УДК 519.21

О. В. Перегуда, *к.ф.-м.н., доцент*
О. І. Ковтун, *к.ф.-м.н., доцент*

Про поведінку розв'язків системи двох згасаючих стохастичних осциляторів.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська,64.
e-mail: perol@ukr.net

O.V. Pereguda, *Ph.D.,Associate Professor*
O.I. Kovtun, *Ph.D.,Associate Professor*

The behavior of the solution of a system of two damped stochastic oscillators.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: perol@ukr.net

У роботі проводиться дослідження поведінки розв'язків двох спряжених згасаючих аперіодичних гармонічних осциляторів при випадкових збурень типу "білого шуму" у формі Іто вздовж вектора фазової швидкості заданої системи. Отримано явний вигляд розв'язків відповідної стохастичної системи рівнянь Іто. Проведено якісний аналіз поведінки амплітуди та фази системи згасаючих стохастичних гармонічних осциляторів. Для отриманого розв'язку відповідної системи стохастичних рівнянь Іто побудовані різні моделі згасаючих аперіодичних осциляторів.

Ключові слова: гармонічний осцилятор, стохастичне диференціальне рівняння, згасаючи коливання, розв'язок рівняння Іто.

In present paper we consider representation of the solutions of the system of two harmonic oscillators with friction. This model is described by a system of linear differential equations of second order.The phase represent of the system is a family of parabolas singular point at the origin node.At the random perturbations of the "white noise" type of the Ito form along the phase velocity vector makes it system of stochastic Ito equations. The behavior of the solutions of stochastic of two conjugate damped aperiodic harmonic oscillators is investigated. The explicit form of the solutions of the corresponding system of stochastic Ito equations is found. A qualitative analysis of amplitude and phase behavior of the system damped harmonic stochastic oscillators is investigated. It is shown that under certain additional disturbance vector transfer equation stochastic equations, phase trajectories corresponding deterministic equations are invariant surfaces perturbed equation. To the resulting solution Ito stochastic equations constructed various models damped oscillator.

Key Words: harmonic oscillator, stochastic differential equation, damped fluctuations,Ito solution of equation.
Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Розглядається система двох гармонічних осциляторів з тертям, що описується системою двох лінійним диференціальних рівняннь другого порядку

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + 2h_1\dot{u}_1(t) + k_1^2u_1(t) = 0, \\ \ddot{u}_2(t) + 2h_2\dot{u}_2(t) + k_2^2u_2(t) = 0, \\ u_1(0) = u_{10}, \dot{u}_1(0) = \dot{u}_{10}, \\ u_2(0) = u_{20}, \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{20}, \end{cases} \tag{1}$$

де $u_{0i}, \dot{u}_{0i}$ — початкові положення і швидкості осциляторів $\left(u_{i0}^2 + \dot{u}_{i0}^2 > 0\right)$; $k_i > 0$, h_i – коефіцієнти тертя осциляторів; $u_i(t), \dot{u}_i(t)$ – положення і швидкість осциляторів в момент часу $t > 0$; $i = 1, 2$.

Система (1) еквівалентна системі диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -k_1^2x_1 - 2h_1x_2, \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = -k_2^2x_3 - 2h_2x_4, \end{cases} \tag{2}$$

де

$$x_1(t) = u_1(t); x_2(t) = \dot{u}_1(t);$$

$$x_3(t) = u_2(t); x_4(t) = \dot{u}_2(t).$$

У прямокутній декартовій системі координат стан системи (2) зображається точкою M з координатами $(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t))$, яка рухається по фазовій траєкторії. Фазова швидкість точки M направлена вздовж дотичного вектора $(x_2(t),\ -k_1^2x_1(t) - 2h_1x_2(t),\ x_4(t),\ -k_2^2x_3(t) - 2h_2x_4(t))$. Портрет можливих рухів точки у фазовому просторі залежить від знаків $h_i^2 - k_i^2$, $i = 1,2$. Якщо $0 < h^2 < k^2$, то це сім'я спіралей; якщо $h = 0$, то це сім'я подібних еліпсів з центром у початку координат; якщо $h^2 > k^2$, то сім'я парабол з особливою точкою вузол у початку координат; якщо $h^2 = k^2$, то сім'я кривих параболічного типу вузол у початку координат (при $h = k$ вузол стійкий). Дослідження поведінки зображувальної точки M на фазовій площині X_1OX_2 при випадкових збуреннях вздовж вектора фазової швидкості, у випадку одного гармонічного осцилятора, проведено в [4]. Для випадку двох спряжених гармонічних осциляторів збурених двома незалежними вінеровськими процесами, дослідження поведінки зображувальної точки M при $0 < h < k$ (згасаючий осциляторний процес) було проведено в [5].

