

УДК 51-74

## Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів

В. А. Герус, П. М. Мартинюк

*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,  
Україна*

Запропоновано узагальнення рівняння фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням фізико-хімічних факторів. Запис рівнянь нерозривності рідкої та твердої фаз ґрунту з використанням повної похідної в часі дозволив розглянути процес фільтраційної консолідації з урахуванням довільної скінченної кількості факторів впливу. За допомогою класичної теорії отримано нове рівняння фільтраційної консолідації. В якості конкретизації факторів впливу розглянуто концентрації хімічних речовин в рідкій фазі ґрунту, температуру, механічну та хімічну суфозію. Проведено огляд експериментальних та теоретичних залежностей густин фаз ґрунту від вказаних чинників. Таким чином отримано передумови подальшого дослідження впливу різних чинників на процеси консолідації ґрунтів (повзучість скелету ґрунту, солеперенесення, теплоперенесення, хімічна суфозія, механічна суфозія тощо).

**Ключові слова:** *насичений ґрунт, консолідація, диференціальні рівняння в частинних похідних, техногенні фактори.*

Предложено обобщение уравнения фильтрационной консолидации грунтов с учетом физико-химических факторов. Уравнения неразрывности жидкой и твердой фаз грунта записаны с использованием полной производной во времени, что позволило рассмотреть процесс фильтрационной консолидации с учетом произвольного конечного количества факторов влияния. С помощью классической теории получено новое уравнение фильтрационной консолидации. В качестве конкретизации факторов влияния рассмотрены концентрации химических веществ в жидкой фазе грунта, температура, механическая и химическая суффозии. Проведен обзор экспериментальных и теоретических зависимостей плотностей фаз грунта от указанных факторов. Таким образом получено уравнение для дальнейшего исследования влияния разных факторов на процессы консолидации грунтов (ползучесть скелета грунта, солеперенос, теплоперенос, химическая суффозия, механическая суффозия и тому подобное).

**Ключевые слова:** *насыщенный грунт, консолидация, дифференциальные уравнения в частных производных, техногенные факторы.*

Generalization, which includes physical and chemical factors in the equation of soil filtration consolidation, has been proposed. The equation of continuity of soil liquid and solid phases is written using the total time derivative. This allows considering the process of filtration consolidation taking into account an arbitrary finite number of affecting factors. The authors have applied the classical theory method, but the investigation object - the equation of filtration consolidation - is new. The specific factors that have been considered in this study are: concentrations of chemicals in the liquid phase of the soil, mechanical and chemical suffusion, and temperature. A survey of experimental and theoretical dependences of the densities of soil phases on these factors has been performed. Thus backgrounds for further research of influence of various factors on the processes of soil consolidation (such as soil skeleton creep, salt transfer, heat transfer, chemical suffusion, mechanical suffusion, etc) have been obtained.

**Key words:** *saturated soil, consolidation, partial differential equation, technogenic factors.*

### 1. Аналіз останніх результатів та актуальність задачі

Класичну теорію консолідації ґрунтів розроблено в 30-40-х роках ХХ-го століття (див. наприклад [1-3] та наведену там бібліографію). Проблеми консолідації ґрунтових основ безпосередньо стосуються будівництва цивільних, промислових та гідротехнічних споруд, безпеки та надійності їх експлуатації, безаварійності, а тому і на даний час залишаються актуальними.

В роботах А. П. Власюка, О. В. Жеребятьєва, В. М. Булавацького, В. В. Скопечького, П. М. Мартинюка набула розвитку теорія консолідації ґрунтів з урахуванням впливу тепломасоперенесення (див. [4-7] та наведену там бібліографію). Крім того в роботах [8, 9] розвинуто теорію консолідації ґрунтів з урахуванням їх фільтраційного руйнування. В роботі [10] обґрунтовано коректність задачі консолідації ґрунтів в областях з рухомими межами.

