

Фильтрационное течение в треугольных областях

И. К. Волянская, И. Д. Дорогая, А. А. Зайцев, А. Я. Шпилевой
Российский Государственный Университет имени Имануила Канта, Россия

For definition of complex potentials of filtration flows in the area restricted to the sides, the method of the image of special points is used. Three kinds of triangles are considered. For a case of a dot source numbers the series are expressed through Weierstrass sigma-function or Jacobi theta-function. Methods of the group theory a position of imaginary sources are studied and their coordinates are calculated.

Для исследования фильтрационных течений жидкости, подчиняющихся закону Дарси, удобно использовать комплексный потенциал $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [1, 2]. По нему можно определить поле скоростей и поле давлений [1]. Если границами раздела областей фильтрации являются прямые или окружности, то для определения комплексных потенциалов полезен метод изображения особых точек. Аналитическим выражением этого метода являются теоремы о прямой и окружности [1, 2].

В настоящей работе с помощью теоремы о прямой выполнен расчет комплексных потенциалов фильтрационных течений в области, ограниченной сторонами треугольника. Предложен другой способ решения задач, использующий теорию групп и принцип симметрии.

Рассматриваются только три вида треугольников, для которых может быть использован метод изображения особых точек: прямоугольный равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник с углом $\alpha = \pi/6$ и равносторонний треугольник. Для этих случаев получены решения, когда граничные условия одинаковы, т. е. область фильтрации окружена свободной жидкостью или границы непроницаемы [3 - 6].

В данной работе решены задачи для случаев, когда условия на сторонах треугольника различны (рис. 2а, 2б, 2в).

Рассмотрим теорему о прямой для случая, рассмотренного на рис. 1. Пусть особые точки функции $f(z)$ располагаются в области с коэффициентом проницаемости k_1 , тогда комплексные потенциалы течения имеют вид

$$W_1(z) = f(z) - \lambda \bar{f}[(z - a)e^{2i\alpha} + a],$$

$$W_2(z) = (1 + \lambda)f(z), \lambda = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}. \quad (1)$$

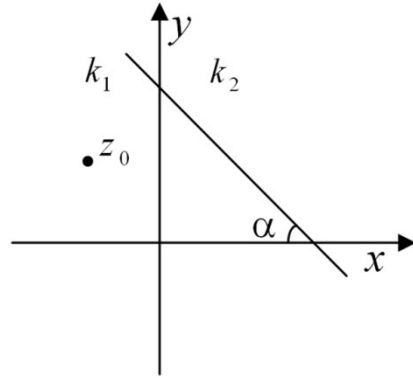


Рис.1 Область фильтрации разделена прямой

В дальнейшем будем использовать частные случаи теоремы (1): если область k_2 непроницаема ($k_2 = 0, \lambda = -1$), теорема принимает вид

$$W_1(z) = f(z) + \bar{f}[(z - a)e^{2i\alpha} + a], \tag{2}$$

если область k_2 заполнена свободной жидкостью ($k_2 = \infty, \lambda = 1$), то снова получаем (2), но со знаком минус перед вторым слагаемым.

1. Пусть границей области фильтрации является прямоугольный равнобедренный треугольник, у которого две стороны непроницаемые, а третья касается свободной жидкости (рис. 2а)

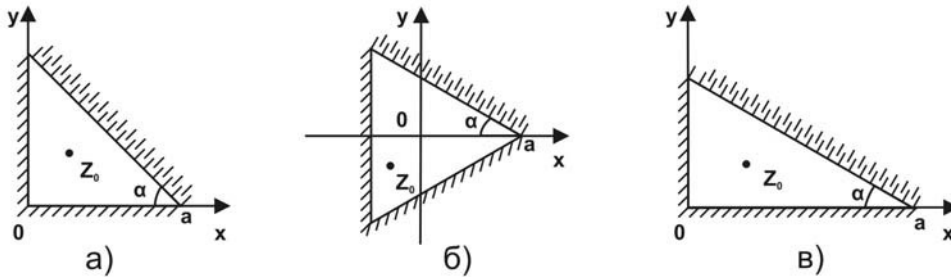


Рис.2. Области фильтрации с различными граничными условиями.