2 Постановка задачі

В данній роботі досліджується поведінка зображувальної точки M у фазовому просторі при випадковому збуренні вектора фазової швидкості $(x_2(t),\ -k_1^2x_1(t) - 2h_1x_2(t),\ x_4(t),\ -k_2^2x_3(t) - 2h_2x_4(t))$"білим шумом" у формі Іто для випадку $|h_i| > k_i$ $i = 1,2$(згасаючий аперіодичний процес). При заданих випадкових збуреннях розглядається загальна система рівнянь вигляду:

$$\dot{x}(t) = Bx(t)\dot{\xi}(t) \qquad (3)$$

де $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$,

$$\dot{\xi}_1(t) = g_{11}(t) + g_{21}(t)\dot{w}_1(t);$$

$$\dot{\xi}_2(t) = g_{12}(t) + g_{22}(t)\dot{w}_2(t);$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1^2 & -2h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_2^2 & -2h_2 \end{pmatrix},$$

$g_{ij}(t)$ — невипадкові функції;
$\dot{w}_i(t)$ — "похідна" від вінерівського процесу ("білий шум" у формі Іто).

Крім того вводиться додатково керуючий вектор переносу, при якому фазові траєкторії рівняння (2) будуть інваріантними поверхнями збуреної системи. Нехай $(F_t, t > 0)$ - неспадний потік σ -алгебр на фіксованованому ймовірностному просторі (Ω, F, P), $(w(t), F_t)$ - вінерівський процес, $g_{ij}(t)$ - функції, визначені в області $[0,\infty) \times \Omega$, неперервні з ймовірністю 1 і при кожному фіксованому t вимірні відносноF_t. Тоді рівняння (3) природньо розглянути як рівняння Іто

$$dx(t) = Bx(t)d\xi_i(t); \qquad (4)$$

i=1,2;

$\xi_1(t) = \int\limits_0^t g_{11}(s)ds + \int\limits_0^t g_{21}(s)dw_1(s);$

$\xi_2(t) = \int\limits_0^t g_{12}(s)ds + \int\limits_0^t g_{22}(s)dw_2(s).$

Введемо наступні позначення: $\mu_i = \sqrt{h_i^2 - k_i^2}$; $\lambda_{1i} = -h_i + \mu_i$, $\lambda_{2i} = -h_i - \mu_i$, $\alpha_{1j} = \int\limits_0^t g_{1j}(s)ds$; $\alpha_{2j} = \int\limits_0^t g_{2j}^2(s)ds$; $j = 1,2$, $i = 1,2$.

Має місце наступна теорема:

Теорема 2.1. *Нехай $x(t)$– розв'язок рівняння (4), тоді з ймовірністю 1 для всіх $t \geqslant 0$ мають місце рівності:*

$x_1(t) = A_1(t)\sqrt{2}\cos(\phi_1(t) + \frac{\pi}{4})$,

$x_2(t) = A_1(t)(\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2)\sin(\phi_1(t) + \gamma_1)$,

$x_3(t) = A_2(t)\sqrt{2}\cos(\phi_2(t) + \frac{\pi}{4})$,

$x_4(t) = A_2(t)(\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2)(\sin\phi_2(t) + \gamma_2)$.

