УДК 517.968.2

Козлова Н. О.[1], аспірант,
Ферук В. А.[2], к.ф.-м.н., н.с.

Слабкозбурені лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: nkozlovaa@gmail.com
[2] Інститут математики НАН України, 01004, м. Київ, вул. Терещенківська 3,
e-mail: feruk.viktor@gmail.com

N. O. Kozlova[1], Postgraduate Student,
V. A. Feruk[2], PhD (Phys.-Math.), researcher

Weakly perturbed linear boundary-value problems for integral equations

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: nkozlovaa@gmail.com
[2] Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 01004, Kiev, Tereschenkivska st., 3,
e-mail: feruk.viktor@gmail.com

Отримано умови біфуркації розв'язків слабкозбуреної лінійної крайової задачі для інтегрального рівняння, за припущенням, що породжуюча задача є нерозв'язною. Побудовано розв'язок поставленої задачі у вигляді частини ряду за степенями малого параметра зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені.

Ключові слова: інтегральне рівняння, нетерова крайова задача, збурення, псевдообернена матриця, ортопроектор.

In this paper we consider weakly perturbed inhomogeneous linear boundary-value problem for Fredholm integral equations. The peculiarity of this problem is that the nonperturbed linear boundary-value problem is not always solvable.

Scheme of investigation of considered boundary-value problem is based on the transition from boundary-value problem (1) to an equivalent weakly perturbed boundary-value problem for countable measurable system of algebraic equations. We consider a critical case of the first order. The question of the solvability and the structure of the solution set of weakly perturbed linear boundary-value problem for integral equations were considered. Using the Vishik-Lyusternik method, we obtain bifurcation conditions of solutions of boundary-value problem (1). The solution of weakly perturbed boundary-value problem for integral equations is constructed as part of power series of a small parameter ε with finitely many terms with negative powers of ε.

Key Words: integral equation, Fredholm boundary-value problem, perturbation, pseudoinverse matrix, orthoprojector.

Статтю представив д.ф.-м.н., академік НАН України Перестюк М. О.

Теорії нетерових крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь, що інтенсивно розвивається останні десятиліття, присвячено чимало робіт [1-3]. Зокрема, у [2], за умови існування єдиного розв'язку, обґрунтовано застосування до таких задач різних варіантів проекційно-ітеративного методу. Однак, важливим є випадок, коли розв'язок поставленої задачі не буде єдиним. Один із підходів до дослідження таких задач ґрунтується на залученні апарату теорії псевдообернених операторів, що дозволяє встановити умови існування і структуру розв'язків різних класів нетерових крайових задач [3-6]. Слід відзначити, що в більшості вищезазначених досліджень розглядається випадок виродженого ядра інтегрального оператора. У даній роботі, продовжуючи дослідження [7], висвітлюється один з можливих підходів до відшукання умов біфуркації розв'язків слабкозбуреної лінійної крайової задачі для інтегральних рівнянь, ядра яких невироджені.

1. Постановка задачі. Розглянемо слабкозбурену лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння

$$x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t)+\varepsilon\int_a^b K_1(t,s)x(s)ds, \quad (1)$$

$$Sx(\cdot)=\alpha+\varepsilon Jx(\cdot). \quad (2)$$

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f,x\in L_2[a,b]$, $S=col(S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_p): L_2[a,b]\to R^p$ та $J=col(J_1,\ J_2,\ \dots,\ J_p): L_2[a,b]\to R^p$ – обмежені лінійні векторні функціонали, $S_i, J_i : L_2[a,b]\to R$, $\varepsilon << 1$ – малий параметр, $\alpha=col(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_p)\in R^p$.

Ставиться питання знаходження умов біфуркації розв'язків та їх структури слабкозбуреної крайової задачі (1), (2), при умові, що породжуюча задача

$$x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad (3)$$

$$Sx(\cdot)=\alpha \quad (4)$$

не має розв'язку.

