудованого асимптотичного розв'язку (15) і точного розв'язку рівняння Дюфінга (4) за відповідних початкових умов. З цією метою скористаємося фазовим портретом рівняння Дюфінга у фазовій площині відповідної динамічної системи. Перший інтеграл для рівняння (4) має вигляд

$$I(x; \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - \varepsilon \frac{x^4}{2}. \quad (16)$$

Значення першого інтеграла (16) для конкретного розв'язку рівняння (4) дорівнює деякій сталій, яка для різних розв'язків рівняння (4) набуває різних дійсних значень і визначає відповідні цим розв'язкам лінії рівня на фазовій площині для динамічної системи, що відповідає рівнянню (4). Лінії рівня для першого інтеграла на рис. 1 зображені для значень сталої C , яку по чергово вибрано такою, що дорівнює 0.01; 0.05; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 15, а на рис. 2 – для значень сталої C , яку по чергово вибрано такою, що дорівнює 0.01; 0.05; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 15; 25; 40.

Зауважимо, що на рис. 1 і рис. 2 добре видно вплив малого параметра в рівнянні Дюфінга (4), який проявляється в тому, що окіл точки $x=0, y=0$, у якому розв'язки цього рівняння періодичні, а відповідні фазові криві замкнені, стає все більшим і більшим.

Порівняльний аналіз асимптотичного і точного розв'язків рівняння Дюфінга можна досить просто провести, порівнявши графіки цих розв'язків, які мають задовольняти однакові початкові умови. Для отримання графіків точних розв'язків рівняння (4) можна використати формулу (16) для першого інтеграла, вибравши належним чином значення

сталой C у виразі $I(x; \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - \varepsilon \frac{x^4}{2} = C_\varepsilon$. Це значення легко обчислюється за формулою (16), якщо задано конкретне значення малого параметра і початкові умови для розв'язку рівняння (4).

Шукані початкові значення для функції $x(t)$ та її похідної $\dot{x}(t) = y(t)$ при $t = 0$ можна отримати із формули (15). Дійсно, враховуючи формулу (15), знаходимо:

для випадку $\varepsilon = 0.5$ початкові значення $x_0 = x(0) = 1.01041, y_0 = y(0) = 0$, стала $C_\varepsilon = 0.76034$;

для випадку $\varepsilon = 0.1$ початкові значення $x_0 = x(0) = 1.0029, y_0 = y(0) = 0$, стала $C_\varepsilon = 0.95521$;

для випадку $\varepsilon = 0.04$ початкові значення $x_0 = x(0) = 1.00103, y_0 = y(0) = 0$, стала $C_\varepsilon = 0.98197$.

