УДК 519.214.6

Маринич О. В.[1], к. ф.-м. н., докторант

Про асимптотику числа активних випадкових процесів в системі з імміграцією

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д
e-mail: marynych@unicyb.kiev.ua

Marynych O. V.[1], PhD, doctoral condidate

On the number of active random processes in a system with immigration

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
e-mail: marynych@unicyb.kiev.ua

Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних копій випадкового вектора (ξ, η) з майже напевно додатними координатами. В роботі вивчається асимптотика процесу $M(u) := \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{j-1}\leq u< S_{j-1}+\eta_j\}}$, де $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є стандартним випадковим блуканням з кроками $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, що стартує в нулі. За різноманітних моментних припущень на ξ та η, отримано клас граничних теорем для скінченновимірних розподілів $(M(ut))_{u\geq 0}$ при $t\to\infty$. Отримані результати доповнюють відомі раніше твердження, див. Mikosch and Resnick (2006), про асимптотичну поведінку $M(u)$ у випадку незалежних ξ та η.

Ключові слова: дробово інтегрований обернений стійкий субординатор, дробово інтегрований стійкий процес Леві, випадкове блукання, випадковий процес з імміграцією, теорія відновлення.

Let $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence of independent copies of a random vector (ξ, η) with almost surely positive coordinates. We study the asymptotic behavior of a random process $M(u) := \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{j-1}\leq u< S_{j-1}+\eta_j\}}$, where $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is the zero-delayed random walk with steps $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Under various moment assumptions on ξ and η, we obtain limit theorems for finite-dimensional distributions of $(M(ut))_{t\geq 0}$, as $t\to\infty$. Our results complement previously known theorems, see Mikosch and Resnick (2006), on the asymptotics of $M(u)$ for independent ξ and η. The random process $M(u)$ could be interpreted as follows. Let $D := D[0,\infty)$ be the Skorokhod spaces of right-continuous real-valued functions which are defined on $[0,\infty)$ and have finite left limits at each point of the domain. Let $X := (X(t))_{t\geq 0}$ be a random process with paths in D which might be arbitrarily dependent of a positive random variable ξ and let $(X_1,\xi_1),(X_2,\xi_2),\ldots$ be a sequence of independent copies of the pair (X,ξ). The process $Y(t) := \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(t-S_k)$ is called random process with immigration at the epochs of a renewal process. Assume that the random variable $\tau_X := \inf\{t\geq 0 : X(s)=0$ for all $s\geq t\}$ is almost surely finite. We say that the process X is active at $t\geq 0$ if and only if $t<\tau_X$. The value $M(u)$ of random process M with $\eta=\tau_X$ is then the number of active processes at time $u\geq 0$. Thus, our limit theorems for $M(u)$ can be interpreted as asymptotic results for the number of active processes in a system with immigration.

Keywords: fractionally integrated inverse stable subordinator, fractionally integrated stable Levy process, random walk, random processes with immigration, renewal theory
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д. Я.

Вступ

Нехай $D := D[0,\infty)$ є простором Скорохода, що складається з функцій, визначених та неперервних справа на $[0,\infty)$ та які мають скінченні границі зліва на $(0,\infty)$. Розглянемо випадковий процес $X := (X(t))_{t\geq 0}$ з траєкторіями в D і додатну випадкову величину ξ, яка може як завгодно залежати від X. Нехай $(X_1,\xi_1),(X_2,\xi_2),\ldots$ є послідовністю незалежних копій пари (X,ξ), а $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (тут і надалі $\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\ldots\}$) є стандартним випадковим блуканням з кроками $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, тобто

$$S_0 := 0,\quad S_k := \xi_1+\ldots+\xi_k,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Ми позначатимемо $(\nu(t))_{t\in\mathbb{R}}$ момент першого потрапляння в (t,∞) випадковим блуканням (S_k):

$$\nu(t) := \inf\{k\in\mathbb{N}_0 : S_k > t\} = \#\{k\in\mathbb{N}_0 : S_k\leq t\},\ t\in\mathbb{R}.$$

Випадковий процес $Y := (Y(t))_{t\in\mathbb{R}}$, що визначається рівністю

$$Y(t) := \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(t - S_k) = \sum_{k=0}^{\nu(t)-1} X_{k+1}(t - S_k),\ t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

