УДК 519.925.51

Кулян В.Р.[1], к.т.н., доц., Юнькова О.О.[2], к.ф.-м.н., доц., Рутицька В.В.[1], к.т.н., Кулян А.В.[1], студент

Деякі задачі математичного моделювання при управлінні банківськими активами

Розглядається проблема побудови математичної моделі та управління портфелем банківських активів як задача оптимізації динамічної системи.

Ключові слова: математична модель, ідентифікація параметрів, інвестиційний портфель, банківські активи

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2] Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, 03068, м. Київ, пр. Перемоги, 54/1
e-mail: olenayunkova@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

V.R.Kulyan[1], Ph.D., Ass. Prof., O.O.Yunkova[2], Ph.D., Ass. Prof., V.V. Rutytskaya[1] , Ph.D., A.V.Kulyan[1], Stud.

Some problems of mathematical modeling in the management of bank assets

The problems of constructing a mathematical model and portfolio management of bank assets as a problem of optimization of dynamic systems are investigated.

Key Words: mathematical model, identification of parameters, portfolio management, bank assets

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: v.kulyan@gmail.com

[2] Vadim Getman National Ekonomy University of Kyiv, 03068,Kyiv, Peremogy ave, 54/1
e-mail: olenayunkova@mail.ru

Динамічні та статичні моделі управління активами і зобов'язаннями знайшли успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади застосування таких моделей реалізовано для інвестиційних задач фондового ринку, страхових та інвестиційних компаній, банків та університетських фондів.

Разом з тим, деякі класичні постановки задач моделювання на фондовому ринку знайшли своє застосування в інших прикладних сферах, наприклад, у банківському секторі економіки. Серед них можна виділити задачі Г. Марковиця та Д. Тобіна про інвестування у портфелі цінних паперів однорідної та змішаної структури відповідно. Задача Г. Марковиця про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його прибутковості у статичному випадку має такий вигляд

$$r_p = \sum_i x_i r_i \to \max_x ,$$

де x_i – частка акцій і-того виду у портфелі; r_i – очікувана прибутковість акції і-того виду. Очевидно, що інвесторами задача розглядається у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) \to \max_x ,$$

тут Т- горизонт інвестування;
і полягає у побудові оптимального за прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля. Дослідження математиків і економістів у галузі фінансового аналізу спрямовані на вивчення різних змістових інтерпретацій і узагальнень існуючих постановок задач та поширення їх на нові сфери застосування.

Прикладами такого підходу можуть бути:

1. Задача про оптимальний розподіл інвестиційних ресурсів комерційного банку.
2. Задача про оптимальне кредитування комерційним банком.

3. Задача про оптимізацію розподілу активів комерційного банку з урахуванням обов'язкового резервування.

Для ознайомлення із математичною постановкою та підходами до розв'язання перших двох можна звернутись до [2]. Додамо лише, що формально задача про розподіл інвестиційних ресурсів комерційного банку ідентична задачі інвестування у цінні папери на фондовому ринку, тому підходи, описані в [2], повністю або частково можна застосувати при розв'язанні задач п.1 та п.2.

Третя згадана задача є новою у сучасному банківському менеджменті, тому розглянемо її детально. При формальному математичному записі цієї задачі звернемо увагу на те, що іноді зручніше розглядати процеси інвестування не у частках капіталу, що виділяється для інвестування, а безпосередньо у сумі коштів W_i, що виділяються для інвестування у $i-$тий напрямок; W – загальна сума коштів. Тоді задача матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}(r_i - p_i)W_i \to \max_{\overline{W}}, \qquad (1)$$

де $\overline{W} = (W_1, W_2 ... W_n)^T$ - вектор-стовпчик, координатами якого є суми коштів, що виділяються для інвестування у відповідні напрямки; r та $p-$вектор-стовпчики розмірності $n \times 1$, перший з яких характеризує очікувану прибутковість $i-$того інвестиційного напрямку, а другий - відсоток від суми, що може бути інвестована у відповідний напрямок і який є обов'язковим для резервування. Згідно Марковицю, другий критерій класичної двокритеріальної задачі про оптимальний інвестиційний портфель має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i \sigma_{ij} W_j \to \min_{\overline{W}}, \qquad (2)$$

де σ_{ij} – коваріація між $i-$тим та $j-$тим інвестиційними напрямками.