Пусть функция $f(z)$ имеет особые точки во внутренней области треугольника. Будем использовать метод последовательного применения теоремы о прямой [2], т. е. будем последовательно применять теорему о прямой относительно сторон треугольника. В результате получаем комплексный потенциал

$$W(z) = \sum_{k,m=-\infty}^{+\infty} [f(z + T_{k,m}) + f(-z + T_{k,m}) - f(z + T'_{k,m}) - f(-z + T'_{k,m}) + \bar{f}(z + T_{k,m}) + \bar{f}(-z + T_{k,m}) - \bar{f}(z + T'_{k,m}) - \bar{f}(-z + T'_{k,m})], \tag{3}$$

где $T_{k,m} = 2am + 2kai, T'_{k,m} = T_{k,m} + ai + a$.

Пусть $f(z) = (Q/2\pi)\ln(z-z_0)$, то есть в области фильтрации находится источник мощности Q . В этом случае комплексный потенциал (3) принимает вид

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \sum_{k,m=-\infty}^{+\infty} [\ln(z-z_0+T_{k,m}) + \ln(z+z_0+T_{k,m}) - \ln(z-z_1+T_{k,m}) - \ln(z+z_1+T_{k,m}) + \ln(z-\bar{z}_0+T_{k,m}) + \ln(z+\bar{z}_0+T_{k,m}) - \ln(z-\bar{z}_1+T_{k,m}) - \ln(z+\bar{z}_1+T_{k,m})], \quad (4)$$

где $z_1 = z_0 + a(i+1)$.

Воспользуемся определением сигма-функции Вейерштрасса:

$$\sigma(z) = z \prod_{k,m} \left(1 - \frac{z}{T}\right) \exp\left(\frac{z}{T} + \frac{z^2}{2T^2}\right), \quad k,m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

Каждое из слагаемых выражения (4) преобразуем согласно формуле (5). Получаем

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sigma(z-z_0)\sigma(z+z_0)\sigma(z-\bar{z}_0)\sigma(z+\bar{z}_0)}{\sigma(z-z_1)\sigma(z+z_1)\sigma(z-\bar{z}_1)\sigma(z+\bar{z}_1)} + C.$$

2. Пусть границей области фильтрации является равносторонний треугольник, у которого две стороны непроницаемые, а третья касается свободной жидкости (рис. 2б). Последовательно применяя теорему о прямой относительно сторон треугольника, получаем комплексный потенциал

$$W(z) = \sum_{k,n=-\infty}^{+\infty} \{f[-zm + a\bar{m} - am + T_{k,n}] + f[-z\bar{m} - a - am + T_{k,n}] - f[z + T_{k,n}] - \bar{f}[z\bar{m} + am + T_{k,n}] - \bar{f}[-z - a + T_{k,n}] + \bar{f}[zm - 2a\bar{m} + T_{k,n}]\} \quad (6)$$

где $m = \exp(2\pi i/3)$, $T_{k,n} = 3a(km + n\bar{m})$.

Для точечного источника комплексный потенциал (6) принимает вид

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \sum_{k,n=-\infty}^{+\infty} \{ \ln[\Phi_2 - T_{k,n}] - \ln[\Phi_1 - T_{k,n}] + \ln[\Phi_3 - T_{k,n}] - \ln[\Phi_4 - T_{k,n}] + \ln[\Phi_5 - T_{k,n}] - \ln[\Phi_6 - T_{k,n}] \}, \quad (7)$$

где $\Phi_1 = z - z_0$, $\Phi_2 = zm - a\bar{m} + am + z_0$, $\Phi_3 = z\bar{m} + a + am$, $\Phi_4 = z\bar{m} - am - \bar{z}_0$, $\Phi_5 = zm - 2a\bar{m} - \bar{z}_0$, $\Phi_6 = z + a + \bar{z}_0$.

Выражение комплексного потенциала (7) через сигму-функцию Вейерштрасса имеет вид

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sigma(\Phi_2)\sigma(\Phi_3)\sigma(\Phi_5)}{\sigma(\Phi_1)\sigma(\Phi_4)\sigma(\Phi_6)}.$$

3. Пусть границей области фильтрации является прямоугольный треугольник с углом $\alpha = \pi/6$, у которого две стороны непроницаемые, а третья касается свободной жидкости (рис. 2в).