В роботах [4, 11] запропоновано при урахуванні впливу температури на процеси консолідації ґрунтів використати наступні рівняння нерозривності двофазного пористого середовища, в яких враховано термічне розширення фаз ґрунту:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{\partial(\sigma \rho_p)}{\partial t} - (\alpha_p + q \alpha_m) \sigma \rho_p \frac{\partial T}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + \frac{\partial(\sigma_m \rho_m)}{\partial t} - \alpha_m (1 - q) \sigma_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Тут:  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор швидкості фільтрації;  $\sigma$  – пористість ґрунту;  $\sigma_m$  – об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту ( $\sigma_m = 1 - \sigma$ );  $\rho_m$  – густина твердих нерозчинних частинок ґрунту;  $\rho_p$  – густина порової рідини;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту, що формують його скелет;  $\alpha_p$ ,  $\alpha_m$  – коефіцієнти теплового розширення рідкої та твердої фаз ґрунту;  $T$  – температура пористого середовища;  $q = \frac{\alpha_m - \alpha}{\alpha_m}$ ,  $\alpha$  – коефіцієнт

об'ємного термічного розширення ґрунту, як пористого матеріалу.

В роботі [12], ґрунтуючись на ідеях М. М. Веригіна, запропоновано в рівняннях нерозривності враховувати вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах пористого середовища. Пізніше дана ідея була узагальнена на консолідацію засолених та загіпсованих ґрунтів, а також на багатокомпонентні хімічні розчини [13-15]. В результаті, узагальнюючи вказані впливи, можна записати наступні рівняння нерозривності рідкої та твердої фаз ґрунту:

$$\nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{\partial \left( \sigma \rho_p \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\rho_i} \right) \right)}{\partial t} - (\alpha_p + q \alpha_m) \sigma \rho_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + \frac{\partial \left( \rho_m \left( \sigma_m - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i} \right) \right)}{\partial t} - \alpha_m (1 - q) \sigma_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Тут:  $c_i, N_i, i = \overline{1, n}$  – концентрації хімічних речовин в рідких та твердих фазах, а  $n$  – їх (хімічних речовин) кількість;  $\rho_i, i = \overline{1, n}$  – густини хімічних речовин в твердій фазі. Рівняння (1), (2) слугували однією з відправних точок для побудови математичних моделей фільтраційної консолидації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів. Однак, їх можна узагальнити.

## 2. Ціль статті

Запис рівнянь нерозривності у вигляді (1), (2) має свої недоліки. Фактично в (1), (2) припускається, що густина рідкої фази ґрунту та вміст твердих частинок ґрунту лінійно залежать від концентрації хімічних речовин. Але, по перше, залежність густини порової рідини від розчинених в ній хімічних речовин при високих концентраціях останніх не є лінійною. По друге, зміна фізико-хімічного складу порової рідини та твердої фази пористого середовища (наприклад, урахування механічної суфозії [16-18]) вимагає нової модифікації рівнянь нерозривності, що є незручним. Тому ціллю даної статті є узагальнення рівнянь типу (1), (2) на випадок впливу різних фізико-хімічних факторів і, відповідно, узагальнення рівняння фільтраційної консолидації.

## 3. Узагальнення рівнянь нерозривності фаз ґрунту

Основне рівняння фільтраційної консолидації двохфазного ґрунту виведемо ґрунтуючись на наступних залежностях:

- рівняння нерозривності рідкої фази ґрунту

$$\nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{d(\sigma \rho_p)}{dt} = 0; \quad (3)$$

- рівняння нерозривності твердої фази ґрунту

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + \frac{d(\sigma_m \rho_m)}{dt} = 0; \quad (4)$$

- узагальнений закон Дарсі-Герсеванова на випадок урахування осмотичних явищ

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h + \mathbf{F}_{osm}, \quad (5)$$