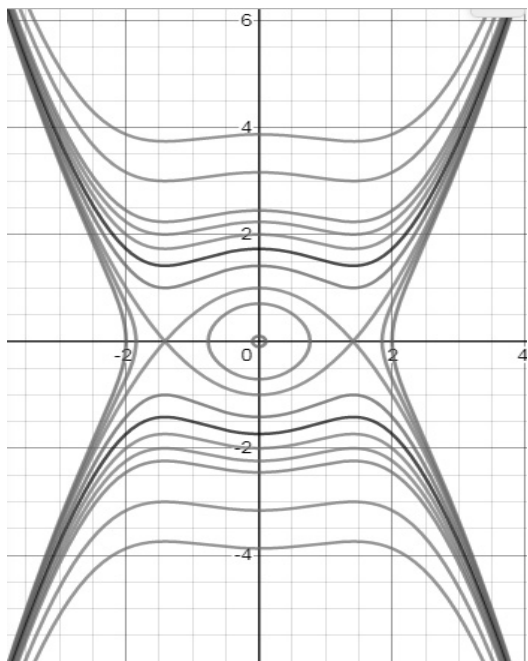


Рис. 1. Фазовий портрет при $\epsilon = 0.5$

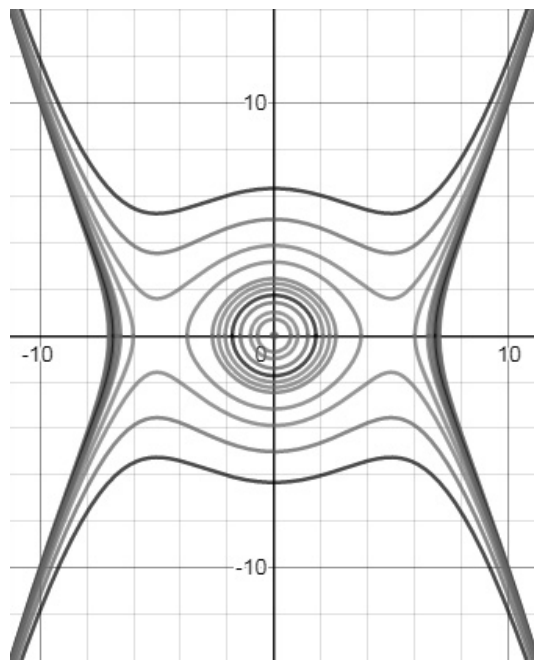


Рис. 2. Фазовий портрет при $\epsilon = 0.04$

Записані вище значення сталої C_ϵ обчислено за формулою $C_\epsilon = x_0^2 - \epsilon \frac{x_0^4}{2}$ при відповідних значеннях малого параметра.

Аналіз фазових кривих рівняння (4) і графіків відповідних їм асимптотичних розв'язків (15) при значеннях малого параметра $\epsilon = 0.5$, $\epsilon = 0.1$ і $\epsilon = 0.04$ показав, що ці розв'язки при значеннях малого параметра $\epsilon = 0.1$ і $\epsilon = 0.04$ практично збігаються, і відрізняються менше, ніж на 10 % при $\epsilon = 0.5$, що підтверджує високу ефективність методу Крилова–Боголюбова–Митропольського.

Висновки. Для квадратного рівняння, що містить малий параметр регулярним чином, і рівняння Дюфінга з малою нелінійністю побудовано їхні асимптотичні розв'язки у вигляді асимптотичних за Пуанкаре рядів за малим параметром та проаналізовано властивості отриманих розв'язків, коли малий параметр прямує до нуля. Продемонстровано суть теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра для систем з регулярним збуренням. Для квадратного рівняння проведено порівняльний аналіз ряду Тейлора для точних і отриманих асимптотичних розв'язків, а для рівняння Дюфінга з малою нелінійністю проведено порівняльний аналіз графіків точних і асимптотичних розв'язків з однаковими початковими умовами.

Список використаних джерел:

1. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон . – М. : Наука, 1966. – 664 с.
2. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе / Н. Г. де Брейн. – М. : изд-во иностран. лит-ры, 1965. – 248 с.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ. – М. : Мир, 1976. – 456 с.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.
5. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер. – М. : Наука, 1978. – 376 с.
6. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Наука, 1974. – 504 с.
7. Митропольський Ю.А. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю.А. Митропольський, Д.И. Мартинюк. – К. : Вища шк., 1979. – 248 с.
8. Mitropolsky Yu.A. On asymptotic solutions to delay differential equations with slowly varying coefficients / Yu.A. Mitropolsky, V.H. Samoilenko, G. Matarazzo // Nonlinear analysis, 2003. – Vol. 52. – P. 971–988.

Надійшла до редколегії 22.12.19

А. Верьовкина, канд. физ.-мат. наук, доц.,
 И. Гапьяк, канд. физ.-мат. наук, ассист.,
 В. Самойленко, д-р физ.-мат., проф.,
 Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
 Т. Телятник, студ.,
 Киевский университет имени Бориса Гринченко, Киев, Украина

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Для квадратного уравнения, содержащего малый параметр регулярным образом, и уравнения Дюфинга с малой нелинейностью построены их асимптотические решения в виде асимптотических по Пуанкаре рядов по малому параметру и проанализированы свойства полученных решений, когда малый параметр стремится к нулю. Продемонстрирована суть теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра для систем с регулярным возмущением. Для квадратного уравнения проведен сравнительный анализ ряда Тейлора для точных решений и полученных асимптотических приближений, а для уравнения Дюфинга с малой нелинейностью проведен сравнительный анализ графиков точных и асимптотических решений с одинаковыми начальными условиями.

