УДК 512.54

О.О.Безущак[1], к. ф.-м. н., доц.

Орбіти залишково періодично визначених матричних груп над полями

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64,
e-mail: bezusch@univ.kiev.ua

O.O.Bezushchak[1], Ph.D., Associate Prof.

Orbits of residual periodically defined matrix groups over fields

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64,
e-mail: bezusch@univ.kiev.ua

Розглядаються групи невироджених нескінченно вимірних блоково–діагональних матриць, у кожному блоці яких (можливо за винятком першого) повторюється одна й та ж невироджена матриця, а розміри блоків є дільниками деякого супернатурального числа. Охарактеризовано орбіти таких груп при їх дії множенням справа на векторному просторі всіх нескінченних послідовностей над полем K.

Ключові слова: супернатуральне число, орбіта групової дії, невироджене лінійне перетворення, невироджена нескінченно вимірна матриця, фінітарне лінійне перетворення, (залишково) періодично визначене лінійне перетворення.

Groups of non-degenerate infinite dimensional block–diagonal matrices, each block of which (possibly except the first one) has the same non-degenerate matrix, and sizes of blocks are divisors of a super integer number are considered. Also are mentioned groups, generated by such groups and by the group of all non-degenerate infinitely dimensional block–diagonal matrices with not more than one (first) nonidentity block. Orbits of such groups with their actions by multiplication on the right on the vector space of all infinite sequences over field K are characterized.

Keywords: super integer number, orbit of group action, non-degenerate linear transformation, non-degenerate infinite dimensional matrix, finitary linear transformation, (residual) periodically defined linear transformation.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор В.В.Кириченко

1 Групи періодично визначених та залишково періодично визначених перетворень і їх матрична реалізація

Нехай K — фіксоване поле, V — зліченно вимірний лінійний простір над K, $B = (e_i)_{i\in N}$ — деяка його база. Кожна послідовність натуральних чисел $\chi = (n_i)_{i\in N}$ завдає χ–розбиття бази B на скінченні частини

$$e_1, \dots, e_{n_1} \,|\, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2} \,|\, e_{n_1+n_2+1}, \dots \;, \tag{1}$$

які складаються з n_1, n_2, … векторів відповідно. Нехай $V(l)$ — підпростір простору V, натягнутий на вектори l–го фрагменту розбиття (1), $l \in N$, а

$$V = \bigoplus_{l=1}^{\infty} V(l) \tag{2}$$

— розклад V на пряму суму підпросторів $V(l)$, який назвемо χ–розкладом V.

Лінійне перетворення $f : V \to V$ назвемо узгодженим з χ–розкладом (2) (або χ–розбиттям (1)), якщо для довільного $l \in N$ справедливе включення $f(V(l)) \subseteq V(l)$. Кожне лінійне перетворення f, узгоджене з χ–розкладом (2), може бути задане в базі B своєю матрицею, яка є нескінченно вимірною блоково–діагональною з розмірами діагональних блоків, що визначаються послідовністю χ.

Означення 1. *Лінійне перетворення $f : V \to V$ називається:*

(i) періодично визначеним щодо бази B, якщо існує таке натуральне число n, що f узгоджене з розбиттям виду (1) бази B на фрагменти довжини n, причому на кожному з цих фрагментів f діє однаково, тобто мають місце рівності

$$f(e_{kn+i}) = f(e_i) \tag{3}$$

для всiх $i = 1, 2, \ldots, n$ та $k = 1, 2, \ldots$, при цьому число n називається перiодом визначеностi перетворення f, а мiнiмально можливе таке натуральне n називається мiнiмальним перiодом визначеностi f;

(ii) залишково перiодично визначеним щодо бази B, якщо iснує таке натуральне число m, що пiдпростiр, натягнутий на вектори $e_1, \ldots, e_m$, є iнварiантним вiдносно перетворення f, а на пiдпросторi, натягнутому на вектори $e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots$, це перетворення є перiодично визначеним з деяким перiодом n, тобто дiє на цi вектори згiдно з рiвностями (3)*, при цьому число m називається передперiодом визначеностi f, а число n — його перiодом визначеностi (якщо передперiод m i перiод n узгоджено вибрано мiнiмально можливими, то говоритимемо про мiнiмальний передперiод i мiнiмальний перiод перетворення f);*

(iii) строго залишково перiодично визначеним, якщо воно залишково перiодично визначене, причому його мiнiмальний передперiод визначеностi дiлитьcя на вiдповiдний мiнiмальний перiод визначеностi без остачi.