де  $\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S})$  - коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від часу  $t$  та вектора  $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , де  $s_i, i = \overline{1, n}$ , характеризують той чи інший фактор (температура, концентрації хімічних речовин, концентрації рухомих суфозійних частинок тощо);  $e$  - коефіцієнт пористості ґрунту;  $h$  - надлишковий напір;  $\rho_m$  - густина твердих частинок ґрунту (включаючи водорозчинні та нерозчинні компоненти);  $\mathbf{F}_{osm}$  - вектор-функція осмотичних впливів. Наприклад, в роботах [4, 5, 14]

$$\mathbf{F}_{osm} = \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T,$$

де  $\mathbf{K}_c$  - коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу;  $\mathbf{K}_T$  - коефіцієнт (тензор) термічного осмосу;  $c$  - концентрація однокомпонентного хімічного розчину. В (5) " $n$ " має інше значення, аніж в (1). В роботах [14, 15] осмотичні впливи

узагальнені на випадок багатоконпонентного хімічного розчину. Оскільки детальний розгляд осмотичних явищ не є метою статті, то ми на цьому зупинятись не будемо.

На перший погляд рівняння (3), (4) не враховують тих факторів, які враховують рівняння (1), (2). Це не так. Наявність повної похідної за часом означає, наприклад

$$\frac{d(\sigma\rho_p)}{dt} = \frac{\partial(\sigma\rho_p)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\sigma\rho_p)}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t}.$$

Тут вимагається задання залежностей величин  $\sigma$  та  $\rho_p$  від впливу техногенних факторів. Це ж саме стосується  $\sigma_m$  та  $\rho_m$ . Однак, в якості таких залежностей може бути використана будь-яка, відома з експериментів або теоретична, а не лише лінійна, як в попередніх роботах [11-13].

#### 4. Узагальнення рівняння фільтраційної консолідації

Застосуємо підхід, використаний в класичній теорії фільтраційної консолідації ґрунтів [1, 2]. Продиференціювавши кожне з рівнянь (5) відповідно по змінних  $x$ ,  $y$ ,  $z$  та додавши їх, отримаємо

$$\nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \nabla e - e \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h) + \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}. \quad (6)$$

З рівнянь (3) і (4) маємо

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{d\sigma}{dt} - \mathbf{F}_p, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{d\sigma_m}{dt} - \mathbf{F}_m, \quad (8)$$

де

$$\mathbf{F}_p = \frac{1}{\rho_p} \left( \mathbf{u} \nabla \rho_p + \sigma \frac{d\rho_p}{dt} \right), \quad \mathbf{F}_m = \frac{1}{\rho_m} \left( \mathbf{v} \nabla \rho_m + \sigma_m \frac{d\rho_m}{dt} \right).$$

Оскільки процеси консолідації в основному складають проблему для глинистих ґрунтів, то, зважаючи на мале значення коефіцієнта фільтрації, швидкість фільтрації по абсолютній величині є малою. Зважаючи на те, що у виразі для  $\mathbf{F}_p$  ця швидкість ще і ділиться на  $\rho_p$  - знехтуємо величиною

« $\frac{1}{\rho_p} \mathbf{u} \nabla \rho_p$ ». Під  $\mathbf{v}$  мається на увазі швидкість руху твердих частинок ґрунту, що

складають його скелет (не вільнорухомі суфозійні частинки). Ця величина ще менша за швидкість фільтрації. Тому в виразі для  $\mathbf{F}_m$  знехтуємо членом

« $\frac{1}{\rho_m} \mathbf{v} \nabla \rho_m$ », а в (6) – « $\mathbf{v} \nabla e$ ». Підставивши (7), (8) в (6), з урахуванням

вищесказаного, маємо

$$-\frac{d\sigma}{dt} - \frac{\sigma}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - e \left( -\frac{d\sigma_m}{dt} - \frac{\sigma_m}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) = -\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h) + \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}. \quad (9)$$