де

$$A_1(t) = \frac{1}{\lambda_{11} - \lambda_{12}}\sqrt{(y_{11}^2(t) - y_{12}^2(t))},$$

$$A_2(t) = \frac{1}{\lambda_{21} - \lambda_{22}}\sqrt{(y_{21}^2(t) - y_{22}^2(t))},$$

$$y_{ij}(t) = y_{ij}(0)\exp\{-\frac{\lambda_{ij}^2}{2}\alpha_{2i}(t) + \lambda_{ij}\xi(t)\},$$

$$y_{11}(0) = -\lambda_{12}u_{10} + \dot{u}_{10}, y_{12}(0) = -\lambda_{11}u_{10} + \dot{u}_{10},$$

$$y_{21}(0) = -\lambda_{22}u_{20} + \dot{u}_{20}, y_{22}(0) = -\lambda_{21}u_{20} + \dot{u}_{20},$$

$$tg\phi_1(t) = \frac{y_{12}(0)}{y_{11}(0)}\exp\{-2\mu_1[h_1\alpha_{2i}(t) + \xi(t)]\},$$

$$tg\phi_2(t) = \frac{y_{21}(0)}{y_{21}(0)}\exp\{-2\mu_2[h_2\alpha_{2i}(t) + \xi(t)]\},$$

$tg\gamma_1 = -\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}}$, $tg\gamma_2 = -\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}}$, $i = 1,2, j = 1,2.$

Доведення. Розглянемо лінійне перетворення процесу $x(t)$, при якому матриця B в рівнянні (4) прийме жорданову форму. Розглянемо процес $y(t) = Tx(t)$ з матрицею

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{12} & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

.

Тоді відповідно

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

– жорданова форма матриці B. Завдяки рівнянню (4) для процесу $y(t)$отримаємо стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$dy(t) = TBT^{-1}y(t)d\xi(t) \tag{5}$$

З коефіцієнтом переносу

$$a_1(t, y) = g_{11}(t)\left(\lambda_{11}y_{11}, y_{11} + \lambda_{21}y_{12}\right);$$
$$a_2(t, y) = g_{12}(t)\left(\lambda_{12}y_{11}, y_{11} + \lambda_{22}y_{12}\right);$$
$$a_3(t, y) = g_{11}(t)\left(\lambda_{11}y_{21}, y_{21} + \lambda_{21}y_{22}\right);$$
$$a_4(t, y) = g_{12}(t)\left(\lambda_{12}y_{21}, y_{21} + \lambda_{22}y_{22}\right).$$

Згідно [2] знаходимо явний вигляд розв'язків:

$$y_{ij}(t) = y_{ij}(0)\exp\{-\frac{\lambda_{ij}^2}{2}\alpha_{2i}(t) + \lambda_{ij}\xi(t)\},$$
$$i = 1, 2, j = 1, 2,$$

$$y_{11}(0) = -\lambda_{12}u_{10} + \dot{u}_{10}, y_{12}(0) = -\lambda_{12}u_{10} + \dot{u}_{10},$$
$$y_{21}(0) = -\lambda_{22}u_{20} + \dot{u}_{20}, y_{22}(0) = -\lambda_{21}u_{20} + \dot{u}_{20}.$$

Оскільки $x(t) = T^{-1}y(t)$, то враховуючи явний вигляд процесу $y(t)$, отримаємо завершення доведення теореми. □

Зауваження 1. *Маючи явний вигляд розв'язку рівняння (4) залежно від поведінки функцій $g_{ij}(t)$ можна будувати моделі незатухаючих осциляторів з довільним порядком росту амплітуд.*

Зауваження 2. *Якщо $g_{ij}(t) = g_{ij}$ - сталі і $g_{11} = 0$, $g_{12} = 0$, то при довільній інтенсивності $g_{21} \neq 0$, $g_{22} \neq 0$збурюючого "білого шуму" завжди маємо згасаючий осцилятор.*

Надалі ми зупинимося лише на аналізі поведінки лише затухаючих осциляторів. Покажемо, що при певному додатковому збуренні вектора переносу рівняння (4), фазові траєкторії відповідного детермінованого рівняння (2) будуть інваріантними поверхнями збуреного рівняння, тобто зображувальна точка збуреної системи буде"дифундувати" за фазовою траєкторією детермінованої системи (2).