2. Зв'язок крайової задачі (1), (2) із крайовою задачею для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь зі збуренням. Задачу (1), (2) можна звести до крайової задачі для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь [7]. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Введемо до розгляду величини

$$x_i=\int_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i=\int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt, \quad (5)$$

$$a_{ij}=\int_a^b\int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad (6)$$

$$\tilde{a}_{ij}=\int_a^b\int_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad (7)$$

Використовуючи позначення (5)-(7), приходимо до слабкозбуреної крайової задачі для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь

$$x_i-\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j = f_i+\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{a}_{ij}x_j, \quad i=\overline{1,\infty}, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}S_\nu\varphi_j(\cdot)x_j=\alpha_\nu+\sum_{j=1}^{\infty}J_\nu\varphi_j(\cdot)x_j, \quad \nu=\overline{1,p}, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2<+\infty.$$

Запишемо задачу (8), (9) у векторному вигляді [3, с. 84]

$$Uz=\begin{bmatrix}\Lambda\\ W\end{bmatrix}z=\begin{bmatrix}g\\ \alpha\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ W_1\end{bmatrix}z=q+\varepsilon U_1 z, \quad (10)$$

де

$$z=col(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_i,\ \dots)\in\ell_2,$$
$$g=col(f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_i,\ \dots)\in\ell_2,$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots\\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1-a_{ii} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{pmatrix},$$

$$W:=S\Phi(\cdot), \quad W_1:=J\Phi(\cdot),$$

$$\Phi(t)=(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \dots,\ \varphi_i(t),\ \dots).$$

Породжуюча задача для слабкозбуреної задачі (10) має вигляд

$$Uz=q. \quad (11)$$

Зазначимо, що оператор $\Lambda:\ell_2\to\ell_2$ має вигляд $\Lambda=I-A$, де $I:\ell_2\to\ell_2$ — одиничний, $A:\ell_2\to\ell_2$ — цілком неперервний оператори. Для оператора Λ є вірною альтернатива Фредгольма [8, с. 188], тобто він є фредгольмовим оператором, а оператор $U:\ell_2\to\ell_2\times R^p$ є нетеровим. Таким чином, для рівняння (11) справедливе наступне твердження [3, с. 87].

Теорема 1. Однорідне рівняння (11) $(q=0)$ має r-параметричну сім'ю розв'язків $z\in\ell_2$

$$z=P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c, \quad c\in R^{d_2}. \quad (12)$$

Неоднорідне рівняння (11) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються r лінійно незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*}g=0, \quad (13)$$

та d_1 лінійно-незалежних умов

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha-W\Lambda^+g)=0, \quad (14)$$

і має r-параметричну сім'ю розв'язків $z\in\ell_2$ вигляду

$$z=P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c+$$

$$+P_{\Lambda_r}Q^{+}(\alpha - W\Lambda^{+}g) + \Lambda^{+}g, \quad c \in R^{d_2}. \qquad (15)$$

Тут $Q = WP_{\Lambda_r}$ – $(p \times r)$ матриця, P_{Λ_r} – матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_{Λ}, $P_{\Lambda_r^*}$ – матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{Λ^*}, Λ^{+} – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до Λ матриця, $P_{Q_{d_2}}$ – матриця, яка складається із повної системи d_2 лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_Q, $P_{Q_{d_1}^*}$ – матриця, яка складається із повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{Q^*}, Q^{+} – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до Q матриця.

Оскільки, за припущенням, крайова задача (3), (4) нерозв'язна, то і нерозв'язне рівняння (11). Виникає питання: чи можна за допомогою лінійного збурення U_1 зробити рівняння (10) розв'язним? Знайдемо умови біфуркації розв'язків та їх структуру слабкозбуреної неоднорідної крайової задачі (1), (2), при умові, що породжуюча крайова задача (3), (4) не має розв'язку. Для цього, спочатку, дослідимо умови виникнення розв'язку рівняння (10).

Як відомо [9, с. 60], малі збурення зберігають нетеровість лінійного оператора, тобто оператор $(U - \varepsilon U_1)$ є нетеровим, що дозволяє використати при дослідженні рівняння (10) класичні методики.

3. Метод Вішика-Люстерника для побудови розв'язків слабкозбуреної крайової задачі для алгебраїчної системи. Застосуємо метод Вішика-Люстерника [10], який дозволяє знайти ефективні умови виникнення розв'язків рівняння (10) у вигляді частини ряду за степенями малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені ε. У нашому випадку розв'язок рівняння (10) будемо шукати у вигляді наступного ряду

$$z = z(\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{k} z_k. \qquad (16)$$

Підставимо ряд (16) у рівняння (10) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра ε.

При ε^{-1} для знаходження z_{-1} отримаємо однорідне рівняння

$$Uz_{-1} = 0. \qquad (17)$$

Згідно теореми 1, однорідне рівняння (17) завжди має розв'язок

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{-1}, \quad c_{-1} \in R^{d_2}, \qquad (18)$$

де вектор-стовпчик c_{-1} буде визначений з умови розв'язності рівняння відносно z_0.