Далі дещо перетворимо ліву частину рівняння (9) з урахуванням наступних залежностей [2, ст. 30]:

$$\sigma_m + \sigma = 1, \quad \sigma_m = \frac{1}{1+e}, \quad \sigma = \frac{e}{1+e}, \quad \frac{d\sigma_m}{dt} = -\frac{1}{(1+e)^2} \frac{de}{dt}.$$

Маємо

$$\frac{de}{dt} + e \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) = (1+e) (\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}). \quad (10)$$

Згідно з принципом гідроємності Герсеванова [2, ст. 132] зміна коефіцієнта пористості ґрунту визначається тільки зміною суми головних напружень  $\Theta$  в скелеті пористого середовища. Однак, з урахуванням впливу техногенних факторів, цей принцип має бути дещо уточнений. Розуміючи важливість даного питання (про модифікацію принципу гідроємності Герсеванова), його детальний розгляд анонсуємо, як тему однієї із наступних статей. Зараз лише відзначимо, що  $e = e(t, \mathbf{S})$ , де, наприклад,  $s_1 \equiv \Theta$ . Тоді

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial e}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial e}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t}. \quad (11)$$

Перший член в правій частині рівності (11) відображає зміну коефіцієнта пористості внаслідок реологічних властивостей скелету пористого середовища, а останні – техногенних факторів (концентрації хімічних речовин, температури, суфозії тощо).

Підставивши (11) в (10) ми фактично і отримуємо узагальнене рівняння фільтраційної консолидації з урахуванням впливу техногенних факторів

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial e}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t} + e \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) = \\ = (1+e) (\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, \mathbf{S}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}). \end{aligned} \quad (12)$$

Рівняння (12) містить дві невідомі функції -  $h$  та  $\Theta$ . Для його практичного застосування потрібний перехід до однієї невідомої функції  $h$ , що можна зробити згідно основної розрахункової моделі Флоріна [2, §8.7], або перехід до визначення напружено-деформівного стану пористого середовища згідно теорії об'ємних сил (модель Біо-Флоріна) [2, §8.6]. Також мають бути відомі залежності коефіцієнта пористості  $e$  від часу  $t$ ,  $\Theta$  та від  $s_i$ ,  $i = \overline{2, n}$ . Аналогічне стосується величин  $\rho_p$  та  $\rho_m$ . В наступних пунктах статті приведемо деякі з таких експериментальних залежностей, а деякі виведемо, ґрунтуючись на певних припущеннях. Але зручність рівняння (12) для подальшого використання полягає в тому, що такі залежності легко можуть бути замінені іншими. Крім того мають бути відомими, або визначатись як розв'язки крайових задач

математичної фізики (математичних моделей) відповідні техногенні функції впливів  $s_i$ ,  $i = \overline{2, n}$ .

### 5. Залежність густини порової рідини від концентрації хімічних речовин та температури

В роботі [19] наведено формулу залежності густини водного розчину NaCl від його концентрації  $c$  (%) та від температури  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$\rho_p(c, T) = \sum_{i=1}^3 A_i T^{i-1} \sum_{j=1}^3 a_j c^{j-1}. \quad (13)$$

Значення коефіцієнтів  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $a_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів у формулі (13)

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$A_1$	750.2834	26.7822	-0.26389
$A_2$	1.90165	-0.11734	0.00175
$A_3$	-0.003604	0.0001701	-0.00000261

В [20, ст. 395] запропоновано густину  $\rho_p$  багатокомпонентного хімічного розчину розраховувати згідно модифікованого методу Езрохі за формулою

$$\lg \rho_p = \lg \rho_0 + \sum_{i=1}^n A_i c_i,$$

де  $\rho_0$  - густина води;  $A_i$  - коефіцієнти;  $c_i$  - концентрація хімічних компонент (%). Густина води розраховується за формулою

$$\begin{aligned} \rho_0 = & 999.972 / (1 - 0.189173965 \cdot 10^{-5} \psi + 0.080064627 \psi^2 - \\ & - 0.0866561397 \psi^3 + 0.141326458 \psi^4 - 0.227708811 \psi^5 + \\ & + 0.305765045 \psi^6 - 0.292859639 \psi^7 + 0.17991657 \psi^8 - \\ & - 0.0625693644 \psi^9 + 0.00930376776 \psi^{10}), \end{aligned}$$