було введено в роботах [5, 6], де він отримав назву *випадкового процесу з іммiграцiєю в моменти вiдновлення*. Ця назва стає зрозумiлою з такої iнтерпретацiї: в момент часу $S_0 = 0$ перший iммiгрант прибуває в систему i породжує процес X_1, далi, для кожного $k \in \mathbb{N}$, в момент S_k iммiгрант $k+1$ прибуває в систему i породжує процес X_{k+1}. Тодi $Y(t)$ є сумою процесiв, породжених iммiгрантами, що прибули в систему до часу t включно i описує кумулятивний ефект процесiв, породжених всiма прибулими iммiгрантами. Процес X називається *процесом вiдповiдi*.

У данiй роботi дослiджується клас випадкових процесiв з iммiграцiєю $M := (M(t))_{t\in\mathbb{R}}$, побудованих на процесах вiдповiдi $X(t) = \mathbb{1}_{\{\eta>t\}}$, де η є деякою додатною випадковою величиною, а $\mathbb{1}_A$ позначає iндикатор подiї A. Таким, чином ми вивчатимемо випадковi процеси вигляду

$$M(t) := \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{j-1}\leq t<S_{j-1}+\eta_j\}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

де $(\xi_j, \eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ є копiями випадкового вектора (ξ, η) з як завгодно залежними координатами (ξ, η).

З точки зору загальної теорiї випадкових процесiв з iммiграцiєю процес M можна iнтерпретувати як кiлькiсть процесiв в системi, що *активнi* в момент часу t. Термiн "активний" розумiється в наступному сенсi: якщо процес вiдповiдi X має скiнченну тривалiсть, тобто величина

$$\tau_X := \inf\{t \geq 0 : X(s) = 0 \text{ для всiх } s \geq t\} \quad (4)$$

є майже напевно скiнченною, то процес X активний в момент часу t тодi й тiльки тодi коли $t < \tau_X$. Очевидно, що кiлькiсть активних процесiв в момент t дорiвнює $M(t)$, де M побудовано на парi (ξ, τ_X).

Процес M, як з залежними так i з незалежними ξ та η, виникає у багатьох задачах прикладної ймовiрностi. Зокрема:

- процес M описує число зайнятих серверiв в системi масового обслуговування $(GI/G/\infty)$ [6, 8];
- для незалежних ξ, η випадкова величина $M(t)$ представляє кiлькiсть активних передач даних в момент часу t в комп'ютернiй мережi [10];
- процес $M(t)$ є рiзницею мiж кiлькiстю вiзитiв в iнтервал $[0, t]$ стандартного випадкового блукання $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ та збуреного випадкового блукання $(S_n + \eta_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ [1];
- процес $M(t)$, що породжується парою величин $(|\ln W|, |\ln(1-W)|)$, де W – деяка випадкова величина зi значеннями в $(0,1)$, виникає в аналiзi числа порожнiх комiрок в гратцi Бернуллi [7].

В роботi [10] вивчалась слабка збiжнiсть скiнченновимiрних розподiлiв пiдхожим чином нормованого та центрованого процесу

$$\widetilde{M}(t) := \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_j\leq t<S_j+\eta_j\}}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5)$$

за припущення, що послiдовностi $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ та $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ є незалежними. Зрозумiло, що за цього припущення $(\widetilde{M}(t))_{t\in\mathbb{R}} \overset{f.d.}{=} (M(t))_{t\in\mathbb{R}}$, де $\overset{f.d.}{=}$ позначає рiвнiсть скiнченновимiрних розподiлiв, а тому результати [10] вiрнi й для процесу M. У данiй роботi нас цiкавить питання про збiжнiсть скiнченновимiрних розподiлiв процесу $(M(t))_{t\in\mathbb{R}}$ без припущення про незалежнiсть ξ та η. Часткову вiдповiдь на це питання можна отримати з загальної асимптотичної теорiї випадкових процесiв з iммiграцiєю, побудованої в роботах [5, 6, 9]. Вiдповiднi твердження будуть сформульованi у наступному роздiлi. Проте, iснує декiлька випадкiв, у яких граничнi теореми для процесу $(M(t))_{t\in\mathbb{R}}$ не вдається отримати з вiдомих ранiше результатiв. Одним з таких випадкiв є наступний: припустимо, що обидвi випадковi величини ξ та η мають нескiнченне середнє, а їх хвости правильно змiнюються i асимптотично порiвнюванi, тобто