Лема 1. *1) Усi невироджені перiодично визначенi щодо бази B лiнiйнi перетворення простору V утворюють пiдгрупу в групi $GL(V)$.*

2) Усi невироджені строго залишково перiодично визначенi щодо бази B лiнiйнi перетворення простору V утворюють пiдгрупу в групi $GL(V)$.

Зазначимо, що невироджені залишково перiодично визначенi лiнiйнi перетворення групу не утворюють, бо добуток двох таких перетворень може й не бути перiодично визначеним. Групу всiх невироджених строго залишково перiодично визначених щодо бази B лiнiйних перетворень iз $GL(V)$ позначатимемо символом $GL_{up}(V, B)$, а групу всiх невироджених перiодично визначених щодо бази B лiнiйних перетворень — символом $GL_{per}(V, B)$.

За визначенням перiодично визначене щодо бази B лiнiйне перетворення з перiодом визначеностi n є узгодженим з розбиттям бази B, яке завдається послiдовнiстю $(n, n, \ldots)$, а залишково перiодично визначене щодо бази B лiнiйне перетворення з передперiодом m i перiодом n — з розбиттям B, що визначається послiдовнiстю $(m, n, n, \ldots)$. А тому такi перетворення в базi B задаються нескiнченно вимiрними (вправо i вниз) блоково–дiагональними матрицями, якi для перiодично визначених перетворень мають вигляд

$$a \oplus a \oplus a \oplus \cdots = a^{\oplus \omega}, \tag{4}$$

а для залишково перiодично визначених перетворень — вигляд

$$b \oplus a \oplus a \oplus \cdots = b \oplus a^{\oplus \omega}, \tag{5}$$

де $\oplus$ — знак кронекерiвської суми матриць, a, b — деякi матрицi над полем K порядкiв n та m вiдповiдно ($m, n \in N$). При цьому, якщо перетворення (5) є строго залишково перiодично визначеним, то порядок матрицi b дiлиться на порядок матрицi a без остачi. Для симетричної групи $S(N)$ поняття (залишкової) перiодично визначеної пiдстановки було введено в [1]–[2].

Лiнiйне перетворення $f : V \to V$ називається d–обмеженим щодо бази B [3], якщо при будь–якому $i \in N$ образ вектора e_i бази B є лiнiйною комбiнацiєю векторiв $e_{i-d}, \ldots, e_i, \ldots, e_{i+d}$. Лiнiйне перетворення f обмежене щодо бази B, якщо воно є d–обмеженим при деякому $d \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Невироджені обмеженi щодо бази B лiнiйнi перетворення утворюють пiдгрупу в $GL(V)$, яку позначатимемо символом $GL_{bd}(V, B)$. Кожне d–обмежене щодо бази B лiнiйне перетворення може бути задане нескiнченною обмеженою матрицею, тобто такою, що всi її ненульовi елементи мiстяться в полосi шириною $2d$ навколо головної дiагоналi. Усi матрицi такої структури, для яких iснують оберненi, причому також обмеженi, утворюють групу, яку позначатимемо $GL_{bd}(K)$. Незалежно вiд бази B групи $GL_{bd}(V, B)$ та $GL_{bd}(K)$ є iзоморфними, а тому можна розглядати лише одну з них.