або

$$\rho_0 = 1000 - 0.062T - 0.00355T^2,$$

де  $\psi = (T - 3.98)/100$ ,  $T \in [0; 100 \text{ } ^{\circ}\text{C}]$ . Коефіцієнти  $A_i$  визначаються згідно залежностей

$$A_i = a_{0i} + a_{1i}T + a_{2i}T^2,$$

а коефіцієнти  $a_{0i}$ ,  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}$  для ряду неорганічних речовин наведено в таблицях 3.7 та 3.8 вказаного довідника [20].

Про залежність густини води від температури та її немонотонність вказано в роботі [21]. Залежність густини води від температури та тиску наведено в [22].

### 6. Залежність густини скелету ґрунту від температури

В [23] запропоновано наступну формулу для визначення зміни густини глинистих частинок залежно від зміни температури:

$$\Delta\rho_m = -\frac{\alpha_m\Delta T}{1+\alpha_m\Delta T}\rho_m, \quad (14)$$

де  $\alpha_m$  - коефіцієнт об'ємного термічного розширення глинистих частинок,  $\Delta\rho_m$ ,  $\Delta T$  - зміна густини та зміна температури відповідно. Також відмічено, що згідно роботи [24] значення  $\alpha_m$  для звичайних ґрунтів варіюється від  $1.5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$  до  $5.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ .

З (14) маємо

$$\frac{\Delta\rho_m}{\Delta T} = -\frac{\alpha_m}{1+\alpha_m\Delta T}\rho_m$$

і, переходячи до границі при  $\Delta T \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial T} = -\alpha_m\rho_m.$$

### 7. Урахування механічної та хімічної суфозій

Виділимо елементарний фрагмент ґрунту загальним об'ємом  $V$ , який повністю насичений поровою рідиною. Виділений фрагмент ґрунту буде містити: 1) поровий розчин об'ємом  $V_\sigma$ , який дорівнює об'єму пор; 2) тверді структурні частинки об'ємом  $V_m^{(0)}$ , які утворюють «скелет» пористого середовища; 3) тверді суфозійні багатофракційні вільнорухомі частинки об'ємами  $V_m^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, l}$ , де номер  $i$  відповідає частинкам певної фракції; 4) тверді водорозчинні хімічні речовини об'ємами  $V_N^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, k}$ , де номер  $j$  відповідає частинкам певних солей.

Згідно означення

$$\sigma = \frac{V_\sigma}{V}; \quad \sigma_m^{(0)} = \frac{V_m^{(0)}}{V}; \quad \sigma_m^{(i)} = \frac{V_m^{(i)}}{V}; \quad \sigma_N^{(j)} = \frac{V_N^{(j)}}{V}; \quad \sigma_m = \sigma_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k \sigma_N^{(j)}.$$

Тут  $\sigma_m^{(i)}$  - це концентрація суфозійних нерозчинних частинок ґрунту  $i$ -ї фракції,  $i = \overline{1, l}$  [25];  $\sigma_N^{(j)} = \frac{N_j}{\rho_N^{(j)}}$ , де  $\rho_N^{(j)}$  - густина солей  $i$ -го хімічного компонента в твердій фазі,  $N_j$  - концентрація цих солей в твердій фазі пористого середовища.