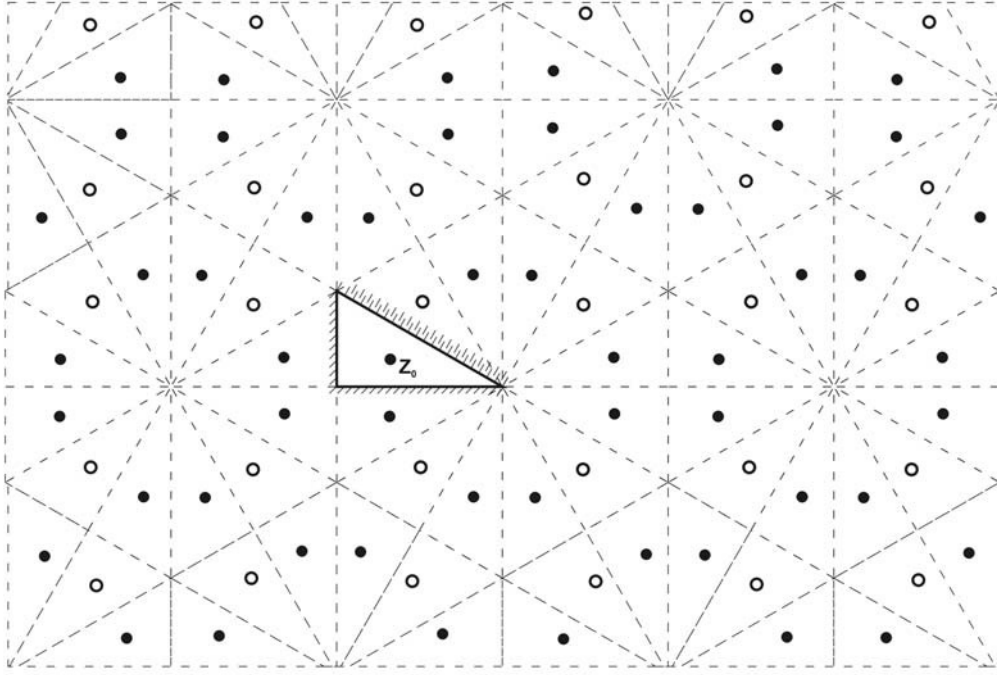


Рис.3. Положение особых точек.

Последовательно применяя теорему о прямой относительно сторон треугольника, получаем комплексный потенциал

$$\begin{aligned}
 W(z) = & \sum_{k,j=-\infty}^{+\infty} \{ f[zm + am - T_{k,j}] + f[-zm + am + T_{k,j}] + f[z - T_{k,j}] + f[-z + T_{k,j}] - \\
 & - f[\bar{z}\bar{m} + a\bar{m} - T_{k,j}] - f[-\bar{z}\bar{m} + a\bar{m} + T_{k,j}] + \bar{f}[z - T_{k,j}] + \bar{f}[-z + T_{k,j}] \} + \\
 & + \bar{f}[zm + am - T_{k,j}] - \bar{f}[-zm + am + T_{k,j}] - \bar{f}[\bar{z}\bar{m} + a\bar{m} - T_{k,j}] - \bar{f}[-\bar{z}\bar{m} + a\bar{m} + T_{k,j}],
 \end{aligned} \quad (8)$$

где $T_{k,j} = a(km + j\bar{m})$.