Усi залишково перiодично визначенi щодо бази B перетворення очевидним чином є обмеженими щодо цiєї бази, тобто група $GL_{bd}(V, B)$ (вiдповiдно $GL_{bd}(K)$) мiстить рiзноманiтнi пiдгрупи, якi можна утворювати з таких перетворень. До них належать не лише введенi вище пiдгрупи $GL_{per}(V, B)$ i $GL_{up}(V, B)$, а й група

$GL_{stab}(V,B)$ всіх невироджених лінійних перетворень простору V, які майже стабілізують базу B, тобто таких $g \in GL(V)$, що $g \cdot v = v$ для майже всіх елементів v бази B. Усі такі підгрупи мають матричні аналоги, які не залежать від вибору бази. Безпосередньо з визначення цих підгруп випливає

Лема 2. *Для будь–якої бази B простору V група $GL_{up}(V,B)$ породжується своїми підгрупами $GL_{stab}(V,B)$ та $GL_{per}(V,B)$. Більш того, має місце рівність*

$$GL_{up}(V,B) = GL_{stab}(V,B) \cdot GL_{per}(V,B).$$

З цієї леми, зокрема, дістаємо, що для відповідних матричних груп також виконуватиметься рівність $GL_{up}(K) = GL_{stab}(K) \cdot GL_{per}(K)$.

2 Ґратки родин підгруп $GL_{up}^{(u)}(V,B)$ та $GL_{per}^{(u)}(V,B)$, параметризованих супернатуральними числами

При фіксованій базі B в групі $GL_{per}(V,B)$ виділяється континуальна родина підгруп, які природним чином параметризуються супернатуральними числами.

Нагадаємо, що супернатуральним числом (інакше, — числом Стейніца [5]) називається формальний добуток вигляду

$$\prod_{p\in P} p^{\alpha_p},$$

де P — множина простих чисел, $\alpha_p \in N \cup \{0,\infty\}$. На множині супернатуральних чисел SN вводиться відношення подільності:

число $u = \prod_{p\in P} p^{\alpha_p}$ є дільником числа $v = \prod_{p\in P} p^{\beta_p}$,

якщо для всіх $p \in P$ маємо $\alpha_p \leqslant \beta_p$ (при цьому вважаємо, що ∞ є більшим від усіх натуральних чисел і нуля). Частково впорядкована множина $(SN, |)$ є повною ґраткою з найбільшим і найменшим елементами, які, відповідно, дорівнюють

$$I = \prod_{p\in P} p^{\infty} \quad \text{та} \quad 1 = \prod_{p\in P} p^{0}.$$

Для кожного супернатурального числа u визначимо підгрупу $GL_{per}^{(u)}(V,B)$ в групі $GL_{per}(V,B)$ як таку, що складається з тих і лише тих лінійних перетворень з розкладами вигляду (4), для яких мінімальні періоди є дільниками числа u.

Підгрупу групи $GL_{up}(V,B)$, яка породжується $GL_{stab}(V,B)$ і $GL_{per}^{(u)}(V,B)$, позначатимемо $GL_{up}^{(u)}(V,B)$.

Лема 3. *При фіксованій базі B кожна з родин підгруп*

$$\{GL_{up}^{(u)}(V,B) \,|\, u \in SN\} \tag{6}$$

та

$$\{GL_{per}^{(u)}(V,B) \,|\, u \in SN\} \tag{7}$$

утворює ґратку щодо включення, яка ізоморфна ґратці супернатуральних чисел.

Доведення легко випливає з того, що різним супернатуральним числам у кожній з родин відповідають різні підгрупи, а відношення $u \,|\, v$ для супернатуральних чисел u, v виконується тоді й лише тоді, коли

$$GL_{up}^{(u)}(V,B) \leqslant GL_{up}^{(v)}(V,B),$$

а

$$GL_{per}^{(u)}(V,B) \leqslant GL_{per}^{(v)}(V,B).$$

□

Елементи ґраток (6) та (7), яким відповідають супернатуральні числа з $SN \backslash N$, утворюють верхні напівґратки. Мінімальними елементами в так визначених напівґратках є, відповідно, підгрупи вигляду

$$GL_{up}^{(p^{\infty})}(V,B), \quad GL_{per}^{(p^{\infty})}(V,B), \; p \in P.$$

Матричні аналоги підгруп $GL_{up}^{(u)}(V,B)$ і $GL_{per}^{(u)}(V,B)$ позначатимемо символами $GL_{up}^{(u)}(K)$ та $GL_{per}^{(u)}(K)$ відповідно.