Векторно-матричний вигляд задачі є таким

$$\begin{cases} R^T \overline{W} \to \max\limits_{\overline{W}} \\ (\overline{W})^T V \overline{W} \to \min\limits_{\overline{W}} \\ I^T \overline{W} = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}, \qquad (3)$$

де V – коваріаційна матриця; R – вектор розмірності $n \times 1$, координатами якого є $r_i - p_i$, $i = \overline{1,n}$; символ Т- знак транспонування. Сформульована вище задача є двокритеріальною із суперечливими критеріями. Як правило, для розв'язання такого типу задач застосовують методи, що дозволяють будувати множини розв'язків. Серед них виділимо суб'єктивно-орієнтований підхід з прийняття інвестиційних рішень, що ґрунтується на побудові та аналізі допустимої та ефективної множин, а також метод побудови Парето – оптимальної множини розв'язків. Маючи на меті побудову аналітичного розв'язку задачі, і, виходячи із практичних міркувань, перший критерій в (3) замінимо рівністю

$R^T \overline{W} = S$.

Тоді (3) матиме вигляд нелінійної задачі одномірної оптимізації при обмеженнях

$$\begin{cases} (\overline{W})^T V \overline{W} \to \min\limits_{\overline{W}} \\ R^T \overline{W} = S \\ I^T \overline{W} = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}, \qquad (4)$$

де S – бажаний рівень прибутку інвестиційної операції.

Застосуємо для її розв'язання метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа

$L = (\overline{W})^T V \overline{W} + \lambda_1 (R^T \overline{W} - S) + \lambda_2 (I^T \overline{W} - 1)$

містить два невідомі параметри λ_1 і λ_2 і задача полягає у визначенні елементів вектора $\overline{W}$.

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{W}} = 2V\overline{W} + \lambda_1 R + \lambda_2 I,$$

$$\overline{W} = (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I). \qquad (5)$$

Параметри λ_1 та λ_2 визначимо із системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} R^T (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I) = S, \\ I^T (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I) = 1. \end{cases}$$

Із першого рівняння

$$-\lambda_1 R^T (2V)^{-1} R = S + \lambda_2 R^T (2V)^{-1} I,$$

$$-\lambda_1 = (R^T (2V)^{-1} R)^{-1} (S + -\lambda_2 R^T (2V)^{-1} I). \qquad (6)$$

Із другого рівняння

$$-\lambda_1 I^T (2V)^{-1} R = 1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I,$$

$$-\lambda_1 = (I^T (2V)^{-1} R)^{-1} (1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I). \qquad (7)$$

Прирівняємо (6) та (7)

$$(R^T(2V)^{-1}R)^{-1}(S+\lambda_2 R^T(2V)^{-1}I)=$$
$$(I^T(2V)^{-1}R)^{-1}(1+\lambda_2 I^T(2V)^{-1}I). \qquad (8)$$

Отримали лінійне рівняння відносно λ_2. Розв'яжемо його і знайдене значення параметра λ_2 підставимо у (6) або (7) і визначимо λ_1.

Після підстановки визначених значень їх у (5) отримаємо шукані частки банківських інвестицій.

Для зменшення ризику портфеля часто банківські активи розподіляють не тільки серед ризикованих напрямків інвестування, але також і серед неризикованих. Прикладом такого вкладення ресурсів можуть бути державні та недержавні боргові зобов'язання, і це дозволяє ефективно диверсифікувати інвестиційний портфель.

Математична постановка задачі може бути такою

$$\begin{cases} R^T\overline{W}+R^0W^0 \to \max\limits_{W} \\ (\overline{W})^T V\overline{W} \to \min\limits_{W} \\ I^T\overline{W}+W^0=1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}, \qquad (9)$$

де W^0 – сума коштів, що виділяються на інвестування у неризиковані цінні папери. Як і у випадку попередньої задачі, розглянемо однокритеріальну її постановку.

$$\begin{cases} (\overline{W})^T V\overline{W} \to \min\limits_{W} \\ R^T\overline{W}+R^0W^0=S \\ I^T\overline{W}+W^0=1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}. \qquad (10)$$

Функція Лагранжа

$$L=(\overline{W})^T V\overline{W}+\lambda_1(R^T\overline{W}+R^0W^0-S)+$$
$$\lambda_2(I^T\overline{W}+W^0-1)$$

на відміну від попереднього випадку, містить додаткову невідому W^0.

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{W}}=2V\overline{W}+\lambda_1 R+\lambda_2 I=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial W^0}=\lambda_1 R^0+\lambda_2=0, \qquad (11)$$
$$\overline{W}=(2V)^{-1}(-\lambda_1 R-\lambda_2 I).$$
$$\lambda_2=-\lambda_1 R^0. \qquad (12)$$

Для визначення невідомих параметрів λ_1 та λ_2 скористаємось другим та третім рівняннями системи (10). Після підстановки в них λ_2 із (12) отримаємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$R^0(1-I^T\overline{W}(\lambda_1))=S-R^T\overline{W}(\lambda_1),$$

що містить одне невідоме λ_1. Розв'яжемо його, підставимо λ_1 у (12) та визначимо λ_2. Тепер маємо можливість визначити оптимальні суми коштів, що можуть бути інвестовані у ризиковані та неризиковані проекти.