Далее запишем (8) для источника

$$\begin{aligned}
 W(z) = & \frac{Q}{2\pi} \sum_{k,j=-\infty}^{+\infty} \{ \ln[(\Phi_1 + T_{k,j})] + \ln[\tilde{\Phi}_1 + T_{k,j}] + \ln[\Phi_2 + T_{k,j}] + \ln[\tilde{\Phi}_2 + T_{k,j}] + \\
 & + \ln[\Phi_3 + T_{k,j}] - \ln[\tilde{\Phi}_3 + T_{k,j}] - \ln[\Phi_4 + T_{k,j}] - \ln[\tilde{\Phi}_4 + T_{k,j}] - \\
 & - \ln[\Phi_5 + T_{k,j}] + \ln[\tilde{\Phi}_5 + T_{k,j}] - \ln[\Phi_6 + T_{k,j}] - \ln[\tilde{\Phi}_6 + T_{k,j}] \},
 \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= z - z_0, \tilde{\Phi}_1 = z - \bar{z}_0, \Phi_2 = z + z_0, \tilde{\Phi}_2 = z + \bar{z}_0, \Phi_3 = zm + am - z_0, \\
 \tilde{\Phi}_3 &= zm - am + \bar{z}_0, \Phi_4 = \bar{z}\bar{m} + a\bar{m} + z_0, \tilde{\Phi}_4 = \bar{z}\bar{m} + a\bar{m} - \bar{z}_0, \\
 \Phi_5 &= zm - am + z_0, \tilde{\Phi}_5 = zm + am - \bar{z}_0, \Phi_6 = \bar{z}\bar{m} + a\bar{m} - z_0, \tilde{\Phi}_6 = \bar{z}\bar{m} - a\bar{m} - \bar{z}_0.
 \end{aligned}$$

Выражение комплексного потенциала (9) через сигму-функцию Вейерштрасса имеет вид

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sigma(\Phi_1)\sigma(\tilde{\Phi}_1)\sigma(\Phi_2)\sigma(\tilde{\Phi}_2)\sigma(\Phi_3)\sigma(\tilde{\Phi}_3)}{\sigma(\Phi_4)\sigma(\tilde{\Phi}_4)\sigma(\Phi_6)\sigma(\tilde{\Phi}_6)\sigma(\Phi_5)\sigma(\tilde{\Phi}_5)}.$$

Решение рассмотренной задачи может быть также выражено через тета – функцию Якоби как указано в работах [5, 6].

4. Предложим еще два способа решения рассмотренных задач. Ограничимся случаем нулевых граничных условий. В этом случае комплексный потенциал сосредоточенного источника совпадает с функцией Грина соответствующей двумерной задачи Дирихле, поэтому для определенности будем изучать функцию Грина. Новые способы используют следующие известные факты [7 - 9]. Именно, функция Грина $g(z, z_0)$ двумерной задачи Дирихле для односвязной области D допускает представление

$$g(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |h(z, z_0)|, \quad z, z_0 \in D, \quad (10)$$

где функция $h(z, z_0)$ аналитична в области D , имеет там простой ноль в точке z_0 , подчиняется граничному условию

$$|h(z, z_0)| = 1, \quad z \in \partial D, \quad (11)$$

(∂D – граница области D), и она осуществляет конформное отображение области D на единичный круг $|w| < 1$ так, что точка z_0 отображается в центр круга. Эта функция однозначно определяется с точностью до постоянного множителя $\exp(ik)$, k – произвольное действительное число.

Далее, если известна функция $h(z, c)$ для некоторого фиксированного положения источника в точке $z = c$, то функция $h(z, z_0)$ (z_0 – комплексная координата произвольно расположенного источника) выражается через $h(z, c)$ по формуле

$$h(z, z_0) = \frac{h(z, c) - h(z_0, c)}{1 - \overline{h(z_0, c)}h(z, c)}. \quad (12)$$

Это выражение получается композицией отображения $h(z, c)$ с подходящим конформным автоморфизмом единичного круга $|w| < 1$. Кроме того, будем пользоваться свойством аналитических функций, родственным принципу симметрии Римана-Шварца. Пусть граница области D содержит часть прямой или окружности l (допускаются случаи, когда l является полной прямой или окружностью). Тогда функция $h(z, z_0)$ единственным образом продолжается в симметричную область sD (здесь s – симметрия от l) до мероморфной функции (будем обозначать ее тем же символом $h(z, z_0)$), которая имеет простой полюс в точке $z = sz_0$, так, что в области $D+l+sD$ она удовлетворяет соотношению

$$h(z, z_0)\overline{h(sz, z_0)} = 1. \quad (13)$$

Доказательство справедливости этого свойства аналогично доказательству принципа симметрии Римана-Шварца [7, 8].

Наконец, будут использованы следующие известные геометрические факты: 1) композиция отражений от двух пересекающихся прямых является поворотом вокруг точки пересечения на удвоенный угол между прямыми, 2) композиция

поворотов на противоположные углы вокруг разных центров является переносом.