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim c\mathbb{P}\{\eta > t\} \sim t^{-\alpha}\ell(t), \quad t \to \infty, \quad (6)$$

для деяких $c > 0$, $\alpha \in (0,1)$ та функцiї ℓ, що повiльно змiнюється на нескiнченностi. Виявляється, що за додаткового припущення про *сумiсну* правильну змiну розподiлу пари (ξ, η), можна отримати граничну теорему для процесу $(M(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Цей результат, який є основним у данiй роботi, сформульовано i доведено в останньому роздiлi роботи.

У роботі використовуються такі позначення: $\overset{d}{\to}$ – збіжність за розподілом послідовності випадкових величин; $\overset{f.d.d.}{\to}$ – збіжність скінченновимірних розподілів послідовності випадкових процесів; $\overset{P}{\to}$ – збіжність за ймовірністю.

Граничні теореми для процесу $M(t)$

I) Випадок $\mathbb{E}\xi < \infty$ та $\mathbb{E}\eta < \infty$: збіжність до стаціонарної версії. На тому ж ймовірнісному просторі, де задана послідовність $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, визначимо такі об'єкти:

- незалежну копію $(\xi_{-k}, \eta_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ послідовності $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$;
- випадковий вектор (ξ_0, η_0), що не залежить від $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ та має розподіл
$$\mathbb{P}\{\xi_0 \le x, \eta_0 \le y\} = \frac{1}{\mathbb{E}\xi}\int_{[0,x]} z\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}z, \eta \le y\}$$
при $x, y \ge 0$;
- випадкову величину U, що не залежить від $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ та має рівномірний розподіл на $[0,1]$.

Покладемо
$$S_{-k} := -(\xi_{-1} + \ldots + \xi_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$
та
$$S_0^* := U\xi_0, \quad S_{-1}^* := -(1-U)\xi_0,$$
$$S_k^* := S_0^* + S_k, \quad S_{-k-1}^* := S_{-1}^* + S_{-k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З теореми 1.1 роботи [9] випливає такий результат

Твердження 1. Припустимо, що $\mathbb{E}\xi < \infty$, $\mathbb{E}\eta < \infty$ та розподіл ξ неарифметичний. Тоді
$$M(u+t) \overset{f.d.d.}{\longrightarrow} M^*(u), \quad t \to \infty,$$
де
$$M^*(u) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{0 \le u + S_k^* < \eta_k\}}, \quad u \in \mathbb{R},$$
а $-\infty < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < \infty$ є точками неперервності M^*.

З а у в а ж е н н я 1. Якщо $\mathbb{E}\xi = \infty$ та $\mathbb{E}\eta < \infty$, то $M(t) \overset{d}{\to} 0$ при $t \to \infty$ (див. твердження 4 нижче).

II) Випадок $\mathbb{E}\eta = \infty$, $\mathbb{E}\xi < \infty$: граничні теореми з центруванням та нормуванням. У цьому випадку граничні теореми для M можна отримати за припущень, що випадкова величина ξ лежить в області притягання α-стійкого розподілу з $\alpha \in (1,2]$, а функція $\mathbb{P}\{\eta > t\}$ правильно змінюється на нескінченності з показником $-\rho$, $\rho \in [0,1)$:
$$\mathbb{P}\{\eta > t\} \sim t^{-\rho}\ell^*(t), \quad t \to \infty, \tag{7}$$
для деякої функції ℓ^*, що повільно змінюється на нескінченності. Нагадаємо (див. теорема 1, §5, Розділ XVII в [3]), що ξ лежить в області притягання α-стійкого розподілу з $\alpha \in (1,2]$ тоді й лише тоді, коли
$$\mu_2(t) := \mathbb{E}[\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi \le t\}}] \sim t^{2-\alpha}\ell(t), \quad t \to \infty, \tag{8}$$
для деякої функції ℓ, що повільно змінюється на нескінченності. Нехай
$$c(t) = \begin{cases} \sigma\sqrt{t}, & \text{якщо } \sigma^2 := \mathbb{D}\xi < \infty, \\ t^{1/\alpha}(\ell^{\#}(t))^{1/\alpha}, & \text{якщо } \sigma^2 = \infty, \end{cases} \tag{9}$$
де у випадку $\sigma^2 = \infty$ також припускається, що виконується умова (8) з $\alpha \in (1,2]$, а $\ell^{\#}$ – функція спряжена за де Брейном до $L(t) := 1/\ell(t^{1/\alpha})$ (див. Теорема 1.5.13 в [2]). З теореми 2.4 роботи [5] випливає