Як сказано раніше, поряд з наведеною вище задачею мінімізації ризику інвестиційної операції для заданого рівня прибутковості за умови обов'язкового резервування можна навести спряжену з нею задачу про максимізацію прибутку для заданого рівня ризику за умови обов'язкового резервування. Формальна постановка задачі оптимізації інвестиційного портфеля однорідної структури має такий вигляд

$$\begin{cases} R^T\overline{W} \to \max\limits_{W} \\ (\overline{W})^T V\overline{W}=\tau \\ I^T\overline{W}=1 \\ W_i \ge 0 \end{cases},$$

де τ - заданий допустимий рівень ризику. Цю задачу можна сформулювати і для випадку інвестиційного портфеля змішаної структури

$$\begin{cases} R^T\overline{W}+R^0W^0 \to \max\limits_{W,W^0} \\ (\overline{W})^T V\overline{W}=\tau \\ I^T\overline{W}+W^0=1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}.$$

Підходи до розв'язання двох останніх задач можуть бути аналогічними застосованим вище.

Розглянута вище задача є цікавою та актуальною у сучасному банківському менеджменті, хоча більш глибокий її аналіз вказує на деякі важливі проблеми, що залишились поза увагою. Одним із таких важливих питань є питання про побудову очікуваної прибутковості інвестиційного напрямку. Це питання короткострокового прогнозування очікуваної прибутковості і для його розв'язання скористаємось динамічною моделлю формування ринкової вартості [2]. Відповідне звичайне диференціальне рівняння є лінійним і заданим параметрично. Структура його відповідає структурі ринкової моделі Шарпа, а права частина враховує найбільш важливі фактори, що впливають на динаміку формування очікуваної прибутковості. У загальному вигляді воно може бути записано так:

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ \ r_i(t_0) = r_0,\ \ t \in (t_0, T),\ \ i = \overline{1, n}.$$

Наведена система є лінійною, що задана параметрично, і для її інтегрування побудуємо процедуру визначення параметрів моделі α. Скористаємось при цьому відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних інвестиційних напрямків $\overline{r_i}\ (t)$.

На її основі розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для $i-$того напрямку інвестування і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0),\ \ r_i(t_0) = r_{i0},\ \ t \in (t_0, t_1).$$

Нехай розв'язком цієї задачі буде траєкторія

$$r_1(t),\ \ t \in (t_0, t_1).$$

Далі сформулюємо оптимізаційну задачу з метою отримання оптимального значення параметра α_1^*

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} (r_i^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r_i}(t))^2 \qquad (13)$$

або

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} \max_{t} (r^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r_i}(t))^2. \qquad (14)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі. Таким чином, вище наведено процедуру ідентифікації параметрів динамічної математичної моделі оптимальних у розумінні критеріїв оптимальності (13) або (14).

Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах функціонування системи. На $k-$тому кроці алгоритму процедура визначення оптимальних значень параметрів динамічної моделі може бути такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1}),\qquad r_i(t_{k-1}) = r_{k-1}\qquad t \in (t_{k-1}, t_k),\ \ i = \overline{1, n}.$$

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.
3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_{k-1}^* = arg \min_{\alpha} (r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha_{k-2}^*) - \overline{r}_{k-1}(t))^2$$

або

$$\alpha_{k-1}^* = arg \min_{\alpha} \max_{t} (r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha_{k-2}^*) - \overline{r}_{k-1}(t))^2,$$

розв'язком кожної з них буде значення параметра α_{k-1}^*, що переводить систему із точки r_{k-1} у точку r_k.

Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі, яка дозволяє моделювати поведінку та прогнозувати очікувану прибутковість інвестиційного напрямку r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу. Варто відмітити, що при розбитті інтервалу інтегрування на підінтервали необхідно враховувати також значення складових вектора станів системи для коректного застосування знайдених параметрів при розв'язанні відповідних траєкторних задач.

Таким чином, у роботі розглянуто деякі актуальні задачі математичного моделювання при управлінні банківськими активами, сформульовано нові постановки задач банківського інвестиційного менеджменту та побудовано процедури розв'язання деяких з них.

Список використаних джерел

1. Bublik B.N.,Garashchenko F.G., Kirichenko N.F. Structural and self-reactance optimization and stability of dynamics of bunches. -Kyiv, Naukova dumka, 1985. –304p. (in Russian).
2. Garashchenko F.G., Kulyan V.R., Rutitskaya V.V. Quality analysis of mathematical models of investment management. –Kyiv, //Cybernetics and computing engineering. – 2005. –N 148. –p.3-10. (in Russian).
3. Krylov I.A., Chernousko F.L. Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems. – Moskow, Nauka, 1971. –247p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 10.01.2013р.