5. Пусть областью D является один из треугольников, рассмотренных ранее в пп. 1 – 3 (метод можно использовать для многих других областей). Путем последовательных отражений в сторонах треугольника функция $h(z, z_0)$ единственным образом продолжается на всю комплексную плоскость до мероморфной функции с простыми нулями и полюсами. Для определения комплексных координат этих нулей и полюсов требуется изучить группу G , порожденную от границ области D . Здесь помогает то, что, как будет позже установлено, группа G содержит нормальную подгруппу переносов.

Рассмотрим случай, когда D является правильным треугольником. Нам удобно расположить треугольник так, чтобы его вершинами были точки $a, -a$ и $\sqrt{3} ai$. Тогда для действия отражений s_1, s_2, s_3 от сторон треугольника на точки плоскости справедливы формулы

$$s_1z = \bar{z}, \quad s_2z = \exp(4\pi i/3)(\bar{z}-a)+a, \quad s_3z = \exp(2\pi i/3)(\bar{z}+a)-a. \quad (14)$$

Эти отражения порождают группу G . Поскольку s_2 является тождественным отображением для каждой симметрии s , то элементы группы G выражаются через порождающие элементы следующим образом: $g = s_1s_2s_3s_1 \dots$, или аналогично. Такое выражение неединственное из-за существования в группе бесконечного числа определяющих соотношений, однако в любых двух выражениях для одного и того же элемента число множителей имеет одинаковую четность: если в каком-то выражении для преобразования g число множителей четное (соответственно нечетное), то $g(z)$ будет линейной функцией от z (соответственно от \bar{z}), поэтому и в любом другом выражении для g число множителей будет тоже четным (соответственно нечетным). Таким образом, можно говорить о четных и нечетных элементах группы G . Пусть G_0 и G_1 – множества всех четных и нечетных элементов соответственно. Тогда G_0 есть нормальная подгруппа группы G индекса 2 и фактор-группа G/G_0 содержит 2 элемента: G_0, G_1 . Действие элементов G_0 на точку z_0 дает все нули функции $h(z, z_0)$, а действие элементов G_1 на ту же точку z_0 дает все полюсы. Найти значения координат нулей и полюсов помогает то, что G_0 содержит нормальную подгруппу переносов. Покажем это. Подгруппа G_0 порождена двумя произведениями $R = s_1s_2$ и $R_1 = s_3s_1$. Это есть повороты на угол $2\pi/3$ вокруг вершин треугольника a и $-a$ (см. конец п. 4). Остальные четыре двойных произведения выражаются через предыдущие следующим образом:

$$s_1s_3 = R_1I, \quad s_2s_1 = R_1I, \quad s_2s_3 = (s_2s_1)s_1s_3 = R_1R_1I, \quad s_3s_2 = R_1R.$$

Поскольку каждый четный элемент выражается через двойные произведения, то все четные элементы можно выразить через повороты R и R_1 . Справедливы формулы

$$Rz = \exp(2\pi i/3)(z-a)+a, \quad R_1z = \exp(2\pi i/3)(z+a)-a. \quad (15)$$

С помощью геометрических фактов, указанных в конце п. 4, устанавливается, что элементами подгруппы G_0 являются повороты на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ вокруг вершин всех правильных треугольников, образующих паркетное покрытие плоскости, а также переносы. Множество переносов H_0 является нормальной подгруппой групп G_0 и G (фактор-группа G/H_0 содержит 6 элементов), которая порождена преобразованиями

$$T = RR_1^2R^2R_1, \quad T_0 = R^2R_1$$

(этот выбор порождающих элементов предпочтительней выбора пары $T_0 = R^2R_1$, $T_1 = RR_1^2$). Расчет показывает, что

$$Tz = z + 6a, \quad T_0z = z + 2\sqrt{3} \exp(\pi i/6)a.$$

Таким образом, для действия элементов $g \in H_0$ на точку z имеет место следующая общая формула:

$$gz = z + 6ma + 2\sqrt{3} \exp(\pi i/6)na, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Кроме H_0 группа G_0 содержит еще 2 смежных класса $H_1 = RH_0 = H_0R$ и $H_2 = R^2H_0 = H_0R^2$. Комбинируя формулу (16) с первой из формул (15), получаем формулы для действия элементов этих смежных классов:

$$gz = \exp(2\pi ik/3)(z - a) + a + 6ma + 2\sqrt{3} \exp(\pi i/6)na, \quad k = 1, 2. \quad (17)$$