3 Орбіти груп $GL_{up}^{(u)}(K)$ та $GL_{per}^{(u)}(K)$ на просторі K^{ω}

Нехай K^{ω} — множина всіх нескінченних послідовностей над полем K. На цій множині природно визначено дії додавання послідовностей і множення послідовності на скаляр, тобто вона має структуру лінійного простору над полем K континуальної розмірності. Група лінійних перетворень цього простору діє на ньому (за винятком нульового вектора) транзитивно. Групи

$GL_{up}^{(u)}(K)$ і $GL_{per}^{(u)}(K)$, $u \in SN$, діють на K^ω множенням матриць (справа) на вектор, оскільки у виразі $\bar{x} \cdot a$, $\bar{x} \in K^\omega$, $a \in GL_{bd}(K)$, добуток рядка $\bar{x}$ на кожен стовпчик матриці a має сенс, бо в стовпчику лише скінченна кількість елементів, відмінних від нуля. Відображення $\bar{x} \to \bar{x} \cdot a$, $\bar{x} \in K^\omega$, є лінійним для довільного $a \in GL_{bd}(K)$, а тому $GL_{up}^{(u)}(K)$ і $GL_{per}^{(u)}(K)$ можна розглядати як підгрупи групи лінійних перетворень простору K^ω ($u \in SN$). Кожна з цих груп діє на просторі K^ω інтранзитивно, тобто виникає задача характеризації їх орбіт на K^ω. Охарактеризуємо спочатку орбіти групи $GL_{stab}(K)$ на K^ω.

Означення 2. *Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in K^\omega$ назвемо конфінальними, якщо при деякому $m \in N$ для всіх $i \geqslant m$ виконуються рівності $x_i = y_i$.*

Твердження 1. *Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in K^\omega$ містяться в одній орбіті групи $GL_{stab}(K)$ при її дії множенням справа на елементи K^ω тоді й лише тоді, коли ці послідовності є конфінальними.*

Доведення. Нехай $\bar{x}$, $\bar{y}$ належать до однієї орбіти групи $GL_{stab}(K)$ на K^ω. Тоді існує така матриця $a \in GL_{stab}(K)$, що $\bar{x} \cdot a = \bar{y}$. Матриця a є фінітарною, тобто має вигляд

$$a = \begin{pmatrix} a' & & \mathrm{O} & \\ & 1 & & \\ \mathrm{O} & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Припустимо, що a' — матриця порядку m. Тоді дію a на послідовність $\bar{x}$ можна зобразити у вигляді

$$\bar{x} \cdot a = \big((x_1, \ldots, x_m) \cdot a', x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\big),$$

тобто послідовності $\bar{x}$ та $\bar{y} = \bar{x} \cdot a$ — конфінальні.

З іншого боку, припустимо, що послідовності $\bar{x}$ та $\bar{y}$ — конфінальні, тобто при деякому натуральному m маємо $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots)$. Група $GL_m(K)$ діє на K^m множенням справа, причому ця дія транзитивна на множині ненульових векторів. А тому існує матриця $a' \in GL_m(K)$ така, що $(x_1, \ldots, x_m) \cdot a' = (y_1, \ldots, y_m)$. Тоді фінітарна матриця a, визначена рівністю (8) для так вибраної матриці a', переводить послідовність $\bar{x}$ у послідовність $\bar{y}$. $\square$

Символом σ позначимо оператор зсуву на елементах послідовностей $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in K^\omega$, тобто $\sigma(x_i) = x_{i+1}$. Тоді

$$\sigma^k(x_i) = x_{i+k},\ \sigma^k(\sigma^l(x_i)) = \sigma^{k+l}(x_i)$$

для довільних $i, k, l \in N$. Окремо покладемо $\sigma^0(x_i) = x_i$, $i \in N$.