Оскільки  $\sigma_m = \frac{1}{1+e}$ , то  $e = \frac{1}{\sigma_m} - 1$  [2, ст. 30]. Тоді  $j = \overline{1, k}$

$$e = \frac{1}{\sigma_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} N_j} - 1 \quad (15)$$

і, наприклад

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma_m^{(i)}} = -\frac{1}{(\sigma_m)^2}, \quad i = \overline{1, l}, \quad \frac{\partial e}{\partial N_j} = -\frac{1}{\rho_N^{(j)} (\sigma_m)^2}, \quad j = \overline{1, k}$$

або

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma_m^{(i)}} = -(1+e)^2, \quad i = \overline{1, l}, \quad \frac{\partial e}{\partial N_j} = -\frac{(1+e)^2}{\rho_N^{(j)}}, \quad j = \overline{1, k}.$$

### 8. Залежність густини скелету ґрунту від концентрації хімічних речовин та суфозійних частинок

Нехай  $m$  - маса твердих частинок у виділеному фрагменті пористого середовища об'ємом  $V$ . Оскільки під густиною ґрунту розуміється густина пористого матеріалу, то

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{m}{V} = \frac{\rho_m^{(0)} V_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \rho_m^{(i)} V_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k \rho_N^{(j)} V_N^{(j)}}{V} = \sigma_m^{(0)} \rho_m^{(0)} + \\ &+ \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} \rho_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k \sigma_N^{(j)} \rho_N^{(j)} = \sigma_m^{(0)} \rho_m^{(0)} + \sum_{i=1}^l \sigma_m^{(i)} \rho_m^{(i)} + \sum_{j=1}^k N_j. \end{aligned}$$

Тут  $\rho_m^{(0)}$  - густина твердих частинок, які утворюють скелет ґрунту (поки що вважаємо його однорідним, але в загальному випадку скелет теж може складатись із різнотипних частинок – глин, пісків тощо);  $\rho_m^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, l}$ , - густина твердих суфозійних частинок  $i$ -ї фракції.

### 9. Частковий випадок рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням взаємозв'язаних процесів хімічної та механічної суфозії

Зробимо наступні припущення:

1. Знехтуємо повзучістю скелету ґрунту. Тобто,  $e = e(\Theta, T, \sigma_m, \mathbf{N})$ , де  $\sigma_m = (\sigma_m^{(0)}; \sigma_m^{(1)}; \dots; \sigma_m^{(l)})$ ,  $\mathbf{N} = (N_1; N_2; \dots; N_k)$ . Тоді  $\frac{\partial e}{\partial t} \equiv 0$ .
2. Складним і не до кінця вирішеним залишається питання залежності коефіцієнта пористості ґрунту від одночасного впливу різних факторів. Наприклад, в якості такої залежності можна запропонувати

$$e(\Theta, T, \sigma_m, \mathbf{N}) = \chi_1(\Theta) \chi_2(T) \bar{e}(\sigma_m, \mathbf{N}),$$

де  $\chi_1(\Theta)$ ,  $\chi_2(T)$  - функції впливів відповідних факторів і значення яких (функцій) є безрозмірними величинами;  $\bar{e}(\sigma_m, \mathbf{N})$  визначається формулою (15). В якості  $\chi_1(\Theta)$  можна взяти, наприклад



$$\chi_1(\Theta) = \frac{1}{e_0} \left( -a \frac{\Theta}{1+(R-1)\xi} + e_0 \right),$$

де  $a$  - коефіцієнт стискуваності ґрунту [2, ст. 46];  $R$  - розмірність задачі;  $\xi$  - коефіцієнт бічного тиску ґрунту [2, ст. 54];  $e_0$  - початкове значення коефіцієнта пористості. Функція впливу  $\chi_2(T)$  може виражати собою явище термоповзучості скелету пористого середовища [26].