Наконец, для действия элементов множества G_1 будем иметь:

$$gz = \exp(2\pi ik/3)(\bar{z} - a) + a + 6ma + 2\sqrt{3} \exp(\pi i/6)na, \quad k = 0, 1, 2. \quad (18)$$

Заменяя в формулах (16), (17) z на z_0 , получим значения нулей функции $h(z, z_0)$, а такая же замена в формуле (18) дает значения полюсов той же функции. Целой функцией, нулями которой являются

$$z_{mn} = z_0 + 6ma + 2\sqrt{3} \exp(\pi i/6)na, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (19)$$

есть тета-функция $\theta_1((z - z_0)/(6a)|\tau)$, где $\tau = \exp(\pi i/6)/\sqrt{3}$. Поэтому можно ожидать, что функция $h(z, z_0)$ в выражении (14) для функции Грина должна иметь следующее представление:

$$h(z, z_0) = \prod_{j=0}^2 \frac{\theta_1\left(\frac{R^j z - z_0}{6a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{R^j z - \bar{z}_0}{6a} \middle| \tau\right)}. \quad (20)$$

Несложная проверка подтверждает, что функция (20) действительно удовлетворяет соотношениям (13) для симметрий s_1, s_2, s_3 , то есть соотношениям

$$h(z, z_0) \overline{h(s_k z, z_0)} = 1, \quad k = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Таким образом, задача построения функции Грина задачи Дирихле для правильного треугольника решена. Тем же способом получается решение для остальных треугольников. Например, для прямоугольного треугольника с вершинами в точках $0, a$, и $\sqrt{3} ai$ (его острые углы равны $\pi/6$ и $\pi/3$)

$$h(z, z_0) = \prod_{j=0}^2 \frac{\theta_1\left(\frac{R^j z - z_0}{6a} \middle| \tau\right) \theta_1\left(\frac{R^j z + z_0}{6a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{R^j z - \bar{z}_0}{6a} \middle| \tau\right) \theta_1\left(\frac{R^j z + \bar{z}_0}{6a} \middle| \tau\right)}.$$

6. Получим функцию $h(z, z_0)$ другим способом. Сначала построим функцию $h(z, c)$. Будем считать, что точка c является центром треугольника. Тогда $c = ai/\sqrt{3}$. Действие группы G на точку c отображает ее в центры всех правильных треугольников, которые образуют паркетное покрытие (разбиение) плоскости. Нулями функции $h(z, c)$ будут точки $z = c + 2(m + \exp(\pi i/3)n)a, m, n \in \mathbb{Z}$, а полюсами – симметричные точки $z = \bar{c} + 2(m + \exp(\pi i/3)n)a$. Целыми функциями, которые имеют простые нули в тех же точках, являются тета-функции $\theta_1((z-c)/(2a)|\tau)$ и $\theta_1((z-\bar{c})/(2a)|\tau)$ соответственно; здесь $\tau = \exp(\pi i/3)$. Их отношение не удовлетворяет соотношениям (17), но им подчиняется функция

$$h(z, c) = \exp\left(-\frac{2\pi i(z-a)}{3a}\right) \frac{\theta_1\left(\frac{z-c}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\bar{c}}{2a} \middle| \tau\right)}, \quad \tau = \exp(\pi i/3). \quad (22)$$