Означення 3. *Нехай u — фіксоване супернатуральне число. Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in K^\omega$ назвемо u–подібними, якщо існують натуральне число n, $n \mid u$, та невироджена матриця $a \in GL_n(K)$ такі, що при будь–якому $k = 0, 1, \ldots$ має місце рівність*

$$\Big(\sigma^{kn}(y_1), \ldots, \sigma^{kn}(y_n)\Big) = \Big(\sigma^{kn}(x_1), \ldots, \sigma^{kn}(x_n)\Big) \cdot a. \qquad (9)$$

Лема 4. *Відношення u–подібності є еквівалентністю на K^ω.*

Доведення. Рефлексивність і симетричність відношення u–подібності випливають безпосередньо з його визначення. Залишається пересвідчитися, що це відношення є транзитивним. Нехай $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in K^\omega$ — такі послідовності, що $\bar{x}$ і $\bar{y}$ та $\bar{y}$ і $\bar{z}$ є u–подібними. Покажемо, що $\bar{x}$ і $\bar{z}$ також u–подібні. u–подібність $\bar{x}$ і $\bar{y}$ означає, що для деякого натурального числа n, $n|u$, і матриці $a \in GL_n(K)$ мають місце рівності (9), а u–подібність $\bar{y}$ і $\bar{z}$ означає, що для деякого натурального числа m, $m|u$, і матриці $b \in GL_m(K)$ мають місце аналогічні рівності

$$\Big(\sigma^{km}(z_1), \ldots, \sigma^{km}(z_m)\Big) = \Big(\sigma^{km}(y_1), \ldots, \sigma^{km}(y_m)\Big) \cdot b,$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. З того, що $n|u$ і $m|u$ випливає, що $s = \text{НСК}(n, m)$ також є дільником u. Нехай $r_1 = s/n$, $r_2 = s/m$. Розглянемо матриці порядку s :

$$\bar{a} = \underbrace{a \oplus \cdots \oplus a}_{r_1}, \quad \bar{b} = \underbrace{b \oplus \cdots \oplus b}_{r_2}.$$

Для них маємо:

$$\Big(\sigma^{ks}(y_1), \ldots, \sigma^{ks}(y_s)\Big) = \Big(\sigma^{ks}(x_1), \ldots, \sigma^{ks}(x_s)\Big) \cdot \bar{a}$$

та

$$\Big(\sigma^{ks}(z_1), \ldots, \sigma^{ks}(z_s)\Big) = \Big(\sigma^{ks}(y_1), \ldots, \sigma^{ks}(y_s)\Big) \cdot \bar{b}.$$

З цих рівностей дістаємо

$$\Big(\sigma^{ks}(z_1), \ldots, \sigma^{ks}(z_s)\Big) = \Big(\sigma^{ks}(x_1), \ldots, \sigma^{ks}(x_s)\Big) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b},$$

тобто $\bar{x}$ і $\bar{z}$ є u–подібними. $\square$

Теорема 1. *Нехай $u \in SN$ — фіксоване нескінченне супернатуральне число. Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in K^\omega$ містяться в одній орбіті групи $GL_{per}^{(u)}(K)$ при її дії множенням справа на послідовності із K^ω тоді й лише тоді, коли $\bar{x}$ та $\bar{y}$ є u–подібними.*

Доведення. 1) Нехай $\bar{x}$ та $\bar{y}$ містяться в одній орбіті групи $GL_{per}^{(u)}(K)$ на K^ω. Тоді існує матриця $a \in GL_{per}^{(u)}(K)$ така, що $\bar{y} = \bar{x} \cdot a$. Оскільки $a \in GL_{per}^{(u)}(K)$, то при певному натуральному n, $n|u$, її можна записати у вигляді

$$a = c^{\oplus\omega} \tag{10}$$

для деякої матриці $c \in GL_n(K)$. Діючи множенням справа на послідовність $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ матрицею (10) дістаємо послідовність

$$\bar{z} = \big((x_1, \ldots, x_n) \cdot c, (x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \cdot c, (x_{2n+1}, \ldots, x_{3n}) \cdot c, \ldots\big). \tag{11}$$

Згідно з визначенням 3 остання рівність означає, що послідовності $\bar{x}$ та $\bar{y}$ є u–подібними з матрицею подібності c.