Твердження 2. Припустимо, що випадкова величина ξ лежить в області притягання α-стійкого розподілу з $\alpha \in (1,2]$, а функція c визначена формулою (9) та виконується умова (7) з $\rho \in [0,1)$.
$(A1)$ Якщо $\mathbb{P}\{\eta > t\} = o(t/c^2(t))$ при $t \to \infty$, то
$$\frac{M(ut) - \frac{1}{\mathbb{E}\xi}\int_0^{ut}\mathbb{P}\{\eta > y\}\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathbb{E}\xi)^{-1}\int_0^t \mathbb{P}\{\eta > y\}\mathrm{d}y}} \overset{f.d.d.}{\longrightarrow} V_{-\rho}(u), \quad t \to \infty,$$
де $(V_{-\rho}(u))_{u\ge 0}$ – центрований гауссівський процес з коваріацією
$$\mathbb{E}(V_{-\rho}(s)V_{-\rho}(t)) = t^{1-\rho} - (t-s)^{1-\rho}, \quad 0 \le s \le t.$$
$(A2)$ Якщо $t/c^2(t) = o(\mathbb{P}\{\eta > t\})$ при $t \to \infty$, то
$$\frac{M(ut) - \frac{1}{\mathbb{E}\xi}\int_0^{ut}\mathbb{P}\{\eta > y\}\mathrm{d}y}{(\mathbb{E}\xi)^{-(\alpha+1)/\alpha}c(t)\mathbb{P}\{\eta > t\}} \overset{f.d.d.}{\longrightarrow} \int_0^u (u-y)^{-\rho}\mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y), \quad t \to \infty,$$

де $(\mathcal{S}_\alpha(y))_{y\ge0}$ – стандартний броунівський рух якщо $\alpha = 2$ та спектрально негативний α-стійкий процес Леві з характеристичною функцією

$$\mathbb{E}\exp^{iz\mathcal{S}_\alpha(1)} = \exp\{-|z|^\alpha\Gamma(1-\alpha) \times (\cos(\pi\alpha/2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sign}(z)\sin(\pi\alpha/2))\},\ z\in\mathbb{R}, \quad (10)$$

якщо $\alpha < 2$.

Зауваження 2. Випадок $t/c^2(t) \sim c_1\mathbb{P}\{\eta > t\}$ при $t\to\infty$ та $c_1 \in (0,\infty)$ залишається відкритим.

III) Випадок $\mathbb{E}\eta = \infty$, $\mathbb{E}\xi = \infty$: граничні теореми з нормуванням. Припустимо, що хвости $\mathbb{P}\{\xi > t\}$ та $\mathbb{P}\{\eta > t\}$ правильно змінюються на нескінченності:

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell(t), \quad \mathbb{P}\{\eta > t\} \sim t^{-\rho}\ell^*(t), \quad t\to\infty \quad (11)$$

та $\alpha, \rho \in [0,1)$.

Підвипадок $\mathbb{P}\{\xi > t\} = o(\mathbb{P}\{\eta > t\}), \quad t\to\infty$. З теореми 2.5 роботи [5] отримуємо такий результат

Твердження 3. Припустимо, що виконуються умови (11) та знайдеться така невід'ємна монотонна функція u, що

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\mathbb{P}\{\eta > t\}} \sim \frac{1}{u(t)} \to 0, \quad t\to\infty.$$

Тоді

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\mathbb{P}\{\eta > t\}} M(ut) \xrightarrow{f.d.d.} \int_{[0,u]} (u-y)^{-\rho}\mathrm{d}W^{\leftarrow}(y), \quad t\to\infty,$$

де $W^{\leftarrow}(y) := \inf\{s\ge0 : W(s) \ge y\}$, а $(W_\alpha(u))_{u\ge0}$ – α-стійкий субординатор з експонентою Лапласа $-\ln\mathbb{E}\exp\{-zW_\alpha(u)\} = \Gamma(1-\alpha)uz^\alpha$, $u, z \ge 0$.