Проверка в данном случае сложнее, чем в предыдущем. Она использует равенства

$$\begin{aligned} \overline{s_2 z} &= Rz, \quad \overline{s_3 z} = R_1^2 z, \\ \overline{\theta_1(z|\tau)} &= \exp(-\pi i/4) \theta_1(\bar{z}|\tau), \\ \theta_1\left(\frac{Rz-c}{2a} \middle| \tau\right) &= \exp(\varphi(z)) \theta_1\left(\frac{z-c}{2a} \middle| \tau\right), \quad \theta_1\left(\frac{Rz-\bar{c}}{2a} \middle| \tau\right) = \exp(\psi(z)) \theta_1\left(\frac{z-\bar{c}}{2a} \middle| \tau\right), \\ \theta_1\left(\frac{R_1^2 z - c}{2a} \middle| \tau\right) &= \exp(\varphi_0(z)) \theta_1\left(\frac{z-c}{2a} \middle| \tau\right), \quad \theta_1\left(\frac{R_1^2 z - \bar{c}}{2a} \middle| \tau\right) = \exp(\psi_0(z)) \theta_1\left(\frac{z-\bar{c}}{2a} \middle| \tau\right); \end{aligned} \quad (23)$$

здесь

$$\varphi(z) = \frac{\pi \exp(\pi i/6)}{4a^2} (z-a) - \frac{\pi \exp(\pi i/3)}{\sqrt{3}a} (z-a),$$

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \frac{\pi \exp(\pi i / 6)}{4a^2} (z-a)2 + \frac{\pi \exp(\pi i / 3)}{\sqrt{3}a} (z-a), \\ \varphi_0(z) &= \frac{\pi \exp(-\pi i / 6)}{4a^2} (z+a)2 + \frac{\pi \exp(-\pi i / 3)}{\sqrt{3}a} (z+a), \\ \psi_0(z) &= \frac{\pi \exp(-\pi i / 6)}{4a^2} (z+a)2 - \frac{\pi \exp(-\pi i / 3)}{\sqrt{3}a} (z+a).\end{aligned}$$

Для доказательства справедливости формулы (23) используется ряд Фурье для тета-функции $\theta_1(z|\tau)$ и равенство $\bar{\tau} = 1-\tau$, $\tau = \exp(\pi i / 3)$. Вывод формул (24) аналитическими средствами, вероятно, невозможен, поэтому для доказательства их справедливости требуется особый анализ. В качестве примера получим первую из них. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{\theta_1\left(\frac{Rz-c}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{z-c}{2a} \middle| \tau\right)}. \quad (25)$$

Поскольку $Ra = a$, то

$$F(a) = 1. \quad (26)$$

Простые нули числителя и знаменателя функции $F(z)$ совпадают, поэтому она является целой функцией. Рассмотрим ее изменения при сдвигах аргумента на $2a$ и $2\exp(\pi i / 3)a$. Заметим, что $R(z+2a) = Rz + 2\exp(2\pi i / 3)a = Rz + (-1+\tau)2a$. С помощью этого равенства и формул преобразования тета-функции получаем:

$$\begin{aligned}\theta_1\left(\frac{z+2a-c}{2a} \middle| \tau\right) &= \theta_1\left(\frac{z-c}{2a} + 1 \middle| \tau\right) = -\theta_1\left(\frac{z-c}{2a} \middle| \tau\right), \\ \theta_1\left(\frac{R(z+2a)-c}{2a} \middle| \tau\right) &= \theta_1\left(\frac{Rz-c}{2a} - 1 + \tau \middle| \tau\right) = \exp\left(-\pi i \left(\frac{Rz-c}{2a} + \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)\right)\right) \\ \theta_1\left(\frac{Rz-c}{2a} \middle| \tau\right) &= \exp(\varphi_1(z)) \theta_1\left(\frac{Rz-c}{2a} \middle| \tau\right),\end{aligned}$$

где $\varphi_1(z) = \pi \left(\frac{\exp(\pi i / 6)(z-a)}{a} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}i \right)$.

Следовательно,

$$F(z+2a) = \exp(\varphi_1(z))F(z). \quad (27)$$

Аналогично получается соотношение

$$F(z+2\exp(\pi i / 3)a) = \exp(\varphi_2(z))F(z), \quad (28)$$

где $\varphi_2(z) = \pi \left(i \frac{z-a}{a} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}i \right)$.