2) Нехай $\bar{x}$ та $\bar{y}$ є u–подібними. Тоді при деякому n, $n|u$, існує невироджена матриця $c \in GL_n(K)$ така, що для кожного $k = 0, 1, 2, \ldots$ виконується рівність (9). Ця нескінченна система рівностей рівносильна рівності (11). А тому взявши матрицю $a \in GL_{per}^{(u)}(K)$ як у рівності (10) дістаємо, що $\bar{y} = \bar{x} \cdot a$. Отже, $\bar{x}$, $\bar{y}$ містяться в одній орбіті групи $GL_{per}^{(u)}(K)$ і теорему доведено. $\square$

Означення 4. *Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in K^\omega$ назвемо залишково u–подібними, якщо існують натуральні числа n та m, $n|u$, $n|m$, і невироджені матриці $a \in GL_n(K)$, $b \in GL_m(K)$ такі, що виконуються рівності:*

1) $(y_1, y_2, \ldots, y_m) = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \cdot b$;
2) $\big(\sigma^{kn}(y_1), \ldots, \sigma^{kn}(y_n)\big) = \big(\sigma^{kn}(x_1), \ldots, \sigma^{kn}(x_n)\big) \cdot a$, *для* $k = m/n, m/n + 1, \ldots$.

Теорема 2. *Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in K^\omega$ містяться в одній орбіті групи $GL_{up}^{(u)}(K)$ при її дії множенням справа на елементи із K^ω тоді й лише тоді, коли $\bar{x}$ та $\bar{y}$ є залишково u–подібними.*

Доведення. Досить скористатися лемою 2, твердженням 1 та теоремою 1. $\square$

Список використаних джерел

1. *Назарук В.* Групи періодично визначених підстановок / В. Назарук, В. Сущанський // Доповіді НАН України. – 2003. – № 3. – С. 26-30.
2. *Назарук В.* Группы периодически определенных подстановок счетной степени / В. Назарук, В. Сущанський // Матем. Студії. – 2003. – **19**. – № 2. – С. 115-126.
3. *Holubowski W.* Groups of infinite matrices / W. Holubowski // Groups St. Andrews 2005, vol.2, Cambridge, Cambr. Univ. Press. – 2007. – P. 491-496.
4. *Phillips R.E.* The structure of groups of finitary transformations / R.E. Phillips // J. Algebra 119 (1988). – P. 400-448.
5. *Steinitz E.* Algebraische Theorie der Körper / E. Steinitz. – New York: Chelsea Publ. – 1950 – 176 p.

References

1. NAZARUK V., SUSHCHANSKY V. (2003) *Grupy periodychno vyznachenyh pidstanovok.* Dopovidi NAN Ukraina. – No.3. – P. 26–30.
2. NAZARUK V., SUSHCHANSKY V. (2003) *Grupy periodycheski opredelennih podstanovok schetnoi stepeni.* Matem. Studii. – **19**. – No.2. – P. 115-126.
3. HOLUBOWSKI W. (2007) *Groups of infinite matrices.* Groups St. Andrews 2005, Cambridge, Cambr. Univ. Press 2007. – Vol.2 – P. 491-496.
4. PHILLIPS R.E. (1988) *The structure of groups of finitary transformations.* J. Algebra. – Vol.119. – P. 400-448.
5. Steinitz E. (1950) *Algebraische Theorie der Körper.* New York: Chelsea Publ. – 176 p.

Надійшла до редколегії 25.11.2013