Підвипадок $\mathbb{P}\{\eta > t\} = o(\mathbb{P}\{\xi > t\}), \quad t\to\infty$. З леми 5.1 роботи [4] випливає, що без жодних припущень про правильну зміну має місце такий результат

Твердження 4. Якщо $\mathbb{E}\eta = \infty$ та $\mathbb{P}\{\eta > t\} = o(\mathbb{P}\{\xi > t\})$ при $t\to\infty$, то

$$M(t) \xrightarrow{d} 0, \quad t\to\infty.$$

Граничні теореми для процесу M у випадку $\mathbb{E}\xi = \infty$ та $\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim c\mathbb{P}\{\eta > t\}$

Нехай $N_{\alpha,c} := \sum_{k\ge0}\delta_{(t_k,j_k)}$ – процес Пуассона в $[0,\infty)\times(0,\infty]$ з мірою інтенсивності $\mathbb{LEB}\times\nu_{\alpha,c}$, де $\mathbb{LEB}$ – міра Лебега на $[0,\infty)$ та

$$\nu_{\alpha,c}((x,\infty]) = c^{-1}x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Теорема 1. Припустимо, що випадковий вектор (ξ,η) задовольняє умову (6). Нехай c – довільна неперервна додатна функція така, що

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\xi > c(t)\} = \lim_{t\to\infty}\frac{t\ell(c(t))}{c^\alpha(t)} = 1.$$

Якщо для довільних $x, y > 0$

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\xi > xc(t), \eta > yc(t)\} = 0, \quad (12)$$

то

$$M(ut) \xrightarrow{f.d.d.} \sum_{k\ge0}\mathbb{1}_{\{W_\alpha(t_k)\le u < W_\alpha(t_k)+j_k\}},$$

де $(W_\alpha(t))_{t\ge0}$ – α-стійкий субординатор, що не залежить від точкового процесу $N_{\alpha,c}$ та має експоненту Лапласа $\mathbb{E}\exp(-\lambda W_\alpha(t)) = \exp(-\Gamma(1-\alpha)t\lambda^\alpha)$.

Зауваження 3. Умови (6) та (12) означають, що має місце збіжність у просторі точкових мір $M_p([0,\infty]^2\setminus\{(0,0)\})$ з грубою топологією:

$$t\mathbb{P}\{c^{-1}(t)(\xi,\eta) \in \cdot\} \xrightarrow{v} \mu_{\alpha,c}(\cdot), \quad (13)$$

де

$$\mu_{\alpha,c}\{(u,v) : u > x \text{ або } v > y\} = x^{-\alpha} + c^{-1}y^{-\alpha}, \quad x, y > 0.$$

Умова (12) гарантує, що міра $\mu_{\alpha,c}$ зосереджена на координатних осях. Зауважимо, що формула (13) також означає, що хвіст $1 - \mathbb{P}\{\xi\le x, \eta\le y\}$ правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ (див., наприклад, розділ 5.4.2 в [11]).

Доведення. В доведенні використовується міркування аналогічні до тих, що були використані в доведенні теореми 1.1 роботи [7]. Достатньо перевірити слабку збіжність

$$\left(\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)}, \sum_{k\ge1}\delta_{(k/t,\,\eta_k/c(t))}\right) \Rightarrow (W_\alpha(u), N^{(\alpha,c)}), \quad t\to\infty, \quad (14)$$

в просторі $D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. В свою чергу, в силу леми 8.4 роботи [7], (14) еквівалентно

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i\frac{S_{[u_it]}}{c(t)} + \gamma\sum_{k\ge1} g\left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)}\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^n\gamma_i W_\alpha(u_i) + \gamma\sum_m g(t_m, j_m), \quad t\to\infty, \quad (15)$$

для довільної неперервної функції g з компактним в $[0,\infty)\times(0,\infty]$ носієм, та довільних $0 \le u_1 < u_2 < \ldots < u_n, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