Відмітимо, що компресійна залежність в класичній механіці ґрунтів має вигляд [2, ст. 132]

$$e = -a \frac{\Theta}{1+(R-1)\xi} + e_0.$$

Тому інша можлива залежність

$$e(\Theta, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}) = -a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}) \frac{\Theta}{1+(R-1)\xi} + \bar{e}(\boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}), \quad (16)$$

де коефіцієнт стискуваності є функцією, залежною від фізико-хімічних факторів. Загалом, проблема комплексного урахування одночасного впливу різних факторів на параметри залежностей в ґрунтах залишається. Це в основному стосується проведення натурних експериментів. Деякі з натурних експериментів компресійних досліджень засолених та загіпсованих ґрунтів наведено в [27, глава III].

Якщо за основу взяти залежність (16), то

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta} = -\frac{a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1+(R-1)\xi}. \quad (17)$$

3. Припустимо, що виконуються положення основної розрахункової моделі Флоріна [2, §8.7]. Тоді  $\Theta = \Theta^* + R\gamma h^* - R\gamma h$  і

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + R\gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} - R\gamma \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Тут  $\Theta^*$ ,  $h^*$  - сума головних напружень та надлишкові напори в стані повної стабілізації;  $\gamma$  - питома вага порового розчину. Якщо, більш того, припустити,

що  $\Theta^* = const$ ,  $h^* = const$ , то  $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -R\gamma \frac{\partial h}{\partial t}$ .

З урахуванням вищенаведених залежностей та припущень, нехтуючи явищами термоповзучості пористого середовища, рівняння (12) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{R\gamma a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) = \quad (18) \\ & = (1+e) (\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, h, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}, \mathbf{c}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}). \end{aligned}$$

Рівняння (18) містить одну невідому функцію -  $h$  (при умові, що функції  $\Theta$ ,  $T$ ,  $\sigma_m$ ,  $N$ ,  $c$  відомі, або визначені з відповідних крайових задач). Залежності коефіцієнта фільтрації  $K_h$  від концентрації солей та температури наведено в роботах [4, 8]; від концентрації суфозійних частинок – [18, 25]; експериментальні залежності для засолених та загіпсованих ґрунтів від концентрації гіпсу в твердій фазі – [27]; від функції напорів – [28]. Однак, для вираження комплексного впливу фізико-хімічних факторів на коефіцієнт фільтрації, по аналогії з коефіцієнтом пористості, потрібні додаткові теоретичні викладки або натурні експерименти.

#### 10. Висновки та напрямки подальших досліджень

В роботі виведене узагальнене рівняння фільтраційної консолідації, яке дозволяє системно враховувати вплив різних факторів на цей процес. Для формування математичної моделі досліджуваних процесів його (рівняння) потрібно доповнити рівняннями, які описують зміну функцій-техногенних впливів, відповідними початковими та граничними умовами, а також експериментальними або теоретичними залежностями параметрів ґрунтів від фізико-хімічних факторів. Оскільки процеси консолідації пов'язані з просіданням (набуханням) пористого середовища, то аналогічного узагальнення потребує і кінематична гранична умова на верхній рухомій межі ґрунту. Також, як було відмічено вище, потребує детальнішого обґрунтування модифікація принципу гідроємності Герсеванова.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Флорин В. А. Основы механики грунтов. В 2 т. Т.2. / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 544 с.
2. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов – М.: Высш. школа, 1991. – 447 с.
3. Зарецкий Ю. К. Теория консолидации грунтов / Ю. К. Зарецкий. – М.: Наука, 1967. – 270с.
4. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
5. Власюк А. П. Фильтрационная консолидация трёхфазных грунтов с учётом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизо термическом режиме / А. П. Власюк, П. М. Мартынюк // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 4. – С. 32–56.
6. Булавацкий В. М. Моделирование динамики некоторых локально-неравновесных геомиграционных процессов на основе дробно-дифференциальной геоинформационной модели / В. М. Булавацкий // Проблемы управления и информатики. - 2013. - №6. - С. 103-111.
7. Булавацкий В. М. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №6. – С. 71–79.

8. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.
9. Власюк А. П. Контактный размыв и фильтрационная консолидация грунтов в условиях тепло-солепереноса / А. П. Власюк, П. Н. Мартынюк // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, №11. – С. 97–112.
10. Martynyuk P. M. Existence and uniqueness of a solution of the problem with free boundary in the theory of filtration consolidation of soils with regard for the influence of technogenic factors / P. M. Martynyuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. - Vol. 207, No. 1. – P. 59-73.
11. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу термічного розширення на надлишкові напори в насичених ґрунтах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2007. – Вип.12.–С. 68–77.
12. Мартинюк П. М. Про урахування наявності в поровій воді розчинених солей при математичному моделюванні консолідації ґрунтів / П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. –2003.–Вип. 2.–С.168–174.
13. Vlasjuk A. P. Numerical solution of a one-dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime / A. P. Vlasjuk, P. M. Martynyuk, O. R. Fursovych // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 160, № 4. – P. 525–535.
14. Мичута О. Р. Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях / О. Р. Мичута, А. П. Власюк, П. Н. Мартынюк // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 2. – С. 3–18.
15. Мічута О. Р. R-вимірна задача впливу багатокомпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів / О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013. – Вип.2. – С. 196-204.
16. Комплексне моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів у ґрунтових греблях / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. Теревус, М. М. Хлапук // Вісник Нац. ун-ту водного госп-ва та природокорист. Серія тех. науки. – 2011. – Вип. 3(55). – С. 70–77.
17. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Вісник Харківського національного університету. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. –2012.–Вип. 1037.–С. 18–27.
18. Поляков В. Л. Фильтрационные деформации в дренируемых грунтах: теория и приложения / В. Л. Поляков. – Киев: Аграр Медиа Групп, 2014. – 382 с.
19. Mathematical modeling of density and viscosity of NaCl aqueous solutions / A. I. Simion, C.-G. Grigoras, A.-M. Rosu, L. Gavrilă // J. of Agroalimentary Processes and Technologies. – 2015. – 21(1). – P. 41-52.
20. Зайцев И. Д. Физико-химические свойства бинарных и многокомпонентных растворов неорганических веществ. Справ. изд. / И. Д. Зайцев, Г. Г. Асеев. – М.: Химия, 1988. – 416 с.

21. Букреев В. И. Влияние немонотонной зависимости плотности воды от температуры на распад начального скачка плотности / В. И. Букреев // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, №1. – С. 66-73.
22. Simonson J. M. Densities of NaCl(aq) to the temperature 523K at pressure to 40MPa measured with a new vibrating-tube densitometer / J. M. Simonson // J. Chem. Thermodynamics. – 1994. – 26. – P.345-359.
23. Tsutsumi A. Combined effects of strain rate and temperature on consolidation behavior of clayey soils / A. Tsutsumi, H. Tanaka // Soils and Foundations. – 2012. – 52(2). – P. 207-215.
24. Campanella R. G. Influence of temperature variations on soil behavior / R. G. Campanella, J. K. Mitchell // ASCE Journal of SMFE. – 1968. – 94(3). – P. 709-734.
25. Мартинюк П. М. Математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням багатофракційної суфозії // П. М. Мартинюк, О. В. Гошко // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013.–Вип. 4.–С.136–141.
26. Математичне моделювання одновимірної задачі фільтраційної консолідації з урахуванням термоповзучості скелета ґрунту / В. І. Лаврик, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, В. С. Герасимчук // Наукові записки Національного університету “Києво–Могилянська Академія”. Сер. фіз.-матем. науки. – 2007. – Т. 61. – С. 23–26.
27. Петрухин В. П. Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В. П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1980. – 119 с.
28. Власюк А. П. Математичне моделювання процесів консолідації ґрунтів з урахуванням нелінійного закону фільтрації в умовах тепло-солепереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 125–130.