При ε^{0} для знаходження z_0 отримаємо неоднорідне рівняння

$$Uz_0 = q + U_1 z_{-1}. \qquad (19)$$

Рівняння (19), за теоремою 1, є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 z_{-1}) = 0, \qquad (20)$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha + W_1 z_{-1} - W\Lambda^{+}(g + \Lambda_1 z_{-1})) = 0. \qquad (21)$$

Підставимо вираз для z_{-1} (18) у вказані умови розв'язності (20), (21). Отримаємо алгебраїчну систему відносно c_{-1}

$$B_0 c_{-1} = b_{-1}, \qquad (22)$$

де матриця B_0 розмірності $((r + d_1) \times d_2)$ та неоднорідність b_{-1} мають вигляд

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \\ P_{Q_{d_1}^*}(W_1 - W\Lambda^{+}\Lambda_1) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \end{bmatrix},$$

$$b_{-1} := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r^*} g \\ P_{Q_{d_1}^*}(W\Lambda^{+}g - \alpha) \end{bmatrix}.$$

Для того, щоб система (22) була розв'язною, необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова

$$P_{B_0^*} b_{-1} = 0. \qquad (23)$$

Якщо виконується умова

$$P_{B_0^*} = 0, \qquad (24)$$

то і умова (23) виконується, і система (22) буде розв'язною відносно c_{-1}

$$c_{-1} = P_{B_0}\hat{c}_{-1} + \tilde{c}_{-1}, \ \tilde{c}_{-1} = B_0^{+} b_{-1}, \ \hat{c}_{-1} \in R^{d_2}.$$

Зазначимо, що, якщо оператор B_0 є фредгольмовим, то система (22) матиме єдиний розв'язок. Справді, у цьому випадку $P_{B_0^*} = P_{B_0}$ і, згідно умови (24), $P_{B_0}\hat{c}_{-1} = 0$, тобто

$$c_{-1} = \tilde{c}_{-1} = B_0^{+} b_{-1}.$$

Отже, коефіцієнт z_{-1} в розкладі (16) набуває вигляду

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} B_0^{+} b_{-1}. \qquad (25)$$

Звідси, підставивши у (19) вираз (25), отримаємо наступне

$$Uz_0 = q + U_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} B_0^{+} b_{-1}. \qquad (26)$$

Рівняння (26), при виконанні умови (24), має розв'язок

$$z_0 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_0 + \tilde{z}_0, \quad c_0 \in R^{d_2},$$

де c_0 – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці з умови розв'язності системи для z_1, $\tilde{z}_0$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (26)

$$\tilde{z}_0 = U^{+}(q + U_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} B_0^{+} b_{-1}).$$

При ε^1 отримаємо неоднорідне рівняння

$$Uz_1 = U_1 z_0. \qquad (27)$$

Умови розв'язності рівняння (27) є наступними

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 z_0 = 0, \qquad (28)$$

$$P_{Q_{d_1}^*} (W_1 - W\Lambda^{+}\Lambda_1) z_0 = 0. \qquad (29)$$

Підставимо вираз для z_0 у рівності (28), (29) і отримаємо схожу до (22) алгебраїчну систему

$$B_0 c_0 = b_0, \qquad (30)$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$P_{B_0^*} b_0 = 0,$$

де

$$b_0 := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_0 \\ P_{Q_{d_1}^*} (W\Lambda^{+}\Lambda_1 - W_1) \tilde{z}_0 \end{bmatrix}.$$

Тоді, один із розв'язків системи (30) має вигляд

$$c_0 = B_0^{+} b_0.$$

Таким чином, якщо виконується умова (24), то рівняння (27) має розв'язок

$$z_1 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_1 + \tilde{z}_1, \ c_1 \in R^{d_2}, \qquad (31)$$

де c_1 – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці даного ітераційного процесу, а $\tilde{z}_1$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (27), що має вигляд

$$\tilde{z}_1 = U^{+} U_1 z_0.$$

При ε^2 отримаємо рівняння

$$Uz_2 = U_1 z_1. \qquad (32)$$

Умови розв'язності рівняння (32) виглядають наступним чином

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 z_1 = 0,$$

$$P_{Q_{d_1}^*} (W_1 - W\Lambda^{+}\Lambda_1) z_1 = 0,$$

або ж, враховуючи (31), отримаємо систему відносно елемента c_1

$$B_0 c_1 = b_1, \qquad (33)$$

де

$$b_1 := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_1 \\ P_{Q_{d_1}^*} (W\Lambda^{+}\Lambda_1 - W_1) \tilde{z}_1 \end{bmatrix},$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} b_1 = 0.$$