Ключевые слова: асимптотический анализ, метод малого параметра, регулярные возмущения, асимптотический ряд по Пуанкаре, уравнения Дюфинга.

G. Verovkina, Ph. D., assoc. prof.,
 I. Gapyak, Ph. D., assist. prof.,
 V. Samoilenko, Full Doctor, prof.
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 T. Telyatnik, stud.
 Boris Grinchenko University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF SOLUTIONS TO EQUATIONS WITH REGULAR PERTURBATION

For a quadratic equation containing a small parameter regularly, and for the Duffing equation with small nonlinearity, their asymptotic solutions are constructed in the form of asymptotic Poincaré series for a small parameter. The properties of the obtained asymptotic solutions when a small parameter tends to zero are analyzed. The sense of the theorem on the continuous dependence of the solution on the parameter for systems with regular perturbation is demonstrated. A Taylor series for the exact solution of the quadratic equation with small parameter is compared with its obtained asymptotic expansion. For the Duffing equation with small nonlinearity, we compare the graphs of the exact and asymptotic solutions under the same initial conditions.

Keywords: asymptotic analysis, small parameter method, regular perturbation, asymptotic series in Poincaré sense, the Duffing equation.

УДК 517.928

DOI: <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2019.01-40.05.19-25>

С. Пафик, канд. фіз.-мат. наук
 Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
 E-mail: s.p.pafyk@npu.edu.ua

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОТЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У НЕКРИТИЧНОМУ ТА КРИТИЧНОМУ СТІЙКИХ ВИПАДКАХ

Використовуючи асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь та їхніх систем, побудовано асимптотичний розв'язок крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь. Розглянуто некритичний і критичний стійкі випадки. Для кожного з випадків знайдено відповідні асимптотичні оцінки.

Ключові слова: асимптотичні розв'язки, метод малого параметра, сингулярне збурення, двотчкова крайова задача, асимптотичні оцінки.

1. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t; \varepsilon)x + f(t; \varepsilon), \quad (1)$$

$$Mx(0; \varepsilon) + Nx(T; \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

де $t \in [0; T]$, ε – малий дійсний параметр, такий що $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$; $A(t; \varepsilon)$ – матриця n -го порядку, коефіцієнтами якої є дійсні або комплекснозначні функції; M і N – матриці n -го порядку зі сталими коефіцієнтами; $f(t; \varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ – задані n -вимірні вектори; $x(t; \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) матриця $A(t; \varepsilon)$ і вектор $f(t; \varepsilon)$ допускають на заданому відрізку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε :

$$A(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), f(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_k(t); \quad (3)$$

2) вектор $d(\varepsilon)$ записується у вигляді асимптотичного ряду

$$d(\varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k d_k; \quad (4)$$

3) коефіцієнти $A_k(t)$, $f_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, розвинень (3) нескінченно диференційовані на $[0; T]$;

4) матриця $A_0(t)$ має на відрізку $[0; T]$ n різних власних значень $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$;

5) $\det M \neq 0$.

При виконанні цих умов будемо досліджувати питання про існування та єдиність розв'язку задачі (1), (2) і побудову її асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ у некритичному та критичному стійких випадках.

2. Асимптотика розв'язання крайової задачі в некритичному стійкому випадку. Припустимо, що окрім умов 1)–5), сформульованих у п. 1, виконується наступна:

6) $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0, i = \overline{1, n}, \forall t \in [0; T]$.

Із цієї умови випливає, що серед власних значень матриці $A_0(t)$ немає нульового, тобто спостерігається некритичний випадок.

При виконанні умов 1) – 6) розглянемо питання побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) у некритичному стійкому випадку.