Теорема 2.2. *Нехай $y(t)$– розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь*

$$dy(t) = g_{i2}^2By(t)dt + By(t)d\xi(t), i = 1, 2,$$

$$y_1(0) = u_1(0), y_2(0) = \dot{u}_1(0),$$

$$y_3(0) = u_0(t), y_4(0) = \dot{u}_2(0),$$

де матриця B має блочно-діагональну структуру з ненульовими блоками B_1 та B_2 вигляду:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_{11}\lambda_{21} & \lambda_{11} + \lambda_{21} \\ \lambda_{11}\lambda_{21}(\lambda_{11} + \lambda_{21}) & \lambda_{11}^2 + \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{21}^2 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_{12}\lambda_{22} & \lambda_{12} + \lambda_{22} \\ \lambda_{12}\lambda_{22}(\lambda_{12} + \lambda_{22}) & \lambda_{12}^2 + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{22}^2 \end{pmatrix}$$

. Тоді для довільного $t \geqslant 0$ $G(y(t)) = G(y(0))$ з ймовірністю 1, де $G(y) = G_1(y)G_2(y)$

$$G_1(y) = (-\lambda_{11}y_1 + y_2)(-\lambda_{12}y_1 + y_2)^{\frac{-\lambda_{12}}{\lambda_{11}}}$$

$$G_2(y) = (-\lambda_{21}y_3 + y_4)(-\lambda_{22}y_3 + y_4)^{\frac{-\lambda_{22}}{\lambda_{21}}}$$

Доведення теореми можна провести безпосереднім застосуванням формули Іто до процесу $G(y(t)$, в силу якої оттримаємо, що для довільного $t \geqslant 0$ $dG(y(t)) = 0$ з ймовірністю 1 і отже поверхня $G(y) = C$, де C-стала буде інваріантною множиною для заданої системи стохастичнихт рівнянь.

3 Висновки

У роботі розглянуто механічну модель, що описується ситемою двох спряжених гармонічних осциляторів у випадку аперіодичного затухання. При випадкових збуреннях типу "білого шуму" у формі Іто вздовж вектора фазової швидкості дана система перетворюється на систему стохастичних рівнянь Іто. Для отриманої стохатсичної системи проведено якісний аналіз поведінки розв'язків. Для даної системи двох стохастичних спряжених осциляторів з тертям знайдено явний вигляд і досліджено поведінку амплітуд та фаз. Маючи явний вигляд амплітуд та фаз системи двох стохастичних осциляторів залежно від поведінки невипадкових функцій $g_{ij}(t)$ можна будувати різні моделі аперіодичних затухаючих осциляторів з довільним порядком росту амплітуд. Доведено, що при певному додатковому збуренні вектора переносу рівняння (4), фазові траєкторії відповідного детермінованого рівняння (2) будуть інваріантними поверхнями збуреного рівняння.

Список використаних джерел

1. *Андронов А.А.* Теория колебаний / Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. – Москва: Наука. – 1981. – 918 с.

2. *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения / Гихман И.И., Скороход А.В. – Киев: Наукова думка. – 1968. – 354 с.

3. *Кулініч Г.Л.* Інваріантні множини стохастичних диференціальних рівнянь Іто / Кулініч Г.Л., Перегуда О.В. // Київ:ВПЦ Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2002. – 91с..

4. *Kulinich G. L.*Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator / Kulinich G. L. // Random Oper. And Stoch. Eq.– 1995.–**3**. – №2. – P. 141 – 152.

5. *Перегуда О.В.* Якісний аналіз поведінки системи двох згасаючих стохастичних осциляторів / О.В. Перегуда, О.І. Ковтун // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – №4. – P. 106 – 113.

References

1. ANDRONOV A.A, VITT A.A. and HAYKIN S.E. (1959), *Teoria kolebaniy*, M.: Nauka.

2. GIKHMAN I.I.and SKOROHOD A.V.(1968), *Stohasticheskie differencialnie uravnenia*, Kiev.: Naukova dumka.

3. KULINICH G.L. and PEREGUDA O.V.(2002), *Invariantni mnozhini stohastichnih differencialnih rivnian Ito*, Kiev.

4. KULINICH G. L. (1995) "Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator",*Random Oper. And Stoch. Eq.*, **3**. №2. pp. 141 – 152.

5. PEREGUDA O.V. and KOVTUN O.I. (2006), " Yakisniy analiz povedinky sysnemy dvoh zgasauchyh stohastychyh ostsiliatoriv", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4, pp. 106 – 113.

Received: 10.09.2015