Тоді, один із розв'язків системи (33) має наступний вигляд

$$c_1 = B_0^{+} b_1.$$

Рівняння (32) має розв'язок

$$z_2 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_2 + \tilde{z}_2, \ c_2 \in R^{d_2},$$

де довільний елемент c_2 буде визначено на наступному кроці ітераційного процесу, а частинний розв'язок $\tilde{z}_2$ крайової задачі (32) має вигляд

$$\tilde{z}_2 = U^{+} U_1 z_1.$$

Легко показати за допомогою індукції, що умова (24) є умовою розв'язності і рівняння, яке ми отримаємо на k-му кроці ітераційного процесу

$$Uz_k = U_1 z_{k-1}. \qquad (34)$$

Згідно теореми 1, рівняння (34) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 z_{k-1} = 0,$$

$$P_{Q_{d_1}^*} (W_1 - W\Lambda^{+}\Lambda_1) z_{k-1} = 0$$

та має розв'язок

$$z_k = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k, \ c_k \in R^{d_2}, \ \forall k \geq 1, \qquad (35)$$

де c_k – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці, а частинний розв'язок $\tilde{z}_k$ неоднорідного рівняння (34) має вигляд

$$\tilde{z}_k = U^{+} U_1 z_{k-1}.$$

Отримаємо алгебраїчну систему

$$B_0 c_k = b_k, \qquad (36)$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} b_k = 0,$$

де

$$b_k := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_k \\ P_{Q_{d_1}^*} (W\Lambda^+ \Lambda_1 - W_1)\tilde{z}_k \end{bmatrix}.$$

Один із розв'язків системи (36) має вигляд

$$c_k = B_0^+ b_k. \qquad (37)$$

Таким чином, рівняння (34) є розв'язним, якщо виконується умова (24), і має розв'язок (35).

Підставивши вирази для z_k, $\forall k \ge -1$ в ряд (16), отримаємо

$$z = \frac{P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k), \qquad (38)$$

де c_k визначаються формулою (37).

Отже, ми довели справедливість наступного твердження.

Теорема 2. Нехай породжуюче для (10) рівняння (11) не є розв'язним. Тоді, якщо виконується умова (24), то рівняння (10) буде мати розв'язок у вигляді збіжного, при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, ряду (38).

З а у в а ж е н н я 1. Умова (24) є достатньою умовою існування розв'язку рівняння (10). Якщо умова (24) не виконується, то розв'язок рівняння (10) у вигляді ряду (16) не існує, але може існувати у вигляді частини ряду типу (16) за степенями малого параметра ε починаючи із -2, -3, ...

Використовуючи отримані результати для збуреного рівняння (10), ми можемо зробити висновки про існування розв'язку вихідної збуреної крайової задачі (1), (2). Для цього використаємо перехід, описаний у роботі [7].

Якщо система (10) має хоча б один розв'язок $z = col(x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_i, \; \ldots)$, то згідно теореми Ріса-Фішера, існує елемент $x \in L_2[a,b]$ такий, що має місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \qquad (39)$$

де

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad \varphi_i(t), \quad \ldots),$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$.

Аналогічно роботі [11, с. 266], можна зробити висновок про те, що множина елементів $x(t)$, які визначаються співвідношенням (39), і є шуканою сім'єю розв'язків вихідної крайової задачі (1), (2).

Отже, тепер ми можемо застосувати результати теореми 2 для рівняння (10) до крайової задачі (1), (2).

Теорема 3. Припустимо, що породжуюча крайова задача (3), (4) не є розв'язною. Тоді, якщо виконується умова (24), то крайова задача (1), (2) буде мати розв'язок $x \in L_2[a,b]$ у вигляді ряду

$$x(t) = \Phi(t) \left(\frac{P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k) \right),$$