Для довільного фіксованого $z>0$ маємо

$$\begin{aligned}
&\phi_t(z)\\
&:= \mathbb{E}\exp\left(-z\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{S_{[u_i t]}}{c(t)}+\gamma\sum_{k\ge1}g\left(\frac{k}{t},\frac{\eta_k}{c(t)}\right)\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\exp\left(-z\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{c(t)}\sum_{k=1}^{[u_i t]}\xi_k+\gamma\sum_{k\ge1}g\left(\frac{k}{t},\frac{\eta_k}{c(t)}\right)\right)\right)\\
&= \prod_{k\ge1}\mathbb{E}\exp\left(-z\left(\frac{\xi}{c(t)}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i 1_{\{k\le u_i t\}}+\gamma g\left(\frac{k}{t},\frac{\eta}{c(t)}\right)\right)\right)\\
&= \prod_{k\ge1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}(1-K(z,u,v,k/t))\\
&\qquad\times\mathbb{P}\left\{\frac{\xi}{c(t)}\in \mathrm{d}u,\frac{\eta}{c(t)}\in\mathrm{d}v\right\},
\end{aligned}$$

де

$$K(z,u,v,w)=1-\exp\Big(-z\Big(u\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\mathbb{1}_{\{w\le u_i\}}+\gamma g(w,v)\Big)\Big).$$

Нехай C – (компактний) носій g. Для довільного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\frac{\xi}{a(t)}\in\mathrm{d}u,\frac{\eta}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}\\
&\qquad\le\mathbb{E}\Big(1-\exp\Big(-\frac{z\xi}{c(t)}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\mathbb{1}_{\{k\le u_i t\}}\Big)\Big)\\
&\qquad+\mathbb{P}\Big\{\Big(\frac{\xi}{c(t)},\frac{\eta}{c(t)}\Big)\in C\Big\}.
\end{aligned}$$

Отже, з огляду на (13)

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,k/t)\\
&\qquad\times\mathbb{P}\Big\{\frac{\xi}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\frac{\eta}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}=0. \quad (16)
\end{aligned}$$

Для досить малого $x_0>0$ знайдеться число $M=M(x_0)>0$ таке, що

$$0\le-\ln(1-x)-x\le Mx^2,\quad 0<x\le x_0.$$

Звідси отримуємо для досить великих t

$$\begin{aligned}
&0\le-\ln\phi_t(z)-\sum_{k\ge1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,k/t)\\
&\qquad\times\mathbb{P}\Big\{\frac{\xi}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\frac{\eta}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}\\
&\le M\sum_{k\ge1}\Big(\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,k/t)\\
&\qquad\mathbb{P}\Big\{\frac{\xi}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\frac{\eta}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Використовуючи (16), робимо висновок, що

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\Big(-\ln\phi_t(z)-\sum_{k\ge1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,k/t)\\
&\qquad\times\mathbb{P}\Big\{\frac{\xi}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\frac{\eta}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}\Big)=0 \quad (17)
\end{aligned}$$

для кожного $z>0$. Зі співвідношення (13) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\mu^{(t)}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}x)\\
&\quad:=\sum_{k\ge1}\delta_{k/t}(\mathrm{d}x)\mathbb{P}\left\{\frac{\xi}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\frac{\eta}{c(t)}\in\mathrm{d}v\right\}\\
&\quad\overset{v}{\to}\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u\times\mathrm{d}v)\mathrm{d}x,\quad t\to\infty,
\end{aligned}$$

в просторі $M_p(([0,\infty]^2\setminus\{(0,0)\})\times[0,\infty))$. Оскільки функція g має компактний носій в $[0,\infty)\times(0,\infty]$, то знайдуться такі $a,A>0$, що $g(w,v)=0$ при $w>A$ або $v<a$. Звідси робимо висновок, що носій функції $(u,v,w)\mapsto K(z,u,v,w)$, для кожного фіксованого $z>0$, міститься в множині $[0,\infty]\times[a,\infty]\times[0,\max\{A,u_n\}]$, яка є компактною в $([0,\infty]^2\setminus\{(0,0)\})\times[0,\infty)$. Отже, з представлення

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,k/t)\\
&\qquad\times\mathbb{P}\Big\{\frac{\xi}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\frac{\eta}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}\\
&=\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,x)\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)
\end{aligned}$$

випливає

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,x)\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\\
&\to\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,x)\mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v), \quad (18)
\end{aligned}$$

при $t\to\infty$. Використовуючи рівність $g(x,0)=0$ та згаданий вище факт, що міра $\mu_{\alpha,c}$ зосереджена на координатних осях, робимо висновок, що