С помощью теоремы Лиувилля можно установить, что существует единственная функция $F(z)$, удовлетворяющая соотношениям (28), (29) и условию (27). Она допускает представление

$$F(z) = \exp(\varphi(z)),$$

где функция $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнениям

$$\varphi(z+2a) - \varphi(z) = \varphi_1(z) \pmod{2\pi i}, \quad \varphi(z+2\exp(\pi i/3)) - \varphi(z) = \varphi_2(z) \pmod{2\pi i}. \quad (30)$$

Решение этих уравнений ищется в виде

$$\varphi(z) = A(z-a) + B(z-a)^2.$$

После подстановки это выражения в уравнения (30) находим

$$A = \frac{\pi \exp(\pi i / 6)}{4a^2}, \quad B = -\frac{\pi \exp(\pi i / 3)}{\sqrt{3}a}.$$

Тем самым доказана справедливость первых равенств в формулах (24), (25). Остальные доказываются так же.

В качестве примера сделаем проверку соотношения (21) для случая $k = 2$. Она использует равенство (23), а также формулы

$$\frac{2\pi i(\overline{s_2 z - a})}{3a} - \frac{2\pi i(z - a)}{3a} = \varphi(z) - \psi(z) = -\frac{2\pi \exp(\pi i / 3)(z - a)}{\sqrt{3}a};$$

имеем:

$$\begin{aligned} \overline{h(s_2 z, c)} h(z, c) &= \exp\left(\frac{2\pi i(\overline{s_2 z - a})}{3a}\right) \frac{\theta_1\left(\frac{s_2 z - c}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{s_2 - \bar{c}}{2a} \middle| \tau\right)} \exp\left(-\frac{2\pi i(z - a)}{3a}\right) \frac{\theta_1\left(\frac{z - c}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{z - \bar{c}}{2a} \middle| \tau\right)} = \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i(\overline{s_2 z - a})}{3a} - \frac{2\pi i(z - a)}{3a}\right) \frac{\exp(-\pi i / 4)}{\exp(-\pi i / 4)} \frac{\theta_1\left(\frac{s_2 z - \bar{c}}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{s_2 z - c}{2a} \middle| \tau\right)} \frac{\theta_1\left(\frac{z - c}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{z - \bar{c}}{2a} \middle| \tau\right)} = \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi \exp(\pi i / 3)(z - a)}{\sqrt{3}a}\right) \frac{\theta_1\left(\frac{Rz - \bar{c}}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{z - \bar{c}}{2a} \middle| \tau\right)} \frac{\theta_1\left(\frac{z - c}{2a} \middle| \tau\right)}{\theta_1\left(\frac{Rz - c}{2a} \middle| \tau\right)} = \end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\frac{2\pi \exp(\pi i / 3)(z-a)}{\sqrt{3}a}\right) \frac{\exp(\psi(z))}{\exp(\varphi(z))} = \exp\left(\psi(z) - \varphi(z) - \frac{2\pi \exp(\pi i / 3)(z-a)}{\sqrt{3}a}\right) = 1.$$

К такому же результату приходим и в случаях $k = 1, 3$.

Решение задачи для произвольного расположения источника z_0 получается по формуле (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. - М.: Наука, 1972. - 368с.
2. Зайцев А. А., Шпилевой А. Я. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах. // Издательство КГУ. - Калининград, 2001. - 126 с.
3. Васильева Е. И., Шпилевой А. Я. Моделирование фильтрационных течений жидкости в области с границей в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. // Труды Международных школ – семинаров «МДОЗМФ». Вып. 3. Орел. ОГУ. 2004. – С.15 - 17.
4. Севастьянова Н. В., Шпилевой А. Я. Моделирование фильтрационных течений жидкости в области с границей в виде равностороннего треугольника.// Труды Международных школ – семинаров «МДОЗМФ». Вып.4. Орел. ОГУ. 2005. – С. 111 - 115.
5. Севастьянова Н. В., Шпилевой А. Я. Решение задач теории фильтрации, выраженные через тета-функцию Якоби для областей в виде прямоугольника и равностороннего треугольника // Труды международных конференции: «Современные методы физико – математических наук» Т.2.// Орел. 2006. С. 67 - 70.
6. Волянская И. К., Дорогая И. Д., Зайцев А. А., Шпилевой А. Я. Моделирование фильтрационных течений в области, ограниченной сторонами треугольника. // Вестник РГУ им. И. Канта. Вып. 4: Сер. физико – математические науки. – Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. – С. 11 - 17.
7. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512с.

Надійшла 30.03.2009.