який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

З а у в а ж е н н я 2. Відмітимо, що, як показано у [12], для зведення задачі (1), (2) до крайової задачі для зліченновимірної системи алгебраїчних рівняннь (8), (9) замість довільної повної в $L_2[a,b]$ ортонормальної системи функцій $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ можна використовувати пару повних в $L_2[a,b]$ ортонормальних систем $\{\nu_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ та $\{\mu_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ власних функцій симетричних операторів $\underline{K}$ та $\overline{K}$ [12, с. 123] відповідно

$$(\underline{K}w)(t) = \int_a^b \underline{K}(t,s) w(s) ds,$$

$$(\overline{K}w)(t) = \int_a^b \overline{K}(t,s) w(s) ds,$$

де

$$\underline{K}(t,s) = \int_a^b K(\xi,t) K(\xi,s) d\xi,$$

$$\overline{K}(t,s) = \int_a^b K(t,\xi) K(s,\xi) d\xi.$$

Список використаних джерел

1. *Самойленко А.М.* Диференціальні рівняння з імпульсною дією. / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк – Київ: Вища школа, 1987. - 287 с.
2. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы. / А.Ю. Лучка - Київ: Наукова думка, 1993. - 288 с.
3. *Boichuk A.A.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko - Utrecht, Boston: VSP, 2004. - 317 p.
4. *Самойленко А.М.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром / А.М. Самойленко, О.А. Бойчук, С.А. Кривошея // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. **48**, № 11. – С. 1576–1579.
5. *Журавлев В.Ф.* Краевые задачи для интегральных уравнений с вырожденным ядром / В.Ф. Журавлев // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. **15**, № 1. – С. 36-54.
6. *Бойчук О.А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь / О.А. Бойчук, І.А. Бондар // Нелінійні коливання. - 2013. - Т. 16, № 3. – С. 314-321.
7. *Козлова Н.О.* Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. - 2016. - Т. **19**, № 1. - С. 58-66.
8. *Люстерник Л.А.* Краткий курс функционального анализа. / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев – Москва: Высш. школа, 1982. - 271 с.
9. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. / С.Г. Крейн - Москва: Наука, 1971. -104 с.
10. *Вишик М.И.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН. – 1960.– Т. **15**, вып. 3. – С. 3–80.
11. *Гильберт Д.* Избранные труды. / Д. Гильберт – Москва: Факториал, 1998.- Т. **2**. – 608 с.
12. *Stewert G.W.* (2011) Fredholm, Hilbert, Schmidt. Three Fundamental Papers on Integral Equations. [Online]. Режим доступу: http://www.cs.umd.edu/~stewart/FHS.pdf.

References

1. SAMOILENKO, A. and PERESTYUK, M. (1987) *Differential Equations with Impulse Effects*. Kiev: Visca Skola.
2. LUCHKA, A. (1993) *Proektsionno - iterativnye metody*. Kyiv: Naukova Dumka.
3. BOICHUK, A. and SAMOILENKO, A. (2004) *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. Utrecht, Boston: VSP.
4. SAMOILENKO, A. & BOICHUK, O. & KRYVOSHEIA, S. (1996) Krayovi zadachi dlya system liniinykh integro-diferentsialnikh rivnyan z virodzhenim yadrom. *UMZh*. 48 (11). p. 1576–1579.
5. ZHURAVLEV, V. (2012) Kraevyie zadachi dlya integralnikh uravneniy s vyirodzhdennyim yadrom. *Nonlinear Oscillations*. 15(1). p. 36-54.
6. BOICHUK, *O. &* BONDAR, I. (2013) Slabkoneliniini systemi integro-diferentsialnikh rivnyan. *Nonlinear Oscillations*. 16(3). p. 314-321.
7. KOZLOVA, N. & FERUK, V. (2016) Neterovi kraiovi zadachi dlya integralnikh rivnyan. *Nonlinear Oscillations*. 19(1). p. 58-66.
8. LYUSTERNIK, L. and SOBOLEV, V. (1982) *Kratkiy kurs funktsionalnogo analiza*. Moskva: Vyshha shkola.
9. KREIN, S. (1971) *Lineynyie uravneniya v banakhovom prostranstve*. Moskva: Nauka.
10. VISHIK, M. & LYUSTERNIK, L. (1960) Reshenie nekotoryikh zadach o vozmuscheniyakh v sluchae matrits i samosopryazhennyikh i nesamosopryazhennyikh differentsialnyikh uravneniy. *UMN*. 15(3). p. 3-80.
11. HILBERT, D. (1998) *Izbranyie trudyi*. Moskva: Faktorial, T. 2.
12. STEWERT G.W. (2011) *Fredholm, Hilbert, Schmidt. Three Fundamental Papers on Integral Equations*. [Online]. Available from: http://www.cs.umd.edu/~stewart/FHS.pdf.

Надійшла до редколегії 24.03.16