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,x)\mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\\
&=\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty\Big(1-\exp\Big(-zu\sum_{i=1}^{n}\gamma_i 1_{\{x\le u_i\}}\Big)\Big)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha+1}}\\
&+\alpha c^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big(1-\exp(-z\gamma g(x,v))\Big)\mathrm{d}xv^{-\alpha-1}\mathrm{d}v\\
&=-\ln\mathbb{E}\exp\Big(-z\sum_{i=1}^{n}\gamma_i X_\alpha(u_i)\Big)\\
&\qquad-\ln\mathbb{E}\exp\Big(-z\gamma\sum_{m}g(t_m,j_m)\Big)
\end{aligned}$$

для кожного $z>0$. З цієї формули, враховуючи (17), отримуємо (15). Теорема 1 доведена. ■

Список використаних джерел

[1] Alsmeyer G. *Power and exponential moments of the number of visits and related quantities for perturbed random walks* / G. Alsmeyer, A. Iksanov, M. Meiners // J. Theoret. Probab. – 2015. – 28, c. 1–40.

[2] Bingham N. H. *Regular variation* / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels // Cambridge University Press. – 1989. – 494 c.

[3] Feller W. *An introduction to probability theory and its applications. Vol 2.* / W. Feller // John Wiley & Sons, Inc. – 1971. – 669 c.

[4] Iksanov A. *Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions* / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Stoc. Proc. Appl. – 2014. – 124, c. 2132–2170.

[5] Iksanov A. *Asymptotics of random processes with immigration I: scaling limits* / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli – 2017. – In press.

[6] Iksanov A. *Asymptotics of random processes with immigration II: convergence to stationarity* / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli – 2017. – In press.

[7] Iksanov A. *Weak Convergence of Finite-Dimensional Distributions of the Number of Empty Boxes in the Bernoulli Sieve* / A. Iksanov, A. Marynych, V. Vatutin // Theory Probab. Appl. – 2015. – 59, c. 87–113.

[8] Kaplan N. *Limit theorems for a* $GI/G/\infty$ *queue* / N. Kaplan // Ann. Probab. – 1975. – 3, c. 780–789.

[9] Marynych A. *A note on convergence to stationarity of random processes with immigration* / A. Marynych // Theory Stoc. Proc. – 2015. – 20, c. 84–100.

[10] Mikosch T. *Activity rates with very heavy tails* / T. Mikosch, S. Resnick // Stoc. Proc. Appl. – 2006. – 116, c. 131–155.

[11] Resnick S. *Extreme values, regular variation, and point processes* / S. Resnick // Springer Verlag – 1987. – 320 c.

References

[1] Alsmeyer G., Iksanov A. and Meiners M. (2015). *Power and exponential moments of the number of visits and related quantities for perturbed random walks.* J. Theoret. Probab., 28, pp. 1–40.

[2] Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L. (1989). *Regular variation.* Cambridge University Press, 494 p.

[3] Feller W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2.* John Wiley & Sons, Inc. 669 p.

[4] Iksanov A., Marynych A., Meiners M. (2014). *Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions.* Stoc. Proc. Appl., 124, pp. 2132–2170.

[5] Iksanov A., Marynych A., Meiners M. (2017). *Asymptotics of random processes with immigration I: scaling limits.* Bernoulli. In press.

[6] Iksanov A., Marynych A., Meiners M. (2017). *Asymptotics of random processes with immigration II: convergence to stationarity.* Bernoulli. In press.

[7] Iksanov A., Marynych A., Vatutin V. (2015). *Weak Convergence of Finite-Dimensional Distributions of the Number of Empty Boxes in the Bernoulli Sieve.* Theory Probab. Appl. 59, pp. 87–113.

[8] Kaplan N. Kaplan N. (1975). *Limit theorems for a* $GI/G/\infty$ *queue.* Ann. Probab. 3, pp. 780–789.

[9] Marynych A. (2015). *A note on convergence to stationarity of random processes with immigration.* Theory Stoc. Proc. 20, pp. 84–100.

[10] Mikosch T., Resnick S. (2006). *Activity rates with very heavy tails* Stoc. Proc. Appl. 116, pp. 131–155.

[11] Resnick S. (1987). *Extreme values, regular variation, and point processes.* Springer Verlag, 320 p.

Надійшла до редколегії 21.06.16